CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

J. CHACRON

Structures relationnelles

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, nº 2 (1969), p. 131-200

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_2_131_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XI, 2*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

STRUCTURES RELATIONNELLES †

par J. CHACRON

Introduction.

Soit $\mathfrak{R}$ la catégorie des relations binaires (E, R, E') entre éléments*) d'un univers $\mathfrak{U}$. En la munissant de la relation d'ordre :

$$(E, R, E') \leq (E, R', E') \text{ si, et seulement si, } R \subseteq R'$$

et de l'involution $\circ$:

$$(E, R, E') \to (E', R^{-1}, E), \text{ où } R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\},$$

on obtient une catégorie à involution [1]. Puppe [7], qui a introduit les catégories à involution (sous le nom de catégories de relations), a montré en particulier que toute catégorie abélienne est la catégorie des applications associée à une catégorie à involution. Récemment ce résultat a été généralisé pour les catégories exactes par Brinkmann [6].

Ici nous partons de la notion de catégorie à involution *inf*-demi-réticulée (dont $(\mathfrak{R}, \leq, 0)$ est un exemple) La donnée d'une telle catégorie nous permettra d'exposer algébriquement une partie de la Théorie des Structures uniformes [2] ou préuniformes [3]. Le langage utilisé est suggéré par la Catégorie des Relations binaires, et se base sur les quatre observations suivantes :

*) Une relation de E vers E' est notée (E, R, E'); si (E', R', E'') est aussi une relation, $R \circ R'$ est l'ensemble des $(x, z) \in E \times E''$ tels qu'il existe y vérifiant $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R'$: La catégorie des relations ainsi obtenue est la duale de celle considérée dans [5].

† Article principal d'une thèse de Doctorat d'Etat (soutenance : Mars 1970).

1) Une relation*) (E, R, E') est une application, ou encore une fonctionnelle de E vers E', ssi $R \circ R^{-1} \supset \Delta_E$ et $R^{-1} \circ R \subset \Delta_{E'}$.

2) Si $(E, \underline{f}, E')$ est une fonctionnelle, la partie $\underline{f} \circ \underline{f}^{-1}$ de $E \times E$ est précisément l'équivalence associée à l'application $f = (E, \underline{f}, E')$.

3) Pour toute partie A de $E \times E$, on peut écrire $\overline{f \times f(A)} = \underline{f}^{-1} \circ A \circ \underline{f}$, et pour toute partie A' de $E' \times E'$, $(f \times f)^{-1}(A') = \underline{f} \circ A' \circ \underline{f}^{-1}$.

4) Si (E_i, R_i, E'_i) est une relation pour tout $i \in I$, si p_i et p'_i sont respectivement les projections canoniques des ensembles produits E et E' sur E_i et E'_i, la relation produit peut s'écrire (E, R, E'), où $R = \cap (p_i \times p'_i)^{-1}(R_i)$.

Moyennant quoi nous pouvons : en premier lieu, définir dans la catégorie donnée une notion de produit d'une famille lié à l'ordre et à l'involution; ensuite entreprendre une étude des structures uniformes dans ce cadre en incluant des questions de topologie ordonnée [4], la construction dü produit d'une famille de structures uniformes et divers résultats sur la catégorie des relations uniformément continues correspondante.

La notion de structure uniforme est généralisée en celle de structure préuniforme. A une structure préuniforme sont associées deux structures uniformes qui sont ses unités dans la catégorie des structures préuniformes. Les structures préuniformes sont elles-mêmes les unités de la catégorie double des birelations préuniformément continues.

Dans le second chapitre, cette étude générale est appliquée à la catégorie à involution *inf*-demi-réticulée des relations binaires (pour l'ordre et l'involution habituels). On retrouve alors les structures uniformes au sens usuel. Une structure préuniforme est la donnée d'un filtre sur le produit $E \times E'$ de deux ensembles, vérifiant certaines conditions; on lui associe des structures uniformes $^*\mathfrak{U}$ sur E et $\mathfrak{U}^*$ sur E', et par conséquent des topologies $^*T$ sur E et T^* sur E'. On étudie dans ce contexte différentes questions de convergence. Ainsi on montre que $\mathfrak{U}^*$ est complète si, et seulement si, $^*\mathfrak{U}$ est complète, que T^* est compacte si, et seulement si, $^*T$ est compacte.

Le chapitre III donne des exemples de structures préuniformes. Les espaces prémétriques généralisent les espaces métriques, la distance étant remplacée par la donnée d'une application d'un produit $E \times E'$ dans les nombres positifs, vérifiant une certaine inégalité quadrangulaire. Les groupes préuniformes sont des triplets formés par le produit de deux groupes et un homomorphisme de ce produit dans un groupe topologique.

Les résultats de ce travail ont été résumés dans 2 Notes aux Comptes-rendus [3] .

CHAPITRE I

STRUCTURES UNIFORMES ET PREUNIFORMES DANS UNE CATEGORIE A INVOLUTION

1. Eléments remarquables dans une catégorie à involution.

Etant donnée une catégorie $C^{\bullet}$, la classe de ses unités est $C_o^{\bullet}$, ses applications source et but α et β, et, si r et r' sont deux éléments de C, on note $Hom(r', r)$ l'ensemble des $x \in C$ tels que $\alpha(x) = \alpha(r)$ et $\beta(x) = \beta(r')$.

DEFINITION 1. Lorsqu'une catégorie $C^{\bullet}$ est munie d'une relation d'ordre $\leq$ et d'une application $a \to a^o$ de C vers C, nous dirons que le triplet $(C^{\bullet}, \leq, o)$ est *une catégorie à involution inf-demi-réticulée* si :

(I_1) Si $r \leq p$ et si $r.x$ et $p.x$ (resp. $x.r$ et $x.p$) sont définis, alors $r.x \leq p.x$ (resp. $x.r \leq x.p$).

(I_2) L'application $a \to a^o$ est une involution dont la restriction à $C_o^{\bullet}$ est l'identité, c'est-à-dire :

i) $\forall a \in C$, $(a^o)^o = a$,

ii) Si $a.b$ est défini, alors $b^o.a^o$ est défini, et l'on a $(a.b)^o = b^o.a^o$,

iii) Si $e \in C_o^{\bullet}$, alors $e^o = e$,

iiii) Si $r \leq p$, alors $r^o \leq p^o$.

(I_3) Pour tout $r \in C$, $Hom(r, r)$ est un *inf*-demi-treillis complet*).

REMARQUES. Les axiomes I_2-*ii* et I_2-*iii* entraînent que l'application $a \to a^o$ est un foncteur de $C^{\bullet}$ vers sa catégorie duale C^* et l'on a donc

$$\alpha(r^o) = (\beta(r))^o = \beta(r) \text{ et } \beta(r^o) = \alpha(r).$$

Ce qui prouve que : *Pour tout* $r \in C$, *les composés* $r.r^o$ *et* $r^o.r$ *sont définis*. Par conséquent pour tout $x \in Hom(r, r)$, on a $x^o \in Hom(r^o, r^o)$.

*) Ceci signifie que, pour l'ordre induit sur $Hom(r, r)$, chaque partie non vide de $Hom(r, r)$ admet un plus grand minorant.

L'axiome I_2-iii montre alors que la restriction de l'application $a \to a^o$ sur $Hom(r,r)$ est une bijection doublement isotone de $Hom(r,r)$ vers $Hom(r^o, r^o)$. L'axiome I_3 entraîne la propriété suivante : *Si* (r_i) *est une famille d'éléments de* $Hom(r,r)$, *alors* $(\bigwedge r_i)^o = \bigwedge(r_i^o)$.

Remarquons aussi que, si $(p_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $Hom(r,r)$ telle que $p_j.x$ (resp. $x.p_j$) soit défini pour un certain $j \in I$, alors $(\bigwedge p_i).x$ (resp. $x.(\bigwedge p_i)$) est défini, et l'on a :

$$(\bigwedge p_i).x \leq \bigwedge(p_i.x) \text{ (resp. } x.(\bigwedge p_i) \leq \bigwedge(x.p_i)).$$

En effet, $\alpha(\bigwedge p_i) = \alpha(r) = \alpha(p_j) = \beta(x)$. Ceci dit pour tout $i \in I$, on a $(\bigwedge p_i).x \leq p_i.x$ dans $Hom(r.x, r.x)$, et par suite $(\bigwedge p_i).x \leq (p_i.x)$.

DEFINITIONS 2. Soit $(C^\bullet, \leq, o)$ une catégorie vérifiant I_1 et I_2, et $r \in C$. Nous dirons que r est :

- *bimultifonctionnelle* ssi $r.r^o \geq \beta(r)$ et $r^o.r \geq \alpha(r)$,
- *fonctionnelle* ssi $r.r^o \geq \beta(r)$ et $r^o.r \leq \alpha(r)$,
- *fonctionnelle surjective* ssi $r.r^o \geq \beta(r)$ et $r^o.r = \alpha(r)$,
- *fonctionnelle injective* ssi $r.r^o = \beta(r)$ et $r^o.r \leq \alpha(r)$,
- *fonctionnelle bijective* ssi $r.r^o = \beta(r)$ et $r^o.r = \alpha(r)$.

On montre que les éléments de C vérifiant l'une des propriétés ci-dessus forment une sous-catégorie de $C^\bullet$ contenant $C_o^\bullet$. En particulier, si f et f' sont deux fonctionnelles bijectives et si $r \in C$ est tel que $f.r.f'$ soit défini, chacune de ces propriétés qui est vérifiée par r est également vérifiée par $f.r.f'$.

Les fonctionnelles bijectives f sont les éléments inversibles de la sous-catégorie des fonctionnelles et, si f^{-1} désigne l'inverse f dans la catégorie $C^\bullet$, on a $f^{-1} = f^o$. En effet, les égalités $f.f^o = \beta(f)$ et $f^o.f = \alpha(f)$ montrent que f est inversible et l'unicité de l'inverse entraîne $f^{-1} = f^o$. Inversement si f est une fonctionnelle inversible, la relation $f.f^o \geq \beta(f)$ entraîne

$$f^{-1}.(f.f^o) \geq f^{-1}.\beta(f) = f^{-1}, \text{ d'où } f^o \geq f^{-1}.$$

De la relation $f^o.f \leq \alpha(f)$, on déduit de même $f^o \leq f^{-1}$, et par suite $f^o = f^{-1}$.

Lorsque de plus $(C^\bullet, \leq, \circ)$ vérifie l'axiome I_3, on a la propriété suivante :

PROPOSITION 1. *Soient deux fonctionnelles* f, g *et* $(r_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $Hom(r,r)$ *telle que* $f.r_j.g^o$ *soit défini pour un certain* $j \in I$. *On a :* $f.(\bigwedge r_i).g^o = \bigwedge f.r_i.g^o$.

En effet, si $f.r_j.g^o$ est défini, et si l'on pose $u = f.r_j.g^o$, il est clair que $f.r_i.g^o$ est défini pour tout $i \in I$ et qu'il appartient à $Hom(u,u)$. Ceci dit, on a $f.(\bigwedge r_i).g^o \leq f.r_i.g^o$ pour tout $i \in I$, et par suite

$$f.(\bigwedge r_i).g^o \leq \bigwedge (f.r_i.g^o).$$

Inversement,

$$f^o.(\bigwedge (f.r_i.g^o)).g \leq f^o.f.r_i.g^o.g \leq \alpha(f).r_i.\alpha(g) = r_i.$$

D'où $f^o.(\bigwedge(f.r_i.g^o)).g \leq \bigwedge r_i$. Il s'ensuit

$$f.f^o.(\bigwedge f.r_i.g^o).g.g^o \leq f.(\bigwedge r_i).g^o,$$

mais

$$\bigwedge(f.r_i.g^o) = \beta(f).(\bigwedge(f.r_i.g^o)).\beta(g) \leq f.f^o.(\bigwedge(f.r_i.g^o)).g.g^o,$$

d'où $\bigwedge(f.r_i.g^o) \leq f.(\bigwedge r_i).g^o$, et par suite l'égalité.

2. Produits dans une catégorie à involution inf-demi-réticulée.

On suppose que $(C^\bullet, \leq, \circ)$ est une catégorie à involution *inf*-demi-réticulée. Comme $\circ$ est un foncteur de $C^\bullet$ sur sa duale laissant fixes les unités, une famille (e_i) d'unités de $C^\bullet$ admet un produit e dans la catégorie $C^\bullet$ ssi e est une somme de (e_i) dans $C^\bullet$. Nous allons «raffiner» ces notions. Les familles considérées seront indexées par I.

DEFINITION 3. Si (e_i) est une famille d'unités de $C^\bullet$, nous dirons que le couple $((p_i)_{i\in I}, e)$ est *un produit* naturalisé de (e_i) dans $(C^\bullet, \leq, \circ)$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

(P_1) $e \in C^\bullet_o$ et p_i est une fonctionnelle surjective élément de $Hom(e, e_i)$ pour tout $i \in I$.

(P_2) On a $\bigwedge(p_i.p_i^o) = e$.

(P_3) Si $e' \in C^\bullet_o$ et si f_i est une fonctionnelle dans $Hom(e', e_i)$ pour tout $i \in I$, il existe une et une seule fonctionnelle f dans $Hom(e', e)$

telle que $f.p_i = f_i$ pour tout $i \in I$.

Il est clair que, si $((p_i), e)$ est un produit naturalisé de (e_i), et si g est une fonctionnelle appartenant à $Hom(e, e)$ et telle que $g.p_i = p_i$ pour tout $i \in I$, alors $g = e$. En effet, pour tout $i \in I$, comme $e.p_i = p_i$, l'axiome P_3 donne $g = e$.

PROPOSITION 2. *Si $((p_i), e)$ et $((p'_i), e')$ sont deux produits naturalisés de la famille (e_i), il existe une bijection f telle que $f.p_i = p'_i$ pour tout $i \in I$.*

En effet, puisque $((p_i), e)$ est un produit de (e_i) et que p'_i est une fonctionnelle dans $Hom(e', e)$ pour tout $i \in I$, il existe d'après P_3 une fonctionnelle f telle que $f.p_i = p'_i$. De même il existe une fonctionnelle f' telle que $f'.p'_i = p_i$. D'où $f.(f'.p'_i) = f.p_i = p'_i$, et par suite $(f.f').p'_i = p'_i$. On a de même $(f'.f).p_i = p_i$. Par conséquent $f.f' = e'$ et $f'.f = e$, soit encore $f.f' = \beta(f)$ et $f'.f = \alpha(f)$. La fonctionnelle f est donc inversible, et par suite une bijection. C'est la seule fonctionnelle bijective telle que $f.p_i = p'_i$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. Si $((p_i), e)$ est un produit naturalisé de (e_i) dans $(C^\bullet, \leq, \circ)$, les conditions P_1 et P_3 signifient que $(e, (p_i))$ est une somme naturalisée [5] de (e_i) dans la catégorie $C_f^\bullet$ formée des fonctionnelles, ou encore que $((p_i^\circ), e)$ est un produit naturalisé [5] de (e_i) dans la sous-catégorie $\circ(C_f)^\bullet$ de $C^\bullet$; mais e peut ne pas être un produit (i.e. une somme) de (e_i) dans $C^\bullet$. En particulier si $(C^\bullet, \leq, \circ)$ est la catégorie à involution des relations binaires, $((p_i), e)$ est un produit naturalisé de (e_i) dans $(C^\bullet, \leq, \circ)$ si, et seulement si, e est l'ensemble produit de (e_i) et p_i la projection canonique de e sur e_i, alors que le produit de (e_i) dans $C^\bullet$ est l'ensemble somme de (e_i). Rappelons que, pour nous, la catégorie des relations est la duale de celle considérée usuellement [5], de sorte que $C_f^\bullet$ est la duale de la catégorie usuelle des applications; c'est pourquoi le produit naturalisé habituel dans cette catégorie devient ici une somme naturalisée.

Nous allons étendre la notion de produit à une famille (r_i) d'éléments quelconques de C, en utilisant l'observation 4 (Cf. Introduction).

DEFINITION 4. Soit (r_i) une famille telle les deux familles $(\beta(r_i))$ et $(\alpha(r_i))$ admettent respectivement des produits naturalisés $((p_i), e)$ et $((p'_i), e')$ dans $(C^\bullet, \leq, \circ)$, et soit la famille $(p_i . r_i . p'^o_i)$ d'éléments de $Hom(e, e')$. Nous posons $r = \bigwedge(p_i . r_i . p'^o_i)$, et nous dirons que $((p_i), (p'_i), r)$ est *un produit de la famille* (r_i) dans $(C^\bullet, \leq, \circ)$.

PROPOSITION 3. *Si* $((p_i), (p'_i), r)$ *et* $((q_i), (q'_i), s)$ *sont deux produits de la famille* (r_i) *dans* $(C^\bullet, \leq, \circ)$, *il existe deux bijections* f *et* f' *telles que* $s = f . r . f'^o$.

Par définition il existe deux unités e_1 et e_2 telles que $((p_i), e_1)$ et $((q_i), e_2)$ soient respectivement deux produits de la famille $(\beta(r_i))$. D'après la proposition 2, il existe une bijection f telle que $q_i = f . p_i$ pour tout $i \in I$. Il existe de même une bijection f' telle que $q'_i = f' . p'_i$. On a alors :

$$s = \bigwedge q_i . r_i . q'^o_i = \bigwedge (f . p_i) . r_i . (p'^o_i . f'^o) = \bigwedge f . (p_i . r_i . p'^o_i) . f'^o$$

D'après la proposition 1, il vient $s = f . (\bigwedge p_i . r_i . p'^o_i) . f'^o = f . r . f'^o$.

Examinons le comportement du produit par involution.

PROPOSITION 4. *Si* $((p_i), (p'_i), r)$ *est un produit dans* $(C^\bullet, \leq, \circ)$ *de la famille* (r_i), *il existe* q *et* s *tels que* $((p_i), (p_i), q)$ *et* $((p'_i), (p'_i), s)$ *soient respectivement deux produits dans* $(C^\bullet, \leq, \circ)$ *des familles* $(r_i . r^o_i)$ *et* $(r^o_i . r_i)$ *et que* $q \geq r . r^o$ *et* $s \geq r^o . r$.

En effet, si $((p_i), e)$ est un produit de $(\beta(r_i))$, on peut également écrire que $((p_i), e)$ est un produit de $(\beta(r_i . r^o_i))$ et, si l'on pose $q = \bigwedge(p_i . r_i . r^o_i . p^o_i)$, le triplet $((p_i), (p_i), q)$ est un produit de la famille $(r_i . r^o_i)$. Ceci dit on a $q = \bigwedge((p_i . r_i . p'^o_i) . (p'_i . r^o_i . p^o_i))$, puisque $p'^o_i . p'_i = \alpha(p'_i)$ pour tout $i \in I$. D'où

$$q = \bigwedge((p_i . r_i . p'^o_i) . (p_i . r_i . p'^o_i)^o) \geq (\bigwedge(p_i . r_i . p'^o_i)) . (\bigwedge(p_i . r_i . p'^o_i)^o) = (\bigwedge(p_i . r_i . p'^o_i)) . (\bigwedge(p_i . r_i . p'^o_i))^o = r . r^o.$$

On obtient de même le second résultat.

DEFINITION 5. Nous dirons que la catégorie $(C^\bullet, \leq, \circ)$ *a un produit complétement compatible avec l'involution* si :

(P_4) Pour toute famille (r_i) d'éléments de C, si $((p_i), e)$ est un produit de la famille $(\beta(r_i))$ et si $((p'_i), e')$ est un produit de la famille $(\alpha(r_i))$, alors

$$(\bigwedge(p_i.r_i.p'^o_i)).(\bigwedge(p_i.r_i.p'^o_i))^o \geq \bigwedge(p_i.r_i.r^o_i.p_i).$$

REMARQUE. Si l'axiome P_4 est vérifié, les inégalités de la proposition 4 peuvent être remplaçées par des égalités.

PROPOSITION 5. *Si $(C^\bullet, \leq, o)$ a un produit complètement compatible avec l'involution, tout produit d'une famille de multifonctionnelles (resp. fonctionnelles, resp. fonctionnelles surjectives, resp. fonctionnelles injectives, resp. fonctionnelles bijectives) vérifie la même propriété.*

En effet, soit $((p_i), (p'_i), r)$ un produit de la famille (r_i) :

- Si r_i est bimultifonctionnelle, pour tout $i \in I$, on a $r_i.r^o_i \geq \beta(r_i)$, ce qui entraîne

$$p_i.r_i.r^o_i.p^o_i \geq p_i.p^o_i \geq \beta(p_i) = \beta(r).$$

Par conséquent

$$r.r^o = \bigwedge p_i.r_i.r^o_i.p^o_i \geq \beta(r).$$

On montre de même que $r^o.r \geq \alpha(r)$.

- Si r_i est fonctionnelle, pour tout $i \in I$, on a $r^o_i.r_i \leq \alpha(r_i)$; par suite

$$r^o.r = \bigwedge p'_i.r^o_i.r_i.p'^o_i \leq \bigwedge p'_i.\alpha(r_i).p'^o_i = \bigwedge p'_i.p'^o_i = \alpha(r),$$

d'après l'axiome P_3.

- On montre de même que, si $r^o_i.r_i = \alpha(r_i)$ (resp. si $r_i.r^o_i = \beta(r_i)$) pour tout $i \in I$, on a $r^o.r = \alpha(r)$ (resp. $r.r^o = \beta(r)$).

3. Structure uniforme dans une catégorie à involution inf-demi-réticulée $(C^\bullet, \leq, o)$.

DEFINITION 6. Lorsque U est une partie de C et e une unité de $C^\bullet$, nous dirons que le couple (U, e) est *une structure uniforme* si :

(U_1) U est un filtre *) dans l'*inf*-demi-treillis $Hom(e, e)$.

*) Dans un *inf*-demi-treillis, un filtre est une partie U telle que : $0 \notin U$, $x \bigwedge y \in U$ si $x \in U$, $y \in U$, et $z \in U$ si $x \in U$ et $x \leq z$. Une base de filtre est une partie B telle que $0 \notin B$ et que, si $x \in B$ et $y \in B$, il existe $z \in B$ vérifiant $z \leq x \bigwedge y$. Une base de filtre B engendre un filtre U, à savoir le filtre formé des majorants des éléments de B.

(U_2) $e \leq v$ pour tout $v \in U$.

(U_3) Si $v \in U$, alors $v^o \in U$.

(U_4) Pour tout $v \in U$, il existe un $w \in U$ tel que $w.w \leq v$.

REMARQUES ET NOTATIONS. Les éléments de U seront appelés des *entourages de* e, et l'on définit par récurrence $v^n = (v^{n-1}).v$ pour tout entier $n \geq 2$. L'axiome U_2 entraîne que, si n et n' sont deux entiers tels que $n \geq n'$, alors $v^n \geq v^{n'}$. On montre alors que, pour tout $v \in U$, il existe un $w \in U$ tel que $w^n \leq v$, lorsque n est un entier quelconque $n \geq 2$ donné.

On montre, comme dans le cas où $(C^\bullet, \leq, \circ)$ est la catégorie des relations binaires [2], que *les axiomes U_3 et U_4 sont équivalents à l'axiome :*

(U_5) Pour tout $v \in U$, il existe un $w \in U$ tel que $w.w^o \leq v$.

DEFINITION 7. Lorsque B est une partie de C et e une unité de $C_o^\bullet$, nous dirons que (B, e) est un *système fondamental d'entourages d'une structure uniforme* si :

(U'_1) B est une base de filtre (Note p. 9) dans $Hom(e,e)$.

(U'_2) $e \leq v$ pour tout $v \in B$.

(U'_3) Pour tout $v \in B$, il existe un $v' \in B$ tel que $v' \leq v^o$.

(U'_4) Pour tout $v \in B$, il existe un $w \in B$ tel que $w.w \leq v$.

On montre que, *si (U, e) est une structure uniforme, et si B est une base de filtre U dans $Hom(e, e)$, alors (B, e) est un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme. Inversement si (B, e) est un tel système, et si U est le filtre engendré par B dans $Hom(e, e)$, alors (U, e) est une structure uniforme.* En appelant élément symétrique de C tout $r \in C$ tel que $r^o = r$, on montre que, *si (U, e) est une structure uniforme, l'ensemble B des entourages symétriques de e est une base du filtre U.*

3.1. TOPOLOGIE DEDUITE D'UNE STRUCTURE UNIFORME.

Nous supposerons dans cette partie que, pour tout $r \in C$, la catégorie à involution *inf*-demi-réticulée $(C^\bullet, \leq, \circ)$ vérifie les propriétés suivantes :

(I') $Hom(r, r)$ est un treillis de Boole complet vérifiant la dis-

tributivité générale $((\bigwedge r_i) \vee q = \bigwedge (r_i \vee q))$ et, si 0_r désigne son élément nul, pour tout couple (x, x') tel que $x . 0_r . x'$ soit défini, on a $x . 0_r . x' = 0_{x.r.x'}$.

(I_4) Si a et $b \in Hom(r, r)$, et si $x . a$ et $x . b$ (resp. $a . x$ et $b . x$) sont définis, alors

$$x . (a \vee b) \leq (x . a) \vee (x . b) \text{ (resp. } (a \vee b) . x \leq (a . x) \vee (b . x)).$$

De plus nous supposons $Hom(e', e) \neq \emptyset$ pour tout couple (e', e) d'unités.

REMARQUES. De l'axiome I_1 il résulte que $(x . a) \vee (x . b) \leq x . (a \vee b)$, et par suite $x . (a \vee b) = (x . a) \vee (x . b)$ lorsque I_4 est vérifié. La distributivité générale supposée entraîne que $\bigwedge (r_i \vee q_i) = (\bigwedge r_i) \vee (\bigwedge q_i)$.

Ceci dit considérons deux structures uniformes (U, e) et (U', e'), et soit $r \in C$ tel que $\beta(r) = e$ et $\alpha(r) = e'$. Pour tout $m \in Hom(r, r)$, nous posons : $\overline{m} = \bigwedge v . m . v'$, où v et v' parcourent respectivement U et U'.

PROPOSITION 6. *L'application $m \to \overline{m}$ est une application de fermeture* [4] *dans $Hom(r, r)$, c'est-à-dire que :*

(f_1) $\overline{0_r} = 0_r$,

(f_2) $m \leq \overline{m}$,

(f_3) $\overline{(m \vee n)} = \overline{m} \vee \overline{n}$,

(f_4) $\overline{\overline{m}} = \overline{m}$.

On a en effet $v . 0_r . v' = 0_{v.r.v'} = 0_r$ pour tout $v \in U$ et $v' \in U'$, et par conséquent $\overline{0_r} = \bigwedge 0_r = 0_r$.

Pour tout $v \in U$ et $v' \in U'$, comme $v \geq e = \beta(r)$ et $v' \geq e' = \alpha(r)$, il vient : $\beta(r) . m . \alpha(r) \leq v . m . v'$, et par suite $m \leq v . m . v'$. D'où

$$m \leq \bigwedge v . m . v' = \overline{m}.$$

On a

$$\overline{(m \vee n)} = \bigwedge (v . (m \vee n) . v') = \bigwedge ((v . m . v') \vee (v . n . v')) =$$
$$= (\bigwedge v . m . v') \vee (\bigwedge v . n . v') = \overline{m} \vee \overline{n}.$$

De (f_2), on déduit $\overline{m} \leq \overline{\overline{m}}$. Inversement $\overline{\overline{m}} = \bigwedge(v.(\bigwedge w.m.w').v')$, où v et w parcourent U et où v' et w' parcourent U'. D'où

$$\overline{\overline{m}} \leq \bigwedge v.w.m.w'.v'.$$

Soit alors un $u \in U$ et un $u' \in U'$; il existe un $w \in U$ et un $w' \in U'$ tels que $w.w \leq u$ et $w'.w' \leq u'$, et l'on a $\overline{\overline{m}} \leq w.w.m.w'.w' \leq u.m.u'$. L'inégalité précédente étant vérifiée pour tout $u \in U$ et $u' \in U'$, il vient $\overline{\overline{m}} \leq \bigwedge u.m.u'$, lorsque u et u' parcourent U et U', d'où $\overline{\overline{m}} \leq \overline{m}$, et par suite $\overline{\overline{m}} = \overline{m}$, ce qui achève la démonstration.

Appelons *fermé de* $Hom(r,r)$ relativement à (U, U') tout élément m tel que $\overline{m} = m$. On montre que l'ensemble $F(U, U')$ des fermés vérifie les propriétés suivantes :

(F_1) 0_r et $1_r \in F(U, U')$.

(F_2) $F(U, U')$ est un *inf*-sous-demi-treillis complet de $Hom(r,r)$.

(F_3) $F(U, U')$ est un *sup*-demi-treillis.

Désignons par $T(U, U')$ l'ensemble des ouverts de $Hom(r,r)$ relativement à (U, U'), c'est-à-dire l'ensemble des compléments des éléments de $F(U, U')$; nous l'appellerons la *topologie déduite des structures uniformes* (U, e) *et* (U', e'). On montre que :

(0_1) 0_r et $1_r \in T(U, U')$.

(0_2) $T(U, U')$ est un *sup*-demi-treillis complet de $Hom(r,r)$.

(0_3) $T(U, U')$ est un *inf*-demi-treillis.

CAS PARTICULIER. Nous supposons que $(U, e) = (U', e')$, et nous notons alors $F(U)$ et $T(U)$ respectivement l'ensemble des fermés et des ouverts de $Hom(e, e)$.

PROPOSITION 7. *Chaque entourage de* e *contient un entourage fermé.*

Soit en effet $v \in U$. Il existe un $w \in U$ tel que $w.w.w \leq v$. Or $\overline{w} \leq w.w.w$, et $w \leq \overline{w}$. D'après U_1, $\overline{w} \in U$ et, d'après la proposition 6, $\overline{w}$ est un fermé. Comme $\overline{w} \leq v$, on obtient le résultat à démontrer.

COROLLAIRE. On voit donc que l'ensemble des entourages fermés de e est une base du filtre U dans $Hom(e, e)$. En particulier *la borne inférieure des* $v \in U$ *est un fermé* d'après F_2.

DEFINITION 7. Nous dirons que la structure uniforme (U, e) est *séparée* si e est un fermé de $Hom(e, e)$.

PROPOSITION 8. *La structure uniforme (U, e) est séparée si, et seulement si, $e = \bigwedge v$ lorsque v parcourt U.*

Montrons que, de toute manière, on a la formule $\bigwedge(v.w) = \bigwedge v$ lorsque v et w parcourent U. Pour tout v et $w \in U$, comme $v.w \geq v$, l'axiome U_1 donne $v.w \in U$, et par suite $\bigwedge v \leq \bigwedge v.w$. Inversement soit $u \in U$; il existe un $w \in U$ tel que $w.w \leq u$, et par suite $\bigwedge(v.w) \leq w.w \leq u$. L'inégalité $\bigwedge(v.w) \leq u$ ayant lieu pour tout $u \in U$, il vient $\bigwedge(v.w) \leq \bigwedge v$, d'où $\bigwedge(v.w) = \bigwedge v$.

Ceci dit, si e est un fermé, cela signifie que

$$\bigwedge(v.e.w) = e = \bigwedge(v.w) = \bigwedge v.$$

Inversement, si $\bigwedge v = e$, alors aussi $\bar{e} = e$ (corollaire précédent).

3.2. RELATION UNIFORMEMENT CONTINUE.

Si (U, e) et (U', e') sont deux structures uniformes, et si $r \in Hom(e, e')$, nous dirons que :

DEFINITION 8. Le triplet $((U, e), r, (U', e'))$ est une *relation uniformément continue* si, pour tout $v' \in U'$, il existe un $v \in U$ tel que $r^o.v.r \leq v'$ (Cf. Introduction, observation 3).

PROPOSITION 9. *Soient (U, e) une structure uniforme, e' une unité, et $r \in Hom(e, e')$. Si, pour tout $v \in U$, on a $r.r^o \leq v$ et si $r^o.r \geq \alpha(r)$, l'ensemble U' des éléments de $Hom(e', e')$ qui contiennent un $r^o.v.r$ est tel que (U', e') soit une structure uniforme. Le triplet $((U, e), r, (U', e'))$ est de plus une relation uniformément continue et, pour toute structure uniforme (U'_1, e') telle que $((U, e), r, (U'_1, e'))$ soit uniformément continue, on a $U'_1 \subset U'$.*

Vérifions que l'ensemble des $r^o.v.r$ lorsque v parcourt U satisfait aux axiomes U'_1, U'_2, U'_3 et U'_4. Comme l'application $v \to r^o.v.r$ est isotone de $Hom(e, e)$ dans $Hom(e', e')$ et que U est une base de filtre, les $r^o.v.r$ forment donc une base de filtre, car $e \leq v$ pour tout $v \in U$, et par suite

$$r^o . v . r \geq r^o . e . r = r^o . r \geq e' .$$

Soit un $r^o . v . r$; on a $(r^o . v . r)^o = r^o . v^o . r = r^o . w . r$, si l'on pose $w = v^o$. Soit enfin un $r^o . v . r$; il existe un $w \in U$ tel que $w^3 \leq v$. On a alors

$$(r^o . w . r) . (r^o . w . r) = r^o . w . (r . r^o) . w . r \leq r^o . w . w . w . r \leq r^o . v . r .$$

Ceci achève la première partie de la démonstration.

Il est clair que $((U, e), r, (U', e'))$ est uniformément continue et, si (U'_1, e') est une structure uniforme telle que $((U, e), r, (U'_1, e'))$ soit uniformément continue, pour tout $v'_1 \in U'_1$, il existe un $v \in U$ tel que $r^o . v . r \leq v'_1$, et par suite $v'_1 \in U'$ et $U'_1 \subset U'$.

NOTATIONS. La structure uniforme (U', e') définie ci-dessus sera également notée $(r^o . U . r, e')$ est appelée *l'image de* (U, e) *par* r.

PROPOSITION 10. *Soit* (U', e') *une structure uniforme, une unité* e, *et* $r \in Hom(e, e')$. *Si* $r^o . r \leq v'$ *pour tout* $v' \in U'$, *et si* $r . r^o \geq \beta(r)$, *alors l'ensemble* U *des éléments de* $Hom(e, e)$ *qui contiennent un* $r . v' . r^o$, *lorsque* $v' \in U'$, *est tel que* (U, e) *soit une structure uniforme. Le triplet* $((U, e), r, (U', e'))$ *est uniformément continue et, pour toute structure uniforme* (U_1, e) *telle que* $((U_1, e), r, (U', e'))$ *soit uniformément continue, on a* $U \subset U_1$.

La première partie de cette proposition se démontre comme en 7. Montrons que $((U, e), r, (U', e'))$ est uniformément continue. Soit en effet $v' \in U'$. Il existe un $w' \in U'$ tel que $w'^3 \leq v'$. Et l'on a

$$r^o . (r . w' . r^o) . r = (r^o . r) . w' . (r^o . r) \leq w' . w' . w' = w'^3 \leq v' .$$

Ce qui prouve que $((U, e), r, (U', e'))$ est uniformément continue. Supposons que $((U_1, e), r, (U', e'))$ soit uniformément continue. Pour tout $v \in U$, il existe un $v' \in U'$ tel que $r . v' . r^o \leq v$. Mais il existe un $v_1 \in U_1$ tel que $r^o . v_1 . r \leq v'$. Par conséquent

$$r . (r^o . v_1 . r) . r^o \leq r . v' . r^o \leq v .$$

Comme $r . r_o \geq \beta(r)$, il vient

$$v_1 = \beta(r) . v_1 . \beta(r) \leq r . (r^o . v_1 . r) . r^o \leq v ;$$

par suite $v_1 \leq v$, et $v \in U_1$, soit $U \subset U_1$, ce qui achève la démonstration.

La structure uniforme (U, e) sera aussi notée $(r.U'.r^o, e)$ et sera appelée *image inverse de* U' *par* r. Remarquons que, si r est une fonctionnelle dans $Hom(e, e')$, les hypothèses de la proposition 10 sont satisfaites.

Comme corollaire des propositions 9 et 10, considérons deux unités e et e', et r une multifonctionnelle dans $Hom(e, e')$, et montrons que l'on peut établir une correspondance biunivoque entre certaines structures uniformes (U, e) et (U', e') respectivement dans $Hom(e, e)$ et $Hom(e', e')$.

PROPOSITION 11. *L'application* $(U, e) \to (r^o.U.r, e')$ *définie par la proposition 9 est injective. On obtient de plus des images vérifiant les hypothèses de la proposition 10.*

Pour montrer l'injectivité de l'application, il suffit de vérifier que $r.(r^o.U.r).r^o = U$. Soit à cet effet $v \in U$. Il existe un $w \in U$ tel que $w.w.w \leq v$. Par conséquent

$$(r.r^o).v.(r.r^o) \leq w.\dot{w}.w \leq v, \text{ et } v \in r.r^o.U.r.r^o.$$

Inversement si $x \in Hom(e, e)$ est tel que $x \geq (r.r^o).v.(r.r^o)$ pour un $v \in U$, comme $r.r^o \geq \beta(r)$, il vient $x \geq v$, et par suite $x \in U$.

PROPOSITION 12. *L'application* $(U, e) \to (r^o.U.r, e')$ *définie par la proposition 9 est surjective.*

On montre en effet que $r^o.(r.U'.r^o).r = U'$ si U' est une structure uniforme telle que, pour tout $v' \in U'$, on ait $r^o.r \leq v'$, et l'on obtient alors le théorème suivant :

THEOREME 1. *Soient deux unités* e *et* e', *et une bimultifonctionnelle* r *dans* $Hom(e, e')$. *L'ensemble des structures uniformes* (U, e) *telles que* $r.r^o \leq v$ *pour tout* $v \in U$ *est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des structures uniformes* (U', e') *telles que* $r^o.r \leq v'$ *pour tout* $v' \in U'$.

COROLLAIRE. Si f est une fonctionnelle surjective dans $Hom(e, e')$, l'ensemble des structures uniformes (U, e) telles que $f.f^o \leq v$ pour tout $v \in U$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des structures uniformes (U', e').

3.3. *PRODUIT DE STRUCTURES UNIFORMES.*

Soit (U_i, e_i) une famille de structures uniformes, et $((p_i), e)$ un produit naturalisé dans $(C^\bullet, \leq, \circ)$ de la famille (e_i) (Cf. Déf. 3, § 2).

DEFINITION 9. Nous dirons que (U, e) est *un produit des structures uniformes* (U_i, e_i) si, pour tout $i \in I$, le triplet $((U, e), p_i, (U_i, e_i))$ est une relation uniformément continue et si, pour toute structure uniforme (V, e) telle que $((V, e), p_i, (U_i, e_i))$ soit uniformément continue pour tout $i \in I$, alors $U \subset V$.

Nous allons montrer l'existence de ce produit. Démontrons à cet effet la proposition suivante :

PROPOSITION 13. *Soit e une unité et* (V_i, e) *une famille de structures uniformes. Si* V *est la borne supérieure des filtres* V_i *dans* $Hom(e, e)$, *le couple* (V, e) *est une structure uniforme.*

Vérifions respectivement U_1, U_2, U_3 et U_4. L'ensemble V des éléments de $Hom(e, e)$ contenant une intersection finie d'éléments de V_i est bien un filtre. Pour tout $v \in V$, il existe une famille finie (v_i) d'éléments de V_i telle que $\bigwedge v_i \leq v$. Comme $e \leq v_i$ pour tout indice i, il vient $e \leq \bigwedge v_i \leq v$. On a de plus $v^o \geq (\bigwedge v_i)^o = \bigwedge (v_i^o)$, et par suite $v^o \in V$. Enfin il existe un $w_i \in V_i$ tel que $w_i . w_i \leq v_i$, d'où

$$(\bigwedge w_i).(\bigwedge w_i) \leq \bigwedge w_i . w_i \leq \bigwedge v_i \leq v.$$

PROPOSITION 14. *Si* $((p_i), e)$ *est un produit naturalisé dans* $(C^\bullet, \leq, \circ)$ *de la famille* (e_i) *et si, pour tout* $i \in I$, *le couple* (U_i, e_i) *est une structure uniforme, le couple* (U, e), *où* U *est la borne supérieure des filtres* $p_i . U_i . p_i^o$ *définis par la proposition 10, est précisément le produit des* (U_i, e_i).

D'après les propositions 10 et 13, le couple (U, e) est bien une structure uniforme. Vérifions que, pour tout $i \in I$, le triplet $((U, e), p_i, (U_i, e_i))$ est uniformément continu. Soit en effet $v_i \in U_i$. Le composé $p_i . v_i . p_i^o$ est un élément de U. Et l'on a

$$p_i^o . (p_i . v_i . p_i^o) . p_i = (p_i^o . p_i) . v_i . (p_i^o . p_i) \leq \alpha(p_i) . v_i . \alpha(p_i) = v_i,$$

puisque p_i est une fonctionnelle.

Soit alors (V, e) une structure uniforme telle que, pour tout $i \in I$, le triplet $((V, e), p_i, (U_i, e_i))$ soit uniformément continue. D'après la proposition 10, on a $p_i . U_i . p_i^o \subset V$ pour tout $i \in I$, et par suite $U \subset V$.

REMARQUE. Nous venons de voir qu'un produit $((p_i), e)$ d'une famille (e_i) détermine un et un seul produit des structures uniformes (U_i, e_i). Examinons deux produits (U, e) et (U', e') d'une famille de structures uniformes (U_i, e_i) associés respectivement à deux produits $((p_i), e)$ et $((p'_i), e')$ de la famille (e_i).

DEFINITION 10. Deux structures uniformes (U, e) et (U', e') sont dites *isomorphes* s'il existe une fonctionnelle bijective $f \in Hom(e, e')$ telle que $((U, e), f, (U', e'))$ et $((U', e'), f^o, (U, e))$ soient uniformément continues.

PROPOSITION 15. *Deux produits d'une famille (U_i, e_i) de structures uniformes sont isomorphes.*

D'après la proposition 2, il existe une fonctionnelle bijective f telle que $p_i = f . p'_i$ pour tout $i \in I$. Montrons que $((U, e), f, (U', e'))$ est uniformément continue. Soit en effet $v' \in U'$. Par définition il existe une famille finie (v_i) d'éléments de U_i telle que $v' \geq p'_i . v_i . p'^o_i$. Or on a

$$p'_i = f^o . p_i, \text{ d'où } v' \geq \bigwedge (f^o . p_i . v_i . p_i^o . f).$$

Mais, d'après la proposition 1, on peut écrire $v' \geq f^o . (\bigwedge p_i . v_i . p_i^o) . f$. Ce qui revient à dire qu'il existe un $v \in U$ tel que $f^o . v . f \leq v'$. On montre de même que $((U', e'), f^o, (U, e))$ est uniformément continue.

PROPOSITION 16. *Si, pour tout $i \in I$, la structure uniforme (U_i, e_i) est séparée (§ 3-1, Déf. 7) et si (U, e) est un produit des (U_i, e_i), alors (U, e) est séparée.*

Appliquons la proposition 8 : il suffit de montrer que $\bigwedge v = e$ lorsque v parcourt U. Or pour tout $i \in I$, on a $\bigwedge v \leq p_i . u_i . p_i^o$ quelque soit $u_i \in U_i$. En laissant fixe l'indice i, il vient $\bigwedge v \leq \bigwedge p_i . u_i . p_i^o$ lorsque u_i parcourt U_i. D'après la proposition 1, $\bigwedge v \leq p_i . (\bigwedge u_i) . p_i^o$. D'où $\bigwedge v \leq p_i . e_i . p_i^o = p_i . p_i^o$. L'inégalité précédente étant vérifiée pour tout $i \in I$, il vient $\bigwedge v \leq \bigwedge p_i . p_i^o = e$, et par suite $\bigwedge v = e$.

3.4. CATEGORIE DES RELATIONS UNIFORMEMENT CONTINUES.

Désignons par $U(C)$ l'ensemble des relations uniformément continues associé à $(C^{\bullet}, \leq, \circ)$. Si $((U,e), r, (U', e')) \in U(C)$, posons :

$$\beta^u((U,e), r, (U', e')) = ((U,e), \beta(r), (U,e))$$

et $$\alpha^u((U,e), r, (U', e')) = (U', e'), \alpha(r), (U', e')).$$

Il est clair que les applications α^u et β^u sont deux rétractions de $U(C)$ sur l'ensemble $U(C)_o$ des relations uniformément continues de la forme $((U,e), e, (U,e))$. Si $((V,f), p, (V', f'))$ est un autre élément de $U(C)$, nous posons

$$((U,e), r, (U', e')) \circ ((V,f), p, (V', f')) = ((U,e), r.p, (V', f')),$$
si, et seulement si, $(U', e') = (V, f)$.

On vérifie aisément que, *munie de cette loi de composition, $U(C)$ est une catégorie, dont α^u et β^u sont les applications source et but.*

Si nous désignons par $U(C)^f$ le sous-ensemble des triplets $((U,e), r, (U', e'))$ de $U(C)$ lorsque r est de plus une fonctionnelle, $U(C)^f$ *est une sous-catégorie de* $U(C)^o$. Afin de montrer que le produit de structures uniformes est un produit dans cette sous-catégorie, nous allons établir les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 17. *Soient : une famille d'unités (e_i), un produit naturalisé $((p_i), e)$ dans $(C^{\bullet}, \leq, \circ)$ de la famille (e_i), une unité e' et, pour tout $i \in I$, une fonctionnelle f_i dans $Hom(e', e_i)$. Si f est la fonctionnelle dans $Hom(e', e)$ telle que, pour tout $i \in I$, on ait $f.p_i = f_i$, alors pour tout ensemble $I_1 \subset I$ et pour tout $v' \in Hom(e', e')$, on a*

$$f^o . v' . f \leq \bigwedge (p_i . f_i^o . v' . f_i . p_i^o).$$

Puisque l'on a $f_i = f.p_i$, il vient $f_i . p_i^o = f.(p_i . p_i^o)$. Les relations

$$p_i . p_i^o \geq \beta(p_i) = e = \alpha(f)$$

entraînent

$$f.(p_i . p_i^o) \geq f, \text{ d'où } f_i . p_i^o \geq f \text{ et } p_i . f_i^o \geq f^o.$$

Par conséquent $f^o . v' . f \leq p_i . f_i^o . v' . f_i . p_i^o$ pour tout $i \in I_1$, d'où

$$f^o . v' . f \leq \bigwedge (p_i . f_i^o . v' . f_i . p_i^o).$$

PROPOSITION 18. *Si, avec les conditions de la proposition 17, on a de plus une structure uniforme (U_i, e_i), et si (U, e) est un produit de la famille $((U_i, e_i))$, si enfin le triplet $((U', e'), f_i, (U_i, e_i))$ est uniformément continu, alors $((U', e'), f, (U, e))$ est uniformément continu.*

Soit en effet $v \in U$. Il existe une famille finie (v_i) telle que $v_i \in U_i$ et $v \geq \bigwedge p_i . v_i . p_i^o$. Comme $((U', e'), f_i, (U_i, e_i))$ est uniformément continu, il existe un $v_i' \in U'$ tel que $f_i^o . v_i' . f \leq v_i$. Soit alors $v' = \bigwedge v_i'$. On a

$$v' \in U' \quad \text{et} \quad f^o . v' . f \leq \bigwedge (p_i . f_i^o . v' . f_i . p_i^o)$$

d'après la proposition 17. Or on a $v' \leq v_i'$, et par suite

$$f^o . v' . f \leq \bigwedge (p_i . f_i^o . v_i' . f_i . p_i^o) \leq p_i . v_i . p_i^o.$$

L'inégalité précédente étant vérifiée pour chacun des indices i considérés, il vient

$$f^o . v' . f \leq \bigwedge p_i . v_i . p_i^o \leq v,$$

ce qui achève la démonstration.

Posons alors d'une manière générale $\omega(U, e) = ((U, e), e, (U, e))$ si (U, e) est une structure uniforme, et soit (U_i, e_i) une famille de structures uniformes telle que (U, e) soit un produit de $((U_i, e_i))$. Posons de plus $\theta(p_i) = ((U, e), p_i, (U_i, e_i))$, et montrons la proposition suivante:

PROPOSITION 19. *Si (U, e) est une structure uniforme produit de la famille (U_i, e_i), alors $((\theta(p_i)), \omega(U, e))$ est un produit naturalisé de la famille $(\omega(U_i, e_i))$ dans la catégorie duale de $U(C)^f$.*

Il est clair que $\theta(p_i) \in Hom(\omega(U, e), \omega(U_i, e_i))$. Soit F_i dans $Hom(\omega(U', e'), \omega(U_i, e_i))$ pour tout $i \in I$. Cela revient à dire qu'il existe pour tout $i \in I$ une fonctionnelle f_i dans $Hom(e', e_i)$ telle que $F_i = ((U', e'), f_i, (U_i, e_i))$ soit uniformément continue. Soit alors f une fonctionnelle dans $Hom(e', e)$ telle que $f . p_i = f_i$ pour tout $i \in I$. D'après la proposition 18, le triplet $F = ((U', e')), f, (U, e))$ est uniformément continu On a donc $F \in U(C)^f$, et il est clair que $F . \theta(p_i) = F_i$ pour tout $i \in I$. L'unicité de F provient de l'unicité de la fonctionnelle f telle que $f.p_i = f_i$.

4. Structures préuniformes dans une catégorie à involution *inf*-demi-réticulée.

Soit encore $(C^{\bullet}, \leq, \circ)$ une catégorie à involution *inf*-demi-réticulée.

DEFINITION 10. Si r est un élément de $\bar{C}$ et U une partie de C, nous dirons que le couple (U, r) est *une structure préuniforme* si :

(PU_1) r est bimultifonctionnelle,

(PU_2) U est un filtre dans $Hom(r, r)$,

(PU_3) $r \leq v$ pour tout $v \in U$,

(PU_4) Pour tout $v \in U$, il existe un $w \in U$ tel que $w.w^o.w \leq v$.

NOTATIONS ET REMARQUES. Les éléments $v \in U$ seront appelés des *entourages de* r. On déduit de l'axiome PU_4, par récurrence, le principe plus général suivant : Pour tout $v \in U$, et pour tout entier impair n, il existe $w \in U$ tel que $w.w^o.w.w^o \dots w \leq v$, où le composé écrit est formé de n termes.

DEFINITION 11. Lorsque B est une partie de C, et $r \in C$, nous dirons que le couple (B, r) est un *système fondamental d'entourages d'une structure préuniforme* lorsque les axiomes PU_1, PU_3 et PU_4 sont vérifiés et que de plus :

(PU'_2) U est une base de filtre dans $Hom(r, r)$.

Il est clair que, si (U, r) est une structure préuniforme et si B est une base du filtre U dans $Hom(r, r)$, le couple (B, r) est un système fondamental d'une structure préuniforme. Inversement, si (B, r) est un tel système et si U est le filtre engendré par B dans $Hom(r, r)$, alors (U, r) est une structure préuniforme.

On vérifie aisément que toute structure uniforme (U, e) est en particulier une structure préuniforme.

PROPOSITION 20. *Si (U, r) est une structure préuniforme et si U^o désigne l'ensemble des v^o lorsque v parcourt U, alors (U^o, r^o) est une structure préuniforme.*

Vérifions respectivement PU_1, PU_2, PU_3 et PU_4. Il est clair que r^o est bimultifonctionnelle. Montrons que U^o est un filtre dans $Hom(r^o, r^o)$. Soient v^o et $w^o \in U^o$. Il existe un $u \in U$ tel que $u \leq v \wedge w$, et par suite

$$u^o \leq (v \wedge w)^o = v^o \wedge w^o.$$

Si, pour un $x \in Hom(r^o, r^o)$, on a $x \geq v^o$ pour un $v \in U$, il vient : $x^o \geq v$ et $x^o \in Hom(r, r)$, d'où $x^o \in U$, et $x \in U^o$. Soit $v^o \in U^o$; comme $r \leq v$, on trouve $r^o \leq v^o$. De même il existe un $w \in U$ tel que $w.w^o.w \leq v$. Par suite $w^o.w.w^o \leq v^o$. Ce qui revient à dire que $(w^o).(w^o)^o.(w^o) \leq v^o$.

4.1. *STRUCTURES UNIFORMES INDUITES PAR UNE STRUCTURE PREUNIFORME.*

Nous allons voir comment une structure préuniforme permet de construire deux structures uniformes.

PROPOSITION 21. *Si (U, r) est une structure préuniforme, l'ensemble des $v.v^o$, lorsque v parcourt U, constitue un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme (que nous notons $(*U, \beta(r))$).*

Comme l'application $v \to v.v^o$ est isotone de $Hom(r, r)$ dans $Hom(\beta(r), \beta(r))$, les $v.v^o$ forment donc une base de filtre dans $Hom(\beta(r), \beta(r))$. Vérifions U'_2. Pour tout $v \in U$, on a $r \leq v$, et par suite $r.r^o \leq v.v^o$. Comme $\beta(r) \leq r.r^o$, il vient $\beta(r) \leq v.v^o$. Vérifions U'_3. Pour un $v.v^o$ donné on a $(v.v^o)^o = (v^o)^o.v^o = v.v^o$. Vérifions U'_4. Pour un $v.v^o$ donné, il existe un $w \in U$ tel que $w.w^o.w \leq v$. Comme

$$w = \beta(r).w \leq w.w^o.w \leq v,$$

on obtient

$$w^o \leq v^o, \text{ d'où } v.w^o \leq v.v^o,$$

c'est-à-dire $(w.w^o).(w.w^o) \leq v.v^o$.

COROLLAIRE. Appliquons la proposition 21 à la structure préuniforme (U^o, r^o). Nous obtenons le résultat suivant : *L'ensemble des $v^o.v$ lorsque v parcourt U, est un système fondamental d'une structure uniforme* (que nous notons $(U^*, \alpha(r))$). Il est clair que l'*on a les formules suivantes :* $*(U^o) = U^*$ et $(U^o)^* = *U$.

PROPOSITION 22. *Si (U, r) et (V, r) sont deux structures préuniformes, et si $*U = *V$, alors $U = V$.*

Soit en effet $v \in U$. Il existe un $w \in U$ tel que $w . w^o . w \leq v$. Or $w . w^o \in *U = *V$. Il existe donc un $x \in V$ tel que $w . w^o \geq x . x^o$. Les relations

$$x . (x^o . w) = (x . x^o) . w \leq v \text{ et } x = x . \alpha(r) \leq x . (r^o . r) \leq x . (x^o . w)$$

entraînent $x \leq v$, d'où $v \in V$ et $U \subset V$. On montre de même que $V \subset U$; par suite $U = V$.

4.2. CATEGORIE DES STRUCTURES PREUNIFORMES.

Nous désignerons par $PU(C)$ l'ensemble des structures préuniformes associé à $(C^{\bullet}, \leq, \circ)$. Pour tout $(U, r) \in PU(C)$, nous posons:

$$\beta^p(U, r) = (*U, \beta(r)) \text{ et } \alpha^p(U, r) = (U^*, \alpha(r)).$$

D'après la proposition 19, $\beta^p(U, r)$ et $\alpha^p(U, r)$ sont deux structures uniformes.

PROPOSITION 23. *Les applications*

$$(U, r) \to \beta^p(U, r) \text{ et } (U, r) \to \alpha^p(U, r)$$

sont deux rétractions de $PU(C)$ sur l'ensemble $PU(C)_0$ des structures uniformes.

Soit en effet (U, e) une structure uniforme. Montrons que $\beta^p(U, e) = (U, e)$. Soit $v \in U$. On sait que (Cf. § 3, Axiome U_5), pour un $w \in U$, on a $w . w^o \leq v$, c'est-à-dire $v \in *U$. Inversement si $x \in *U$, il existe un $v \in U$ tel que $x \geq v . v^o$. En particulier $x \geq v$, et par suite $x \in U$. On a donc $\beta^p(U, e) = (U, e)$. On montre de même que $\alpha^p(U, e) = (U, e)$, ce qui achève la démonstration.

Considérons deux structures préuniformes (U, r) et (D, p) telles que $\alpha(r) = \beta(p)$. Pour tout $v \in U$ et pour tout $q \in D$, on a $\alpha(v) = \beta(q)$, et par conséquent $v . q$ est défini. Si l'on désigne par $U . D$ l'ensemble des $v . q$, on montre que $U . D$ est une base de filtre dans $Hom(r . p, r . p)$. Nous noterons $\overline{U . D}$ le filtre engendré par $U . D$ dans $Hom(r . p, r . p)$, et nous dirons que (U, r) et (D, p) sont *composables* si, et seulement si,

$(U^*, \alpha(r)) = (^*D, \beta(p))$, en écrivant alors $(U, r) \circ (D, p) = (\overline{U.D}, r.p)$.

PROPOSITION 24. *Si $(U, r) \circ (D, p)$ est défini, alors $(\overline{U.D}, r.p)$ est une structure préuniforme.*

L'axiome PU_1 est vérifié puisque le composé de deux bimultifonctionnelles est une multifonctionnelle. L'axiome PU_2 est vérifié ci-dessus. L'axiome PU_3 est aussi vérifié, car, pour tout $x \in \overline{U.D}$, il existe un $v \in U$ et un $q \in D$ tel que $x \geq v.q$. Comme $v \geq r$ et $q \geq p$, il vient $x \geq v.q \geq r.p$. Vérifions alors l'axiome PU_4. Soit en effet un $v.q$ donné. Il existe un

(1) $\qquad w \in U$ tel que $w.w^o.w \leq v$.

Il existe de même un

(2) $\qquad z \in D$ tel que $z.z^o.z \leq q$.

Or $w^o.w \in U^* = {}^*D$. Par conséquent il existe un

(3) $\qquad m \in D$ tel que $m.m^o \leq w^o.w$.

De même il existe un

(4) $\qquad k \in U$ tel que $k^o.k \leq z.z^o$.

Soit $a \in U$ tel que $a \leq w \wedge k$ et $b \in D$ tel que $b \leq z \wedge m$, et soit $j = (a.b).(a.b)^o.(a.b)$. Il suffit de montrer que $j \leq v.q$. A cet effet $j = a.(b.b^o).(a^o.a).b$; comme $b \leq m$ et $a \leq k$, il vient

$$j \leq a.(m.m^o).(k^o.k).b.$$

Les relations (3) et (4) donnent alors $j \leq a.(w^o.w).(z.z^o).b$. Puisque $a \leq w$ et $b \leq z$, il vient :

$$j \leq w.(w^o.w).(z.z^o).z = (w.w^o.w).(z.z^o.z).$$

Des relations (1) et (2), on déduit $j \leq v.q$.

PROPOSITION 25. *On a*

$$\alpha^p((U, r) \circ (D, p)) = \alpha^p(D, p) \text{ et } \beta^p((U, r) \circ (D, p)) = \beta^p(U, r).$$

Démontrons par exemple la première formule annoncée. Ce qui revient à dire que $(\overline{U.D})^* = D^*$.

Soit en effet $x \in (\overline{U.D})^*$. Il existe un $v \in U$ et un $q \in D$ tels que

$(v.q)^o.(v.q) \leq x$, d'où $q^o.(v^o.v).q \leq x$. Comme $v^o.v \in U^* = {}^*D$, il existe $z \in D$ tel que $v^o.v \geq z.z^o$. D'où

$$q^o.(z.z^o).q \leq x,$$

ou encore $(q^o.z).(z^o.q) \leq x$. Soit alors $m \in D$ tel que $m \leq q \wedge z$. On a $(m^o.m).(m^o.m) \leq x$; a fortiori $m^o.m \leq x$, et par suite $x \in D^*$.

Inversement, soit $x \in D^*$. Il existe un $q \in D$ tel que $q^o.q \leq x$. Mais il existe un $z \in D$ tel que $(z^o.z)^2 \leq q^o.q$, c'est-à-dire

$$z^o.(z.z^o).z \leq x.$$

Puisque $z.z^o \in {}^*D = U^*$, il existe $v \in U$ tel que $v^o.v \leq z.z^o$, d'où

$$z^o.(v^o.v).z \leq q^o.q \leq x.$$

Par conséquent $(v.z)^o.(v.z) \leq x$, et $x \in (\overline{U.D})^*$.

PROPOSITION 26. *On a*

$$(U,r) \circ \alpha^p(U,r) = (U,r) \text{ et } \beta^p(U,r) \circ (U,r) = (U,r).$$

Montrons par exemple la première formule, c'est-à-dire $\overline{U.U^*} = U$. Soit en effet $x \in \overline{U.U^*}$. Il existe un $v \in U$ et un $w \in U$ tels que $v.(w^o.w) \leq x$. Comme $v \leq v.(w^o.w)$, il vient $v \leq x$, et par suite $x \in U$. Inversement, si $v \in U$, il existe un $w \in U$ tel que $w.w^o.w \leq v$, et par suite $w.(w^o.w) \leq v$, ce qui revient à dire que $v \in \overline{U.U^*}$. Ceci achève la démonstration.

Les propositions 24, 25 et 26 donnent le théorème suivant :

THEOREME 2. *L'ensemble $PU(C)$ des structures préuniformes associé à une catégorie à involution inf-demi-réticulée est une catégorie dont l'ensemble des unités est l'ensemble des structures uniformes.*

REMARQUE. Si, dans $PU(C)$, on pose

$$(U,r) \leq (U',r') \text{ si } U \subset U' \text{ et } r \leq r',$$

et

$$(U,r)^o = (U^o, r^o),$$

on montre que $(PU(C), \leq, \circ)$ *est une catégorie à involution*, c'est-à-dire vérifie les axiomes I_1 et I_2.

4.3. *TOPOLOGIE ASSOCIEE A UNE STRUCTURE PREUNIFORME.*

Soit (U, r) une structure préuniforme, $(^*U, \beta(r))$ et $(U^*, \alpha(r))$ les deux structures uniformes déduites et $T(^*U, U^*)$ la topologie dans $Hom(r, r)$ associée aux deux structures uniformes précitées (Cf. §3-1).

PROPOSITION 27. *Chaque entourage de r contient un entourage fermé.*

Soit en effet $v \in U$. Il existe un $w \in U$ tel que $w . w^o . w . w^o . w \leq v$. Or $w . w^o \in {}^*U$ et $w^o . w \in U^*$, et par conséquent

$$w \leq \bar{w} \leq (w . w^o) . w . (w^o . w) \leq v.$$

D'après l'axiome PU_1, on a $\bar{w} \in U$. Comme $\bar{w}$ est un fermé, on obtient le résultat à montrer.

DEFINITION 13. Nous dirons que la *structure préuniforme* (U, r) *est séparée si* $\bar{r} = r$.

PROPOSITION 28. *La structure préuniforme* (U, r) *est séparée si, et seulement si,* $\bigwedge v = r$ *lorsque* v *parcourt* U.

Montrons que, de toute manière, on a $\bigwedge v = \bar{r}$. D'après la proposition 27, l'ensemble des entourages fermés est une base du filtre U dans $Hom(r, r)$. Par conséquent $\bigwedge v$ est égale à la borne inférieure des v fermés, qui est donc un fermé. Comme $\bigwedge v \geq r$, il vient $\bigwedge v \geq \bar{r}$. Inversement pour tout $v \in U$, on peut écrire $(r . r^o) . (r . r^o) . v \geq v$, et par suite, pour tout $w \in U$, on peut écrire que $(w . w^o) . (r . v^o) . v \geq v$, c'est-à-dire $v \leq (w . w^o) . r . (v^o . v)$, Ce qui entraîne que $\bigwedge v \leq \bigwedge (w . w^o) . r . (v^o . v)$ lorsque v et w parcourent U. Comme les $w . w^o$ et $v^o . v$ forment respectivement deux bases des filtres $^*U$ et U^*, il vient $\bigwedge v \leq \bar{r}$.

Ceci dit si (U, r) est une structure préuniforme séparée, il vient $\bigwedge v = \bar{r} = r$. Inversement si $\bigwedge v = r$, alors $\bar{r} = r$.

4.4. *BISTRUCTURE UNIFORME PREUNIFORMISABLE.*

Nous allons montrer à quelle condition, étant donnée une bistructure uniforme (c'est-à-dire un triplet $((X, e), r, (X', e'))$ formé par deux structures uniformes (X, e) et (X', e') et un élément r dans $Hom(e, e')$), il existe une structure préuniforme (U, r) telle que $^*U = X$ et $U^* = X'$.

Nous commencerons par étudier la question suivante : Si (X, e) est une structure uniforme et r une bimultifonctionnelle telle que $\beta(r) = e$, à quelle condition existe-t-il une structure préuniforme (U, r) telle que $*U = X$?

PROPOSITION 29. *Si (X, e) est une structure uniforme, et r une bimultifonctionnelle telle que $\beta(r) = e$, il existe une et une seule structure préuniforme (U, r) telle que $*U = X$ si, et seulement si, $r.r^o \leq x$ pour tout $x \in X$.*

S'il existe une structure préuniforme (U, r) telle que $*U = X$, on a, pour tout $x \in X$, un $v \in U$ tel que $x \geq v.v^o$. Comme $r \leq v$, on a donc $x \geq r.r^o$.

Inversement, si la dernière inégalité est vérifiée pour tout $x \in X$, montrons que le filtre $\overline{X.r}$ engendré par $X.r$ dans $Hom(r, r)$ répond à la question. Le couple $(\overline{X.r}, r)$ est une structure préuniforme, car pour tout $v \in \overline{X.r}$, il existe un $x \in X$ tel que $v \geq x.r$. Comme $x \geq e = \beta(r)$, il vient $v \geq r$. Et de même il existe un entourage symétrique s de e dans X tel que $s^4 \leq x$. On a

$$(s.r).(s.r)^o.(s.r) = s.r.r^o.s^o.s.r =$$

$$= s.(r.r^o).s.s.r \leq s.s.s.s.r = s^4.r \leq x.r \leq v.$$

Montrons que $*(\overline{X.r}) = X$. Soit en effet $x \in X$. Il existe $s \in X$ qui est symétrique et tel que $s^3 \leq x$. On a alors $s.r \in \overline{X.r}$ et

$$(s.r).(s.r)^o = s.r.r^o.s^o = s.(r.r^o).s \leq s.s\ s = s^3 \leq x.$$

Par suite $x \in *(\overline{X.r})$. Inversement soit $a \in *(\overline{X.r})$. Il existe un $x \in X$ tel que $(x.r).(x.r)^o \leq a$. D'où

$$x \leq x.r.r^o.x^o = (x.r).(x.r)^o \leq a.$$

Par conséquent $a \in X$.

Enfin l'unicité de la structure préuniforme (U, r) telle que $*U = X$ provient de la proposition 22.

PROPOSITION 30. *Dans les mêmes conditions qu'en 27, la structure uniforme $(U^*, \alpha(r))$ est identique à la structure uniforme (X', e') définie par la proposition 9, § 3-2, où $e' = \alpha(r)$.*

Soit en effet $x' \in X'$. Il existe $x \in X$ tel que $x' \geq r^o . x . r$. Mais il existe un $y \in X$ tel que $y^o . y \leq x$. Or $y . r \in X . r$, et par définition $(y . r)^o . (y . r) \in (\overline{X . r})^*$, et l'on a de plus

$$(y . r)^o . (y . r) = r^o . y^o . y . r \leq r^o . x . r \leq x' .$$

Ce qui prouve que $x' \in (\overline{X . r})^*$. Inversement soit $a' \in (\overline{X . r})^*$. Il existe un $x \in X$ tel que

$$a' \geq (x . r)^o . (x . r) = r^o . x^o . x . r \geq r^o . x . r .$$

Par conséquent $a' \in X'$.

DEFINITION 14. Nous dirons que la bistructure uniforme $((X, e), r, (X', e'))$ est *préuniformisable* s'il existe une structure préuniforme (U, r) telle que $*U = X$ et $U* = X'$.

PROPOSITION 31. *Si $((X, e), r, (X', e'))$ est une bistructure préuniformisable, alors les conditions suivantes sont vérifiées :*

p-i) $r . r^o \leq x$ *pour tout* $x \in X$.

p-ii) $r^o . r \leq x'$ *pour tout* $x' \in X'$.

p-iii) $r^o . x . r \in X'$ *pour tout* $x \in X$.

p-iiii) $r . x' . r^o \in X$ *pour tout* $x' \in X'$.

Soit en effet (U, r) une structure préuniforme telle que $*U = X$ et $U* = X'$. La première relation et la proposition 29 montrent que $U = \overline{X . r}$. Les axiomes *p-i* et *p-iii* sont alors vérifiés d'après la proposition 30. On montre de même que les axiomes *p-ii* et *p-iiii* sont aussi vérifiés.

PROPOSITION 32. *Si les conditions p-i à p-iiii sont vérifiés, alors la bistructure uniforme $((X, e), r, (X', e'))$ est préuniformisable.*

Soit en effet la structure préuniforme $(\overline{X . r}, r)$ dont l'existence est assurée par la proposition 29. Il suffit de montrer que $(\overline{X . r})* = X'$. Soit à cet effet $v' \in X'$. Il existe un entourage symétrique w' de e' tel que $w'^5 \leq v'$. Or $r . w' . r^o \in X$, et l'on a de plus $(r . w' . r^o) . r \in \overline{X . r}$. Par suite

$$(r . w' . r^o . r)^o . (r . w' . r^o . r) = r^o . r . w'^o . r^o . r . w' . r^o . r \leq w' . w' . w' . w' . w' =$$
$$= w'^5 \leq v' .$$

Ce qui entraîne $v' \in (\overline{X . r})^*$. Soit inversement $v'' \in (\overline{X . r})^*$. Il existe un

$v \in X$ tel que $(v.r)^o.(v.r) \leq v''$. D'où

$$r^o.v.r \leq r^o.v^o.v.r \leq v''.$$

Comme $r^o.v.r \in X'$, il vient $v'' \in X'$.

COROLLAIRE. *Une relation uniformément continue* $((X,e),r,(X',e'))$ *est préuniformisable si* $((X',e'),r^o,(X,e))$ *est uniformément continue, et si de plus les conditions* p-i *et* p-iii *sont vérifiées.*

En effet vérifions par exemple la condition p-iii. Soit un $x \in X$. Il existe un $x' \in X'$ tel que $r.x'.r^o \leq x$. Par suite

$$r^o.(r.x'.r^o).r \leq r^o.x.r \text{ et } x' \leq r^o.x.r,$$

ce qui prouve que $r^o.x.r \in X'$.

On montre aisément que, si $((X,e),r,(X',e'))$ est préuniformisable, alors les deux triplets $((X,e),r,(X',e'))$ et $((X',e'),r^o,(X,e))$ sont uniformément continus.

4.5. *BIRELATION PREUNIFORMEMENT CONTINUE.*

Soient (U,r) et (U',r') deux structures uniformes, un élément f de $Hom(\beta(r),\beta(r'))$ et f' un élément de $Hom(\alpha(r),\alpha(r'))$.

DEFINITION 15. Nous dirons que le triplet $((U,r),(f,f'),(U',r'))$ est *préuniformément continu* si :

- On a $f^o.r.f' \leq r'$,
- Pour tout $v' \in U'$, il existe un $v \in U$ tel que $f^o.v.f' \leq v'$.

PROPOSITION 33. *Si* $((U,r),(f,f'),(U',r'))$ *est préuniformément continu et si de plus*

$$f.f^o \geq \beta(f) \text{ et } f'.f'^o \geq \beta(f'),$$

alors $((*U,\beta(r)),f,(*U',\beta(r')))$ *et* $((U^*,\alpha(r)),f',(U'^*,\alpha(r')))$ *sont uniformément continues.*

Montrons par exemple le premier résultat. Soit en effet $b' \in *U'$. Il existe un $v' \in U'$ tel que $v'.v'^o \leq b'$. Mais il existe un $v \in U$ tel que $f^o.v.f' \leq v'$. Montrons que $f^o.(v.v^o).f \leq b'$. On a en effet

$$f^o.(v.v^o).f = (f^o.v).(v^o.f) \leq (f^o.v).(f'.f'^o).(v^o.f) =$$
$$= (f^o.v.f').(f^o.v.f')^o \leq v'.v'^o \leq b'.$$

PROPOSITION 34. *Si*

$$((^*U, \beta(r)), f, (^*U', \beta(r'))) \text{ et } ((U^*, \alpha(r)), f', (U'^*, \alpha(r')))$$

sont uniformément continues, et si de plus $f.f^o \geq \beta(f)$, $f'.f'^o \geq \beta(f')$ *et* $f^o.r.f' \leq r'$, *alors* $((U,r),(f,f'),(U',r'))$ *est préuniformément continue.*

Soit en effet $z \in U'$. Il existe un $q \in U'$ tel que $q.q^o.q.q^o.q \leq z$. Or $q.q^o$ et $q^o.q$ sont respectivement deux éléments de $^*U'$ et U'^*. Il existe par conséquent $a \in {}^*U$ et $b \in U^*$ tels que $f^o.a.f \leq q.q^o$ et $f'^o.b.f' \leq q^o.q$. Soient alors $v \in U$ et $w \in U$ tels que $v.v^o \leq a$ et $w^o.w \leq b$, et $y = v \wedge w$. Considérons l'élément t défini par $t = y.y^o.r.y^o.y$. Il est clair que $t \geq y$ et par suite $t \in U$. Il suffit alors de prouver que $f^o.t.f' \leq z$. Or on a

$$\begin{aligned} f^o.t.f' &= (f^o.y.y^o).r.(y^o.y.f') \leq (f^o.y.y^o).(f.f^o).r.(f'.f'^o).(y^o.y.f') \\ &= (f^o.(y.y^o).f).(f^o.r.f').(f'^o.(y^o.y).f') \leq \\ &\quad (f^o.(v.v^o).f).r'.(f'^o.(w^o.w).f') \leq (f^o.a.f).r'.(f'^o.b.f') \leq \\ &\quad q.q^o.r'.q^o.q \leq q.q^o.q.q^o.q \leq z; \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Comme pour les propositions 9 et 10, §3-2, cherchons, lorsque (U,r) est une structure préuniforme donnée, r' une bimultifonctionnelle, $f \in Hom(\beta(r), \beta(r'))$ et $f' \in Hom(\alpha(r), \alpha(r'))$, une structure préuniforme (U', r') telle que $((U,r),(f,f'),(U',r'))$ soit préuniformément continue.

PROPOSITION 35. *Soit* (U,r) *une structure préuniforme,* r' *une bimultifonctionnelle,* $f \in Hom(\beta(r), \beta(r'))$ *et* $f' \in Hom(\alpha(r), \alpha(r'))$ *vérifiant les conditions :*

$$f^o.r.f' = r', \quad f.f^o \leq v.v^o \text{ et } v^o.v \geq f'.f'^o \text{ pour tout } v \in U.$$

L'ensemble B' *des* $f^o.v.f'$ *lorsque* v *parcourt* U *est tel que* (B', r') *soit un système fondamental d'une structure préuniforme* (U', r') *telle que* $((U,r),(f,f'),(U',r'))$ *soit préuniformément continue. Pour toute structure préuniforme* (U'_1, r') *telle que* $((U,r),(f,f'),(U'_1,r'))$ *soit préuniformément continue, on a* $U'_1 \subset U'$.

Il est clair que B' est une base de filtre dans $Hom(r', r')$. Pour tout $b' \in B'$, on a $b' = f^o . v . f'$ pour un $v \in U$ et, comme $v \geq r$, il vient $b' \geq f^o . r . f' = r'$. Il existe un $w \in U$ tel que $w . w^o . w . w^o . w . w^o . w \leq v$. Soit alors $t' = f^o . w . f'$. Montrons que $t' . t'^o . t' \leq b'$. On a en effet

$$(f^o . w . f') . (f^o . w . f')^o . (f^o . w . f') = f^o . w . (f' . f'^o) . w^o . (f . f^o) . w . f' \leq$$

$$f^o . w . (w^o . w) . w^o . (w . w^o) . w . f' \leq f^o . v . f' = b'.$$

Il est clair que $((U, r), (f, f'), (U', r'))$ est préuniformément continue. Si (U'_1, r') est une structure préuniforme telle que $((U,r), (f,f'),(U'_1,r'))$ soit préuniformément continue, montrons que $U'_1 \subset U'$. Soit en effet $v'_1 \in U'_1$. Il existe un $v \in U$ tel que $f^o . v . f' \leq v'_1$. Par suite $v'_1 \in U'$.

PROPOSITION 36. *Soit (U', r') une structure préuniforme, r une bimultifonctionnelle, f et f' deux fonctionnelles dans $Hom(\beta(r), \beta(r'))$ et $Hom(\alpha(r), \alpha(r'))$, respectivement, telles que $f . r' . f'^o \geq r$. L'ensemble B des $f . v' . f'^o$, lorsque les v' parcourent U', est tel que (B, r) soit un système fondamental d'une structure préuniforme (U, r). Le triplet $((U,r), (f, f'), (U', r'))$ est préuniformément continue. Pour toute structure préuniforme (U_1, r) telle que $((U_1, r), (f, f'), (U', r'))$ soit préuniformément continue, on a $U \subset U_1$.*

On montre comme pour la proposition 35 que (U,r) est une structure préuniforme. Montrons que $((U, r), (f, f'), (U', r'))$ est préuniformément continue. Soit en effet $v' \in U'$. On a $f . v' . f'^o \in U$, et

$$f^o . (f . v' . f'^o) . f' = (f^o . f) . v' (f'^o . f') \leq v'.$$

Soit (U_1,r) une structure préuniforme telle que $((U_1,r), (f,f'),(U', r'))$ soit préuniformément continue. Montrons que $U \subset U_1$. Soit en effet $v \in U$. Il existe un $v' \in U'$ tel que $f . v' . f'^o \leq v$. Mais il existe un $v_1 \in U_1$ tel que $f^o . v_1 . f' \leq v'$. Par suite

$$f . (f^o . v_1 . f') . f'^o \leq f . v' . f'^o \leq v.$$

Or $f . f^o \geq \beta(f)$ et $f' . f'^o \geq \beta(f')$. D'où $v_1 \leq f . (f^o . v_1 . f') . f'^o \leq v$, et par suite $v \in U_1$; ce qui achève la démonstration.

Comme conséquence des propositions 35 et 36 nous allons, en nous donnant deux multifonctionnelles r et r', établir une correspondance entre certaines structures préuniformes (U, r) et (U', r'), lorsque sont données de plus deux fonctionnelles f et f' respectivement dans $Hom(\beta(r), \beta(r))$ et $Hom(\alpha(r), \alpha(r))$. Nous noterons $f^o . U' . f'$ le filtre U dans $Hom(r, r')$ défini par la proposition 36, $f . U . f'^o$ le filtre U' dans $Hom(r', r')$ défini par la proposition 35, et nous supposons que $f^o . r . f' = r'$.

PROPOSITION 37. *Sur l'ensemble des structures uniformes* (U, r) *telles que, pour tout* $v \in U$, *on ait* $v . v^o \geq f . f^o$ *et* $v^o . v \geq f' . f'^o$, *l'application* $(U, r) \to (f^o . U . f', r')$ *est injective.*

Il suffit de prouver que $f.(f^o . U . f').f'^o = U$. Soit à cet effet $v \in U$. Il existe un $w \in U$ tel que $w . w^o . w . w^o . w \leq v$. On a

$$(f . f^o) . w . (f' . f'^o) \leq w . w^o . w . w^o . w \leq v.$$

Ce qui revient à dire que

$$v \in f.(f^o . U . f').f'^o .$$

Inversement si $v \in f.(f^o . U . f').f'^o$, il existe un $w \in U$ tel que $v \geq f . f^o . w . f' . f'^o$. Comme $f . f^o . w . f' . f'^o \geq w$, il vient $v \geq w$ et par suite $v \in U$; ce qui achève la démonstration.

On montre de même que :

PROPOSITION 38. *L'application définie par la proposition 37 est surjective.*

On obtient alors le théorème suivant :

THEOREME 3. *Soient deux bimultifonctionnelles* r *et* r', *deux fonctionnelles* f *et* f' *telles que* $f^o . r . f' = r'$. *L'ensemble des structures préuniformes* (U, r) *telles que* $f . f^o \leq v . v^o$ *et* $f' . f'^o \leq v^o . v$, *pour tout* $v \in U$, *est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des structures préuniformes* (U', r').

4.6. PRODUIT DE STRUCTURES PREUNIFORMES.

Soient une famille $((U_i, r_i))$ de structures préuniformes et un produit $((p_i), (p'_i), r)$ de la famille (r_i), l'ensemble d'indices étant I.

DEFINITION 16. La structure préuniforme (U, r) est un *produit des* (U_i, r_i) si, pour tout $i \in I$, le triplet $((U, r), (p_i, p'_i), (U_i, r_i))$ est préuniformément continu et si, pour toute structure préuniforme $(\hat{U}, r)$ telle que $((\hat{U}, r), (p_i, p'_i), (U_i, r_i))$ soit préuniformément continu pour tout $i \in I$, alors $U \subset \hat{U}$.

Nous allons montrer l'existence et l'unicité de ce produit. Démontrons à cet effet les propositions suivantes :

PROPOSITION 39. *Soit $((X_i, r))$ une famille de structures préuniformes, et soit X la borne supérieure des filtres X_i dans $Hom(r, r)$. Le couple (X, r) est une structure préuniforme.*

Vérifions respectivement PU_1, PU_2, PU_3 et PU_4. Par construction X est un filtre dans $Hom(r, r)$ et par hypothèse r est une bimultifonctionnelle. Soit $v \in X$. Il existe une famille (v_i) telle que $v_i \in X_i$ et $v \geq \bigwedge v_i$. Comme, pour tout $i \in I$, on a $v_i \geq r$, il vient $v \geq r$. Il existe de même pour chacun des indices i considérés un $w_i \in X_i$ tel que $w_i . w_i^o . w_i \leq v_i$. On a alors

$$\bigwedge w_i \in X \text{ et } (\bigwedge w_i).(\bigwedge w_i)^o.(\bigwedge w_i) =$$
$$= (\bigwedge w_i).(\bigwedge w_i^o).(\bigwedge w_i) \leq \bigwedge (w_i . w_i^o . w_i) \leq \bigwedge v_i \leq v.$$

PROPOSITION 40. *Soit $((U_i, r_i))$ une famille de structures préuniformes, et $((p_i), (p'_i), r)$ un produit de la famille (r_i). La borne supérieure U des filtres $p_i . U_i . p_i'^o$ dans $Hom(r, r)$ est telle que (U, r) soit le produit de la famille $((U_i, r_i))$.*

Remarquons d'abord que les hypothèses de la proposition 36 sont vérifiées, à savoir que $p_i . r_i . p_i'^o \geq r = \bigwedge p_i . r_i . p_i'^o$ (Cf. § 2, définition 4), et par suite que $(p_i . U_i . p_i'^o, r)$ pour tout $i \in I$ est une structure préuniforme. Soit alors U la borne supérieure des filtres $p_i . U_i . p_i'^o$ dans $Hom(r,r)$. D'après la proposition 39, le couple (U, r) est une structure préuniforme. D'après la proposition 36, le triplet $((U, r), (p_i, p'_i), (U_i, r_i))$ est a fortiori préuniformément continu. Soit alors $(\hat{U}, r)$ une structure préuniforme telle que, pour tout $i \in I$, le triplet $((\hat{U}, r), (p_i, p'_i), (U_i, r_i))$ soit préuniformément continu. D'après la proposition 36, on a $p_i . U_i . p_i'^o \subset \hat{U}$, et par suite $U \subset \hat{U}$. Par définition (U, r) est donc un produit de $((U_i, r_i))$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. Lorsque le produit $((p_i),(p'_i),r)$ de la famille (r_i) est fixé, sachant que (U_i, r_i) est une structure préuniforme pour tout $i \in I$, il est clair que le produit (U, r) est unique. Nous allons voir quelle relation on peut établir entre deux produits (U, r) et (U', r') provenant respectivement de deux produits $((p_i),(p'_i),r)$ et $((q_i),(q'_i),r')$ d'une même famille (r_i).

DEFINITION 17. Nous dirons que deux structures préuniformes (U, r) et (U', r') sont *isomorphes* s'il existe deux bijections f et f' telles que $((U, r),(f, f'),(U', r'))$ et $((U', r'),(f^o, f'^o),(U, r))$ soient préuniformément continues.

PROPOSITION 41. *Si (U, r) et (U', r') sont deux produits d'une famille de structures préuniformes, alors (U, r) et (U', r') sont isomorphes.*

Il existe en effet deux bijections f et f' telles que $p_i = f . q_i$ et $p'_i = f' . q'_i$. Ce qui revient à dire en particulier que $f \in Hom(\beta(r), \beta(r'))$ et que $f' \in Hom(\alpha(r), \alpha(r'))$. Montrons par exemple que $((U, r),(f, f'),(U', r'))$ est préuniformément continue. Soit en effet $v' \in U'$. Par définition il existe une famille finie (v_i) telle que $v' \geq \bigwedge q_i . v_i . q'^o_i$. D'où

$$v' \geq \bigwedge (f^o . p_i) . v_i . (f'^o . p'_i)^o = \bigwedge f^o . (p_i . v_i . p'^o_i) . f' .$$

Mais, d'après la proposition 1, il vient $v' \geq f^o . (\bigwedge p_i . v_i . p'^o) . f'$, c'est-à-dire qu'il existe un $v \in U$ tel que $f^o . v . f' \leq v'$. On démontre de la même manière que $f^o . r . f' \leq r'$ et que $((U', r'),(f^o, f'^o),(U, r))$ est préuniformément continue, ce qui achève la démonstration.

Examinons le comportement du produit d'une famille de structures préuniformes pour l'application $(U, r) \to (*U, \beta(r))$ et l'application $(U, r) \to (U^*, \alpha(r))$.

PROPOSITION 42. *Si la catégorie considérée est à produit compatible avec l'involution (Cf. § 2, déf. 5) et si (U, r) est un produit des structures préuniformes (U_i, r_i), alors $(*U, \beta(r))$ et $(U^*, \alpha(r))$ sont respectivement des produits des structures uniformes $(*U_i, \beta(r_i))$ et $(U^*_i, \alpha(r_i))$.*

Montrons par exemple la première formule. On sait par hypothèse que $((p_i),(p_i), r . r^o)$ est un produit de la famille $(r_i . r^o_i)$. Montrons que

$^*U$ est la borne supérieure des filtres $p_i.{}^*U_i.p_i^o$ dans $Hom(\beta(r),\beta(r))$. Soit en effet x un élément de la borne supérieure des filtres considérés. Il existe une famille (v_i) d'éléments de U_i telle que

$$x \geq \bigwedge (p_i.(v_i.v_i^o).p_i^o).$$

Comme, pour tout $i \in I$, on a $p_i'^o.p_i' = \alpha(p_i')$, il vient

$$x \geq \bigwedge p_i.v_i.(p_i'^o.p_i').v_i^o.p_i^o = \bigwedge (p_i.v_i.p_i'^o).(p_i'.v_i^o.p_i^o) =$$
$$= \bigwedge (p_i.v_i.p_i'^o).(p_i.v_i.p_i'^o)^o \geq (\bigwedge p_i.v_i.p_i'^o).(\bigwedge p_i.v_i.p_i'^o)^o.$$

Ce qui revient à dire que $v \geq a.a^o$ pour un $a \in U$, et par suite $v \in {}^*U$.

Inversement, soit $x \in {}^*U$. Il existe un $v \in U$ tel que $x \geq v.v^o$. Or il existe une famille (v_i) telle que $v_i \in U_i$, et $v \geq \bigwedge p_i.v_i.p_i'^o$. D'où

$$x \geq (\bigwedge p_i.v_i.p_i'^o).(\bigwedge p_i.v_i.p_i'^o)^o = \bigwedge (p_i.v_i.p'^o.p_i'.v_i^o.p_i^o) =$$
$$= \bigwedge p_i.v_i.v_i^o.p_i^o;$$

ce dernier élément appartient à la borne supérieure des filtres $p_i.{}^*U_i.p_i^o$.

4.7. CATEGORIE DES BIRELATIONS PREUNIFORMEMENT CONTINUES.

Nous allons montrer que l'ensemble $PUR(C)$ des birelations préuniformément continues peut être muni de deux structures catégoriques, dont l'une admet pour ensemble de ses unités l'ensemble des relations uniformément continues.

4.7.i. $1^{ère}$ structure sur $PUR(C)$.

Pour un élément $((U,r),(f,f'),(U',r'))$ de $PUR(C)$ nous posons :

$$\beta^{pur}((U,r),(f,f'),(U',r')) = ((U,r),(\beta(f),\beta(f)),(U,r))$$

et

$$\alpha^{pur}((U,r),(f,f'),(U',r')) = ((U',r'),(\alpha(f),\alpha(f)),(U',r')).$$

Définissons alors $((U,r),(f,f'),(U',r')) \circ ((V,p),(g,g'),(V',p'))$ par

$$((U,r),(f.g,f'.g'),(V',p')) \text{ si } (U',r') = (V,p).$$

Il est facile de montrer que, muni de la loi de composition ainsi définie et des applications β^{pur} et α^{pur}, $PUR(C)$ est une catégorie (que nous noterons $PUR(C)^o$).

Désignons par $PUR(C)^f$ l'ensemble des triplets $((U,r),(f,f'),(U',r'))$, lorsque f et f' sont deux fonctionnelles. On montre que *$PUR(C)^f$ est une sous-catégorie de $PUR(C)^o$*. Nous allons montrer que le produit de structures préuniformes est un produit dans la duale de cette sous-catégorie.

PROPOSITION 43. *Un produit de structures préuniformes est un produit dans la catégorie duale de $PUR(C)^f$.*

Posons en effet d'une manière générale

$$\omega(U,r) = ((U,r),(\beta(r),\alpha(r)),(U,r)).$$

Il est clair que, quelque soit la structure préuniforme (U,r), le triplet $\omega(U,r)$ est une unité de $PUR(C)^f$. Soit alors $((U_i,r_i))$ une famille de structures préuniformes, et (U,r) un produit de $((U_i,r_i))$ relatif à $((p_i),(p'_i),r)$. Posons $b_i = ((U,r),(p_i,p'_i),(U_i,r_i))$ et montrons que le couple $((b_i),\omega(U,r))$ est un produit de la famille $(\omega(U_i,r_i))$. Il est clair que l'élément b_i de $PUR(C)^f$ est dans $Hom(\omega(U,r),\omega(U_i,r_i))$ pour tout $i \in I$. Soit alors pour tout $i \in I$ un élément F_i de $PUR(C)^f$ tel que $F_i \in Hom(E',\omega(U_i,r_i))$, où E' est une unité de $PUR(C)^f$. Pour tout $i \in I$ on peut écrire

$$F_i = ((U',r'),(f_i,f'_i),(U_i,r_i)),$$

où f_i et f'_i sont deux fonctionnelles et $E' = \omega(U',r')$. D'après la proposition 33, §4-4, pour tout $i \in I$, les triplets

$$((*U',\beta(r')),f_i,(*U_i,\beta(r_i))) \text{ et } ((U'^*,\alpha(r')),f'_i,(U_i^*,\alpha(r_i)))$$

sont des relations uniformément continues. Comme, d'après la proposition 42, $(*U,\beta(r))$ et $(U^*,\alpha(r))$ sont des produits respectivement de familles $((*U_i,\beta(r_i)))$ et $((U_i^*,\alpha(r_i)))$, il existe en vertu de la proposition 19, §3-4, un seul couple de fonctionnelles f et f' tel que

$$f.p_i = f_i \text{ et } f'.p'_i = p'_i$$

et que

$$((*U',\beta(r')),f,(*U,\beta(r))) \text{ et } ((U'^*,\alpha(r')),f',(U^*,\alpha(r)))$$

soient des relations uniformément continues. Un calcul simple prouve que $f^o.r'.f' \leq r$; la proposition 34 montre alors que $((U',r'),(f,f'),(U,r))$

est préuniformément continue. En posant précisément

$$F = ((U', r'), (f, f'), (U, r)),$$

on a alors $F . b_i = F_i$ pour tout i. L'unicité de F s'obtient par un raisonnement analogue.

4.7.ii. $2^{ième}$ *structure sur* $PUR(C)^f$.

Si $((U, r), (f, f'), (U', r'))$ est un élément de $PUR(C)^f$ nous poserons :

$$\beta^{pur'}((U, r), (f, f'), (U', r')) = ((*U, \beta(r)), (f, f), (*U', \beta(r))),$$

$$\alpha^{pur'}((U, r), (f, f'), (U', r')) = ((U^*, \alpha(r)), (f', f'), (U'^*, \alpha(r'))).$$

D'après la proposition 33 les applications $\beta^{pur'}$ et $\alpha^{pur'}$ ont pour images des applications uniformément continues. Si $U(C)^f$ désigne l'ensemble des applications uniformément continues, et si l'on identifie les deux triplets $((\hat{U}, e), f, (\hat{U}', e'))$ et $((\hat{U}, e), (f, f), (\hat{U}', e'))$ lorsque $(\hat{U}, e)$ et $(\hat{U}', e')$ sont deux structures uniformes, on montre aisément que $\alpha^{pur'}$ et $\beta^{pur'}$ sont deux rétractions de $PUR(C)^f$ dans $U(C)^f$.

Si $((V, p), (g, g'), (V', p'))$ est un autre élément de $PUR(C)^f$, nous posons :

$$((U, r), (f, f'), (U', r')) \circ\circ ((V, p), (g, g'), (V', p')) =$$

$$= ((\overline{U.V}, r.p), (f, g'), (\overline{U'.V'}, r'.p'))$$

ssi $((U^*, \alpha(r)), (f', f'), (U'^*, \alpha(r'))) = ((*V, \beta(p)), (g, g), (*V', \beta(p')))$.

PROPOSITION 44. *Si* $((U, r), (f, f'), (U', r')) \circ\circ ((V, p), (g, g'), (V', p'))$ *est défini, alors c'est un élément de* $PUR(C)^f$.

Soit en effet $x' \in U'.V'$. Il existe un $u' \in U'$ et un $v' \in V'$ tels que $x' \geq u'.v'$. Or il existe un $u \in U$ et un $v \in V$ tels que $f^o.u.f' \leq u'$ et $g^o.v.g' \leq v'$. Et l'on a

$$f^o.(u.v).g' \leq f^o.u.(f'.g^o).v.g' = (f^o.u.f').(g^o.v.g') \leq u'.v' \leq x'.$$

PROPOSITION 45. *On a*

$$\beta^{pur'}((U, r), (f, f'), (U', r')) \circ\circ ((V, p), (g, g'), (V', p')) =$$

$$= \beta^{pur'}((U, r), (f, f'), (U', r'))$$

et

$$\alpha^{pur'}((U,r),(f,f'),(U',r'))\circ\circ((V,p),(g,g'),(V',p')) =$$
$$= \alpha^{pur'}((V,p),(g,g'),(V',p')).$$

Démontrons par exemple la première formule. Le premier membre est égal à $((*(\overline{U.V}),\beta(r.p)),(f,f),(*(\overline{U'.V'}),\beta(r'.p')))$. D'après la proposition 25, §4-2, cette dernière expression est encore égale à : $((*U,\beta(r)),(f,f),(*U',\beta(r')))$, qui est précisement le deuxième membre de l'égalité indiquée.

PROPOSITION 46. *On a*

$$\beta^{pur'}((U,r),(f,f'),(U',r'))\circ\circ((U,r),(f,f'),(U',r')) =$$
$$= ((U,r),(f,f'),(U',r'))$$

et

$$((U,r),(f,f'),(U',r'))\circ\circ\alpha^{pur'}((U,r),(f,f'),(U',r')) =$$
$$= ((U,r),(f,f'),(U',r')).$$

Démontrons par exemple la première formule. Le premier membre est égal à $((*\overline{U.U},\beta(r).r),(f,f'),(*\overline{U'.U'},\beta(r').r'))$. D'après la proposition 24, §4-2, cette expression est encore égale à $((U,r),(f,f'),(U',r'))$ qui est précisement le deuxième membre de l'égalité à montrer, ce qui achève la démonstration.

Les propositions 44, 45 et 46 entrainent le théorème suivant :

THEOREME 4. *L'ensemble $PUR(C)^f$ des bifonctionnelles préuniformément continues muni de la loi de composition $\circ\circ$ est une catégorie dont l'ensemble des fonctionnelles uniformément continues.*

THEOREME 5. *$(PUR(C)^{f\circ}, PUR(C)^{f\circ\circ})$ est une catégorie double* [5].

En effet, on montre facilement que, si F, G, H et K sont des éléments de $PUR(C)^f$, on a

$$(F\circ G)\circ\circ(H\circ K) = (F\circ\circ H)\circ(G\circ\circ K).$$

CHAPITRE II

STRUCTURES PREUNIFORMES DANS LA CATEGORIE DES RELATIONS BINAIRES

1. Structure préuniforme sur un produit $E \times E'$.

DEFINITION 1. Une *structure préuniforme* $(\mathfrak{U}, R)$ sur un produit $E \times E'$ de deux ensembles est le couple formé par une relation de E vers E' et par un ensemble $\mathfrak{U}$ de parties de $E \times E'$, vérifiant les propriétés :

(PU 1) R est une relation bimultifonctionnelle(*) .

(PU 2) $\mathfrak{U}$ est un filtre sur $E \times E'$.

(PU 3) Pour tout $V \in \mathfrak{U}$, on a $R \subset V$.

(PU 4) Pour tout $V \in \mathfrak{U}$, il existe $W \in \mathfrak{U}$ tel que $W \circ W^{-1} \circ W \subset V$.

Le triplet $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ est appelé *espace préuniforme.* Les éléments V de $\mathfrak{U}$ sont appelés les *entourages* de R.

DEFINITION 2. Un *système fondamental d'entourages* $(\mathfrak{B}, R)$ est le couple formé par un ensemble $\mathfrak{B}$ de parties de $E \times E'$, et par une relation R de E vers E' vérifiant les axiomes *PU 1*, *PU 3* et *PU 4* ainsi que :

(PU' 2) $\mathfrak{B}$ est une base de filtre.

Dans ce cas, et si $\mathfrak{U}$ est le filtre engendré par $\mathfrak{B}$, le couple $(\mathfrak{U}, R)$ est une structure préuniforme.

Si de même $(\mathfrak{U}, R)$ est une structure préuniforme sur $E \times E'$, et si $\mathfrak{U}^{-1}$ désigne l'ensemble des V^{-1} lorsque V parcourt $\mathfrak{U}$, le couple $(\mathfrak{U}^{-1}, R^{-1})$ est une structure préuniforme sur $E' \times E$.

Si $\mathfrak{U}$ est un univers auquel appartiennent E et E', une structure préuniforme sur $E \times E'$ s'identifie à une structure préuniforme relativement à la catégorie à involution *inf*-demi-réticulée $(\mathfrak{R}, \leq, 0)$ des relations correspondantes.

De même les structures uniformes relativement à cette même catégorie à involution s'identifient aux structures uniformes usuelles [2].

(*) C'est-à-dire $R \circ R^{-1} \supseteq \Delta_E$ et $R^{-1} \circ R \supseteq \Delta_{E'}$, où Δ_E = diagonale de E.

1.1. STRUCTURES UNIFORMES INDUITES PAR UNE STRUCTURE PREUNIFORME.

Soit $(\mathfrak{U}, R)$ une structure préuniforme sur $E \times E'$. En appliquant la proposition 19, § 4-1, Ch. 1, on obtient :

PROPOSITION 1. *L'ensemble des $V \circ V^{-1}$ lorsque V parcourt $\mathfrak{U}$ constitue un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme*(*) *sur $E \times E$.*

Nous désignerons par $*\mathfrak{U}$ la structure uniforme engendrée par les $V \circ V^{-1}$, que nous appellerons la *structure uniforme induite par* $\mathfrak{U}$ *sur* $E \times E$. Si $\mathfrak{U}*$ désigne la structure uniforme engendrée par les $V^{-1} \circ V$, il est clair que :

$$*(\mathfrak{U}^{-1}) = \mathfrak{U}*, \qquad (\mathfrak{U}^{-1})* = *\mathfrak{U}.$$

Remarquons enfin que, si $E = E'$, alors $*\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}*$ sont deux structures uniformes sur $E \times E$, qui seront identiques si, et seulement si,

1°) Chaque $V \circ V^{-1}$ contient un $W^{-1} \circ W$.

2°) Chaque $V^{-1} \circ V$ contient un $W \circ W^{-1}$.

La proposition 20, § 4-1, Ch. 1 donne :

PROPOSITION 2. *Si $(\mathfrak{U}, R)$ et $(\mathfrak{V}, R)$ sont deux structures préuniformes telles que $*\mathfrak{U} = *\mathfrak{V}$, alors $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$.*

1.2. CATEGORIE DES STRUCTURES PREUNIFORMES.

Considérons l'ensemble $\mathfrak{PU}$ des espaces préuniformes $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$, lorsque E et E' parcourent un univers $\mathfrak{U}$.

Soit alors $\mathfrak{PU}_o$ le sous-ensemble des espaces uniformes $(E, \mathfrak{X})$.

Considérons les applications α et β de $\mathfrak{PU}$ dans $\mathfrak{PU}_o$ telles que, si $\mathfrak{S} = (E, (\mathfrak{U}, R), E')$, on ait :

$$\alpha(\mathfrak{S}) = (E', \mathfrak{U}*),$$

$$\beta(\mathfrak{S}) = (E, *\mathfrak{U}).$$

Conformément à la définition du composé de deux structures pré-

---

(*) Nous disons ici structure uniforme sur $E \times E$ au lieu de structure uniforme sur E comme dans [2].

uniformes du §4-2, Chap. I, nous dirons que $\mathfrak{E} = (E, (\mathfrak{U}, R), E') \in \mathfrak{B}\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{F} = (F, (\mathfrak{D}, P), F') \in \mathfrak{B}\mathfrak{U}$ sont composables si, et seulement si, $\alpha(\mathfrak{E}) = \beta(\mathfrak{F})$, autrement dit si $E' = F$ et si $\mathfrak{U}* = *\mathfrak{D}$; dans ce cas nous désignerons encore par $\mathfrak{U} \circ \mathfrak{D}$ le filtre engendré par les $V \circ Q$ lorsque V parcourt $\mathfrak{U}$ et Q parcourt $\mathfrak{D}$. La proposition 22, §4-2, Chap. I donne :

PROPOSITION 3. *Si* $\mathfrak{E} \circ \mathfrak{F}$ *est défini, alors* $(\mathfrak{U} \circ \mathfrak{D}, R \circ P)$ *est une structure préuniforme.*

Le Théorème 2, §4-2, Chap. I donne :

Si $\mathfrak{U}$ *est un univers, l'ensemble* $\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ *des espaces préuniformes* $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ *lorsque* E *et* E' *parcourent* $\mathfrak{U}$ *est une catégorie pour la loi de composition précédente; la classe de ses unités est l'ensemble des espaces uniformes* $(E, \mathfrak{X})$, *où* $E \in \mathfrak{U}$.

1.3. TOPOLOGIE ASSOCIEE A UNE STRUCTURE PREUNIFORME.

Soit $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ un espace préuniforme, $(*\mathfrak{U}, E)$ et $(\mathfrak{U}*, E')$ les espaces uniformes induits. L'ensemble des parties F de $E \times E'$ telles que $F = \cap X \circ F \circ Y$, lorsque X parcourt $*\mathfrak{U}$ et Y parcourt $\mathfrak{U}*$, est d'après la proposition 4, §3-1, Chap. I une famille de fermés d'une topologie T sur $E \times E'$. On voit que T *est* aussi *le produit des topologies* $*T$ et $T*$ *déduites respectivement des structures uniformes* $*\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}*$.

La proposition 25, §4-3, Chap. I nous montre que :

PROPOSITION 4. *Chaque entourage de* R *contient un entourage fermé. De plus chaque entourage de* R *contient un entourage ouvert.*

Soit en effet V un entourage de R. Il existe $W \in \mathfrak{U}$ tel que

$$W \circ W^{-1} \circ W \circ W^{-1} \circ W \subseteq V.$$

Montrons que le premier membre de la dernière inclusion est un voisinage de W pour T. Soit en effet $(a, b) \in W$. Il est facile de vérifier que

$$W \circ W^{-1}(a) \times W^{-1} \circ W(b) \subseteq W \circ W^{-1} \circ W \circ W^{-1} \circ W.$$

Ceci prouve l'affirmation, le premier membre étant un voisinage de (a, b) pour T. Il vient alors

$$W \subseteq W \circ W^{-1} \circ W \circ W^{-1} \circ W \subseteq \overset{\circ}{V} \subseteq V.$$

L'axiome $PU2$ entraîne que l'intérieur $\mathring{V}$ de V appartient à $\mathfrak{U}$, ce qui achève la démonstration. (*)

DEFINITION 3. Nous dirons que la structure préuniforme $(\mathfrak{U}, R)$ est *R-séparée* si R est un fermé de $E \times E'$ pour T.

La proposition 26, chap. I donne :

PROPOSITION 5. *La structure préuniforme $(\mathfrak{U}, R)$ est R-séparée si, et seulement si, R est l'intersection des V lorsque V parcourt $\mathfrak{U}$.*

1.4. BISTRUCTURE UNIFORME PREUNIFORMISABLE.

Soit $((E, \mathfrak{X}), R, (E', \mathfrak{X}'))$ un triplet formé par deux espaces uniformes $(E, \mathfrak{X})$ et $(E', \mathfrak{X}')$, et une relation R de E vers E'. Nous cherchons à quelles conditions il existe une structure préuniforme $(\mathfrak{U}, R)$ telle que ${}^*\mathfrak{U} = \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{U}^* = \mathfrak{X}'$.

Lorsque E' est simplement un ensemble, la proposition 29, Chap. I nous fournit la réponse suivante :

PROPOSITION 6. *Soient $(E, \mathfrak{X})$ un espace uniforme et R une relation de E vers E'. Il existe une et une seule structure préuniforme $(\mathfrak{U}, R)$ telle que ${}^*\mathfrak{U} = \mathfrak{X}$ si, et seulement si, R est bimultifonctionnelle et $R \circ R^{-1} \subseteq X$ pour tout $X \in \mathfrak{X}$. Cette structure préuniforme s'obtient comme l'ensemble des majorants des $X \circ R$ lorsque X parcourt $\mathfrak{X}$.*

Les propositions 30 et 31, §4, Chap. I, donnent :

PROPOSITION 7. *Soient $(E, \mathfrak{X})$ et $(E', \mathfrak{X}')$ deux espaces uniformes, R une relation bimultifonctionnelle de E vers E'. Il existe une et une seule structure préuniforme $(\mathfrak{U}, R)$ telle que ${}^*\mathfrak{U} = \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{U}^* = \mathfrak{X}'$ si, et seulement si, les conditions suivantes sont réalisées :*

1) $R \circ R^{-1} \subseteq X$ pour tout $X \in \mathfrak{X}$.

2) $R^{-1} \circ R \subseteq X'$ pour tout $X' \in \mathfrak{X}'$.

3) $R^{-1} \circ X \circ R \in \mathfrak{X}'$ pour tout $X \in \mathfrak{X}$.

4) $R \circ X' \circ R^{-1} \in \mathfrak{X}$ pour tout $X' \in \mathfrak{X}'$.

(*) Dans le cas général d'une catégorie à involution *inf*-demi-réticulée le principe de notre démonstration est mis en défaut, à moins de supposer que $Hom(r, r)$ est un treillis atomique. Mais alors la distributivité générale supposée entraîne que $Hom(r, r)$ est isomorphe au treillis des parties d'un ensemble.

Comme cas particulier de la proposition 7, nous pouvons supposer que R est une application de E vers E'. Les conditions imposées montrent alors que ce problème admet une solution si R est uniformément continue de $(E, \mathfrak{X})$ vers $(E', \mathfrak{X}')$.

1.5. APPLICATION PREUNIFORMEMENT CONTINUE.

Soient $(E, (\mathfrak{X}, R), E')$ et $(F, (\mathfrak{D}, P), F')$ deux espaces préuniformes, f une application de E vers F et f' une application de E' vers F'.

DEFINITION 4. Nous dirons que l'application $f \times f'$ de $E \times E'$ vers $F \times F'$ est *préuniformément continue* si $f \times f'(R) \subseteq P$ et si, pour tout entourage W de P, il existe un entourage V de R tel que $f \times f'(V) \subseteq W$.

La proposition 31, § 4- 4, Chap. I montre que :

PROPOSITION 8. *Si $f \times f'$ est préuniformément continue, alors f et f' sont uniformément continues par rapport aux structures uniformes $^*\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}^*$ respectivement sur E et E'.*

La proposition 34, § 4- 4, Chap. I montre que :

Si f et f' sont uniformément continues, et si de plus $f \times f'(R) \subseteq P$, alors $f \times f'$ est préuniformément continue.

Donnons-nous un espace préuniforme $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$, deux ensembles F et F', une application f de E vers F, et une application f' de E' vers F'. La proposition 35, § 4 -4, Chap. I, montre que :

PROPOSITION 9. *L'ensemble $\mathfrak{D}$ des majorants des $f \times f'(V)$, lorsque V parcourt $\mathfrak{U}$, est tel que $(\mathfrak{D}, f \times f'(R))$ soit une structure préuniforme sur $E \times E'$, à condition que $f \times f'(R)$ soit bimultifonctionnelle, que l'équivalence $\mathfrak{N}_f$ associée à f soit contenue dans chaque $V \circ V^{-1}$ lorsque V parcourt $\mathfrak{U}$, et enfin que $V^{-1} \circ V$ contienne l'équivalence associée à f'. Dans ces conditions $f \times f'$ est préuniformément continue, et pour toute structure préuniforme $(\mathfrak{D}_1, P)$ telle que $f \times f'$ soit préuniformément continue, on a $\mathfrak{D}_1 \subseteq \mathfrak{D}$.*

Inversement, si nous nous donnons deux ensembles E et E', deux ensembles F et F' tels que $(F, (\mathfrak{D}, P), F')$ soit un espace préuniforme, et si f et f' sont respectivement deux applications de E vers F, et de

E' vers F', la proposition 36, §4-4, Chap. 1, montre que :

PROPOSITION 10. *Le couple formé par l'ensemble* $\mathfrak{U}$ *des majorants des* $(f \times f')^{-1}(W)$, *lorsque* W *parcourt* $\mathfrak{D}$, *et par* $(f \times f')^{-1}(P)$ *est une structure préuniforme sur* $E \times E'$ *à condition que* $(f \times f')^{-1}(P)$ *soit bimultifonctionnelle. Lorsque cette condition est vérifiée,* $f \times f'$ *est préuniformément continue, et pour toute structure préuniforme* $(\mathfrak{U}_1, R)$ *telle que* $f \times f'$ *soit préuniformément continue, on a* $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}_1$.

Comme conséquence des deux propositions ci-dessus, nous pouvons établir une correspondance entre les structures préuniformes sur $E \times E'$ et celles sur $F \times F'$, lorsqu'est donnée une application $f \times f'$ de $E \times E'$ vers $F \times F'$. Du théorème 3, §4-4, Chap. I, on déduit :

Si R *et* P *sont deux relations bimultifonctionnelles telles que* $f \times f'(R) = P$, *l'ensemble des structures préuniformes* $(\mathfrak{U}, R)$ *telles que*

$$V \circ V^{-1} \supseteq \mathfrak{N}_f \text{ et } V^{-1} \circ V \supseteq \mathfrak{N}_{f'}, \text{ pour tout } V \in \mathfrak{U}$$

est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des structures préuniformes $(\mathfrak{D}, P)$ *sur* $F \times F'$.

Comme cas particulier de ce théorème, nous pouvons supposer que $E = E'$ et $F = F'$, et nous restreindre aux structures uniformes sur E et F. Le théorème 1, §3-2, Chap. 1, devient :

L'ensemble des structures uniformes $\mathfrak{X}$ *sur* E *telles que* $\mathfrak{N}_f \subseteq X$ *pour tout* $X \in \mathfrak{X}$ *est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des structures uniformes sur* F.

1.6. PRODUIT DE STRUCTURES PREUNIFORMES.

Soit $((E_i, (\mathfrak{U}_i, R_i), E'_i))$ une famille d'espaces préuniformes, où $i \in I$; notons E l'ensemble produit des E_i, E' l'ensemble produit des E'_i, R la relation produit des R_i (qui est bimultifonctionnelle), p_i la projection de E' sur E'_i.

DEFINITION 5. La structure préuniforme $(\mathfrak{U}, R)$ est un *produit des* $(\mathfrak{U}_i, R_i)$ si pour tout $i \in I$, l'application $p_i \times p'_i$ de $E \times E'$ sur $E_i \times E'_i$ est préuniformément continue et si, pour toute structure préuniforme $(\mathfrak{U}_1, R)$ telle que $p_i \times p'_i$ soit préuniformément continue, on a $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}_1$.

La proposition 37 , § 4-5 , Chap. I montre que :

PROPOSITION 11. *L'ensemble* $\mathfrak{U}$ *des majorants des intersections finies des* $(p_i \times p'_i)^{-1}(V_i)$, *lorsque* V_i *parcourt* $\mathfrak{U}_i$ *et* i *l'ensemble* I, *est tel que le couple* $(\mathfrak{U}, R)$ *soit le produit des* $(\mathfrak{U}_i, R_i)$.

Examinons le comportement du produit d'une famille de structures préuniformes lorsqu'on associe à une structure préuniforme une structure uniforme.

L'axiome P_4 (§ 2, Chap. I) étant évidemment vérifié dans la catégorie des relations binaires, la proposition 42, § 4-5, Chap. I montre que :

PROPOSITION 12. *Si* $(\mathfrak{U}, R)$ *est le produit des* $(\mathfrak{U}_i, R_i)$, *alors* $^*\mathfrak{U}$ *est le produit des structures uniformes* $^*\mathfrak{U}_i$, *et* $\mathfrak{U}^*$ *celui des* $\mathfrak{U}_i^*$.

1.7. CATEGORIE DES APPLICATIONS PREUNIFORMEMENT CONTINUES.

Soit $\mathfrak{U}$ un univers. Nous allons munir l'ensemble $\mathfrak{U}\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ des applications préuniformément continues correspondant de deux structures catégoriques, dont l'une admet pour ensemble des unités l'ensemble des applications uniformément continues. Un élément de $\mathfrak{U}\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ est désigné par

$$a_i = ((E_i, (\mathfrak{U}_i, R_i), E'_i), (f_i, f'_i), (F_i, (\mathfrak{D}_i, P_i), F'_i)).$$

1ère structure sur $\mathfrak{U}\mathfrak{P}\mathfrak{U}$.

Nous posons :

$$\beta^1(a_i) = ((E_i, (\mathfrak{U}_i, R_i), E_i), \Delta_{E_i}, (E_i, (\mathfrak{U}_i, R_i), E_i)),$$

$$\alpha^1(a_i) = ((E'_i, (\mathfrak{D}_i, R_i), E'_i), \Delta_{E'_i}, (E'_i, (\mathfrak{D}_i, R_i), E'_i)),$$

et nous définissons $a_i \circ a_j$ par

$$a_i \circ a_j = ((E_i, (\mathfrak{U}_i, R_i), E'_i), (f_i \circ f_j, f'_i \circ f'_j), (F_j, (\mathfrak{D}_j, P_j), F'_j)$$

$$\text{si, et seulement si, } \alpha^1(a_i) = \beta^1(a_j).$$

Du § 4-6-1, Chap. I il résulte que, muni de cette loi de composition, l'ensemble $\mathfrak{U}\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ est une catégorie que nous noterons $\mathfrak{U}\mathfrak{P}\mathfrak{U}^o$.

La proposition 43, § 4-6-1, Chap. I montre que :

Un produit de structures préuniformes est un produit dans la catégorie $\mathfrak{U}\mathfrak{P}\mathfrak{U}^o$.

2ème structure sur $\mathfrak{A}\mathfrak{P}\mathfrak{U}$.

Posons :

$\beta^2(a_i) = ((E_i, {}^*\mathfrak{U}_i), f_i, (F'_i, {}^*\mathfrak{D}))$, $\quad \alpha^2(a_i) = ((E'_i, \mathfrak{U}^*_i), f'_i, (F'_i, \mathfrak{D}^*_i))$.

Définissons $a_i \circ\circ a_j$ par :

$$a_i \circ\circ a_j = ((E_i, (\mathfrak{U}_i \circ \mathfrak{U}_j), E'_j), (f_i, f'_j), (F_i, (\mathfrak{D}_i \circ \mathfrak{D}_j), F'_j))$$

si, et seulement si, $\alpha^2(a_i) = \beta^2(a_j)$.

Le théorème 4, §4-6-2, Chap. I montre que :

Muni de la loi de composition ci-dessus, l'ensemble $\mathfrak{A}\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ *est une catégorie* $\mathfrak{A}\mathfrak{P}\mathfrak{U}^{\circ\circ}$ *dont l'ensemble des unités est l'ensemble des applications uniformément continues.*

2. Espace préuniforme complet. (*)

Dans ce paragraphe, nous désignons par $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ un espace préuniforme.

DEFINITION 6. Nous dirons que l'espace préuniforme $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ est *complet à gauche* si l'espace uniforme $(E, {}^*\mathfrak{U})$ est complet.

Remarquons que, si $(E_i, (\mathfrak{U}_i, R_i), E'_i)$ est une famille d'espaces préuniformes complets à gauche, le produit $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ est complet à gauche, puisque ${}^*\mathfrak{U}$ est identique au produit des ${}^*\mathfrak{U}_i$ (proposition 12), et que tout produit d'espaces uniformes complets est complet.

Réciproquement, si $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ est complet, alors le produit des $(E_i, {}^*\mathfrak{U}_i)$ est un espace uniforme complet, de sorte que chacun des $(E_i, {}^*\mathfrak{U}_i)$ est complet, c'est-à-dire que l'espace $(E_i, (\mathfrak{U}_i, R_i), E'_i)$ est complet à gauche. Ainsi :

Un produit d'espaces préuniformes est complet à gauche si, et seulement si, chacun des facteurs est complet à gauche.

(*) Chacun des paragraphes qui suivent nécessite des hypothèses qui, dans le cas général d'une catégorie à involution *inf*-demi-réticulée, entraînent que *Hom(r, r)* soit un treillis isomorphe au treillis des parties d'un ensemble. C'est la raison pour laquelle nous les plaçons uniquement dans le cadre de la catégorie des relations binaires.

2.1. ENSEMBLES R-PETITS.

DEFINITION 7. Soit $V \in \mathfrak{U}$. Un sous-ensemble A de E est dit *R-petit d'ordre* V si $(A \times A) \circ R \subseteq V$.

PROPOSITION 13. *Si $V \in \mathfrak{U}$ et si A est un sous-ensemble de E qui est R-petit d'ordre V, alors A est petit d'ordre $V \circ V^{-1}$ pour la structure uniforme $*\mathfrak{U}$.*

On a en effet $(A \times A) \circ R \subset V$, d'où $(A \times A) \circ R \circ V^{-1} \subset V \circ V^{-1}$. Par suite

$$(A \times A) \circ R \circ R^{-1} \subset (A \times A) \circ R \circ V^{-1} \subset V \circ V^{-1},$$

ce qui entraîne $A \times A \subset V \circ V^{-1}$, c'est-à-dire A est petit d'ordre $V \circ V^{-1}$ dans $*\mathfrak{U}$.

PROPOSITION 14. *Si $V \in \mathfrak{U}$ et si A est un sous-ensemble de E qui est petit d'ordre $V \circ V^{-1}$, alors A est R-petit d'ordre $V \circ V^{-1} \circ V$.*

On a en effet $A \times A \subset V \circ V^{-1}$, et par suite

$$(A \times A) \circ R \subset V \circ V^{-1} \circ R.$$

Comme $V \circ V^{-1} \circ R \subset V \circ V^{-1} \circ V$, il vient :

$$(A \times A) \circ R \subset V \circ V^{-1} \circ V.$$

Donc A est R-petit d'ordre $V \circ V^{-1} \circ V$.

2.2. R-FILTRES DE CAUCHY.

DEFINITION 8. Soit $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ un espace préuniforme et $\mathfrak{F}$ un filtre sur E. Nous dirons que $\mathfrak{F}$ est un *R-filtre de Cauchy relativement à* $\mathfrak{U}$ si, pour tout $V \in \mathfrak{U}$, il existe un $A \in \mathfrak{F}$ qui est R-petit d'ordre V.

Si $\mathfrak{F}^2 \circ R$ désigne le filtre engendré par les $(A \times A) \circ R$ lorsque A parcourt $\mathfrak{F}$, alors $\mathfrak{F}$ est un R-filtre de Cauchy ssi $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}^2 \circ R$.

PROPOSITION 15. *$\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy par rapport à $*\mathfrak{U}$ si, et seulement si, $\mathfrak{F}$ est un R-filtre de Cauchy relativement à $\mathfrak{U}$.*

a) Supposons que $\mathfrak{F}$ soit un filtre de Cauchy pour $*\mathfrak{U}$. Soit $V \in \mathfrak{U}$ Il existe un $W \in \mathfrak{U}$ tel que $W \circ W^{-1} \circ W \subset V$ et un $A \in \mathfrak{F}$ tel que :

$$A \times A \subset W \circ W^{-1};$$

$A \times A \subset W \circ W^{-1}$; d'où $(A \times A) \circ R \subset W \circ W^{-1} \circ W \subset V$.

b) Supposons que $\mathfrak{F}$ soit un R-filtre de Cauchy. Soit X un entourage de E pour la structure uniforme $*\mathfrak{U}$. Il existe un élément V de $\mathfrak{U}$ tel que $V \circ V^{-1} \subset X$ et un $A \in \mathfrak{F}$ qui est R-petit d'ordre V. D'après la proposition 13, A est petit d'ordre $V \circ V^{-1}$, et a fortiori d'ordre X.

2.3. *R-CONVERGENCE DE FILTRE.*

Si $\mathfrak{F}$ est un filtre sur E et si $*T$ et T désignent respectivement les topologies sur E et $E \times E'$ déduites de la structure uniforme $*\mathfrak{U}$ et de la structure préuniforme $\mathfrak{U}$, nous cherchons une relation entre la convergence de $\mathfrak{F}$ pour $*T$ et celle de $\mathfrak{F}^2 \circ R$ pour T.

PROPOSITION 16. *Si $\mathfrak{F}$ est un filtre sur E qui converge vers un point x de E pour la topologie $*T$, alors $\mathfrak{F}^2 \circ R$ converge pour T vers tout point (x, x') de $E \times E'$ tel que $(x, x') \in R$.*

Soit en effet M un voisinage de (x, x') dans T.

Il existe V et $W \in \mathfrak{U}$ tels que :

$$V \circ V^{-1}(x) \times W^{-1} \circ W(x') \subset M.$$

Soit alors $Z = V \cap W$, et $Q \in \mathfrak{U}$ tel que $Q \circ Q^{-1} \circ Q \subset Z$.

Or, $Q \circ Q^{-1}(x)$ est un voisinage de x dans $*T$. Comme $\mathfrak{F}$ converge vers x, $Q \circ Q^{-1}(x)$ est donc un élément de $\mathfrak{F}$.

Il suffit alors de montrer que :

$$(Q \circ Q^{-1}(x) \times Q \circ Q^{-1}(x)) \circ R \subset V \circ V^{-1}(x) \times W^{-1} \circ W(x').$$

Soit à cet effet $(a, b') \in (Q \circ Q^{-1}(x) \times Q \circ Q^{-1}(x)) \circ R$. Il existe $(b, b') \in R$ tel que a et b appartiennent à $Q \circ Q^{-1}(x)$. D'où $(x, b) \in Q \circ Q^{-1}$ et $(b, b') \in R$. Par suite

$$(x, b') \in Q \circ Q^{-1} \circ R \subset Q \circ Q^{-1} \circ Q \subset Z \subset W.$$

Les relations $(x, b') \in W$ et $(x, x') \in R \subset W$ entraînent $(x', x) \in W^{-1} \circ W$, car $(b', x) \in W^{-1}$ et $(x, x') \in W$. Soit encore $b' \in W^{-1} \circ W(x')$. Mais de plus $Q \subset Z \subset V$ et, comme $a \in Q \circ Q^{-1}(x)$, il vient $a \in V \circ V^{-1}(x)$, c'est-à-dire $(a, b') \in V \circ V^{-1}(x) \times W^{-1} \circ W(x')$.

PROPOSITION 17. *Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur E. Si $\mathfrak{F}^2 \circ R$ converge vers un point $(x, x') \in E \times E'$ pour la topologie T, alors $\mathfrak{F}$ converge vers x pour la topologie $*T$.*

Soit en effet A un voisinage de x dans $*T$. Il existe un $V \in \mathfrak{U}$ tel que $V \circ V^{-1}(x) \subset A$.

Or $V \circ V^{-1}(x) \times V^{-1} \circ V(x')$ est un voisinage de (x, x') dans T. Par conséquent il existe un $Y \in \mathfrak{F}$ tel que :

$$(Y \times Y) \circ R \subset V \circ V^{-1}(x) \times V^{-1} \circ V(x').$$

Il suffit alors de montrer que $Y \subset V \circ V^{-1}(x)$. Soit à cet effet $y \in Y$, et soit $y' \in E'$ tel que $(y, y') \in R$. Comme $(y, y) \in Y \times Y$, on a

$$(y, y') \in (Y \times Y) \circ R \subset V \circ V^{-1}(x) \times V^{-1} \circ V(x'),$$

ce qui montre que $y \in V \circ V^{-1}(x)$, et achève la démonstration.

Les propositions 16 et 17 donnent le théorème suivant :

THEOREME. *Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur E. Si $(x, x') \in R$, $\mathfrak{F}$ converge vers x dans $*T$ si, et seulement si $\mathfrak{F}^2 \circ R$ converge vers (x, x') dans T.*

DEFINITION 8. Nous dirons que l'espace préuniforme $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ est *complet à droite* si l'espace uniforme $(E', \mathfrak{U}^*, E')$ est un espace uniforme complet.

En appliquant les définitions et les résultats des § 2-3, à l'espace préuniforme $(E', (\mathfrak{U}^{-1}, R^{-1}), E)$, on obtient :

Si $\mathfrak{F}'$ est un filtre sur E', pour que $\mathfrak{F}'$ converge vers x' pour la topologie T^*, il faut et il suffit que $\mathfrak{F}'^2 \circ R^{-1}$ converge vers (x, x') pour T, lorsque $(x', x) \in R^{-1}$.

2.4. SYMETRIE D'UN ESPACE PREUNIFORME.

Les propositions qui suivent tendent à montrer que, si un espace préuniforme est complet d'un côté, il l'est aussi de l'autre côté.

Rappelons que, si A est une partie de E, $R(A)$ est l'ensemble des $a' \in E'$ tels que $(a, a') \in R$. Si $\mathfrak{F}$ est un filtre sur E, nous noterons $R(\mathfrak{F})$ le filtre sur E' engendré par les $R(A)$, lorsque A parcourt $\mathfrak{F}$.

PROPOSITION 18. *Si un sous-ensemble A de E est R-petit d'ordre V,* *alors* $R(A)$ *est* R*-petit d'ordre* $V \circ V^{-1} \circ V$.

Supposons en effet que

$$(1) \qquad (A \times A) \circ R \subset V,$$

et montrons que :

$$R \circ (R(A) \times R(A)) \subset V \circ V^{-1} \circ V.$$

Soit en effet (x, b') un élément du premier membre.

Il existe un $(a', b') \in R(A) \times R(A)$ tel que $(x, a') \in R$.

Comme $(a', b') \in R(A) \times R(A)$, il existe $(a, b) \in A \times A$ tel que (a, a') et (b, b') appartiennent à R. Puisque $(b, a) \in A \times A$, la relation (1) donne $(b, a') \in (A \times A) \circ R \subset V$. Les relations

$$(x, a') \in R, \quad (b, a') \in V, \quad (b, b') \in R$$

entraînent

$$(x, a') \in V, \quad (a', b) \in V^{-1}, \quad (b, b') \in V.$$

Par suite $(x, b') \in V \circ V^{-1} \circ V$.

PROPOSITION 19. *Si* $\mathfrak{F}$ *est un* R*-filtre de Cauchy relativement à* $\mathfrak{U}$, *alors* $R(\mathfrak{F})$ *est un* R*-filtre de Cauchy sur* E' *relativement à* $\mathfrak{U}$.

Soit en effet V un entourage de R. Il existe un $W \in \mathfrak{U}$ tel que $W \circ W^{-1} \circ W \subset V$. Comme $\mathfrak{F}$ est un R-filtre de Cauchy, il existe un $A \in \mathfrak{F}$ tel que $(A \times A) \circ R \subset W$.

D'après la proposition 16,

$$R \circ (R(A) \times R(A)) \subset W \circ W^{-1} \circ W.$$

Par suite $R \circ (R(A) \times R(A)) \subset V$, ce qui achève la démonstration.

Rappelons que, si A' est une partie de E', $R^{-1}(A')$ est l'ensemble des $a \in E$ tels que $(a, a') \in R$, pour un $a' \in A'$.

$R^{-1}(\mathfrak{F}')$, si $\mathfrak{F}'$ est un filtre sur E', est le filtre engendré par les $R^{-1}(A')$, lorsque A' parcourt $\mathfrak{F}'$.

Il est clair que, si $\mathfrak{F}'$ est un R-filtre de Cauchy sur E' relativement à $\mathfrak{U}$, $R^{-1}(\mathfrak{F}')$ est un R-filtre de Cauchy sur E.

PROPOSITION 20. *Si $\mathfrak{F}$ est un filtre sur E tel que $R(\mathfrak{F})$ converge vers un point a' de E' pour T^*, alors $\mathfrak{F}$ converge pour ${}^*T$ vers tout point a de E tel que $(a, a') \in R$.*

Soit en effet A un voisinage de a dans E. Il existe un $V \in \mathfrak{U}$ tel que $V \circ V^{-1}(a) \subset A$.

Soit alors $W \in \mathfrak{U}$ tel que $W \circ W^{-1} \circ W \subset V$. $W^{-1} \circ W(a')$ est un voisinage de a' dans E'. Il existe donc $X \in \mathfrak{F}$ tel que $R(X) \subset W^{-1} \circ W(a')$. Montrons alors que $X \subset V \circ V^{-1}(a)$. Soit en effet $x \in X$. Si x' est un point de E' tel que $(x, x') \in R$, on a $x' \in R(X)$, et par suite $x' \in W^{-1} \circ W(a')$, ce qui revient à dire $(x, x') \in W$ et $(x', a') \in W^{-1} \circ W$, d'où

$$(x, a') \in W \circ W^{-1} \circ W \subset V.$$

Comme $(a', a) \in R^{-1} \subset V^{-1}$, on obtient $(x, a) \in V \circ V^{-1}$, et par suite $x \in V \circ V^{-1}(a)$. Donc

$$X \subseteq V \circ V^{-1}(a) \subset A, \text{ et } A \in \mathfrak{F},$$

ce qui achève la démonstration.

Les propositions 19 et 20 donnent le théorème suivant :

THEOREME. *UN ESPACE PREUNIFORME EST COMPLET A GAUCHE SSI IL EST COMPLET A DROITE.*

2.5. *SEPARE ET COMPLETE D'UN ESPACE PREUNIFORME.*

Soit $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ un espace préuniforme. Nous allons construire un espace préuniforme complet $(\hat{E}, (\hat{\mathfrak{U}}, \hat{R}), \hat{E}')$ tel que $\hat{R}$ soit une bijection de $\hat{E}$ vers $\hat{E}'$. Nous montrerons de plus qu'il existe une application $i \times i'$ de $E \times E'$ dans $\hat{E} \times \hat{E}'$, préuniformément continue, telle que $i \times i'\ (E \times E')$ soit partout dense sur $\hat{E} \times \hat{E}'$.

PROPOSITION 21. *Si $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy minimal sur E pour ${}^*\mathfrak{U}$, alors $R(\mathfrak{F})$ est un filtre de Cauchy minimal sur E' pour $\mathfrak{U}^*$.*

On sait que $R(\mathfrak{F})$ est un filtre de Cauchy pour $\mathfrak{U}^*$ (Cf. §2-4, proposition 19). Montrons que $R(\mathfrak{F})$ est minimal pour $\mathfrak{U}^*$.

Soit en effet $\mathfrak{F}'$ un filtre de Cauchy pour $\mathfrak{U}^*$ tel que $\mathfrak{F}' \subset R(\mathfrak{F})$. On a alors $R^{-1}(\mathfrak{F}') \subset R^{-1}(R(\mathfrak{F}))$. Or, pour toute partie A élément de $\mathfrak{F}$, on a $A \subset R^{-1}(R(A))$, ce qui montre que $R^{-1}(R(\mathfrak{F})) \subset \mathfrak{F}$. Par suite $R^{-1}(\mathfrak{F}') \subset \mathfrak{F}$. Comme $R^{-1}(\mathfrak{F}')$ est un filtre de Cauchy, et que $\mathfrak{F}$ est minimal, il vient $R^{-1}(\mathfrak{F}') = \mathfrak{F}$. D'où $R(R^{-1}(\mathfrak{F}')) = R(\mathfrak{F})$. De la relation $R(R^{-1}(\mathfrak{F}')) \subset \mathfrak{F}'$, on déduit $R(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{F}'$. Par suite $R(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}'$.

THEOREME. *L'application $\mathfrak{F} \to R(\mathfrak{F})$, définie sur l'ensemble $\hat{E}$ des filtres de Cauchy minimaux sur E pour $*\mathfrak{U}$, est une bijection de $\hat{E}$ vers l'ensemble $\hat{E}'$ des filtres de Cauchy minimaux sur E' pour $\mathfrak{U}*$.*

D'après la proposition 21, cette application est bien définie de $\hat{E}$ vers $\hat{E}'$. Supposons que $R(\mathfrak{F}_1) = R(\mathfrak{F}_2)$. On a alors $R^{-1}(R(\mathfrak{F}_1)) = R^{-1}(R(\mathfrak{F}_2))$.

Mais comme $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ sont minimaux, il vient :

$$\mathfrak{F}_1 = R^{-1}(R(\mathfrak{F}_1)) = R^{-1}(R(\mathfrak{F}_2)) = \mathfrak{F}_2 .$$

D'où $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$, et ce qui achève la démonstration.

Désignons alors par $\hat{R}$ la bijection de $\hat{E}$ vers $\hat{E}'$, définie par :

$$(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}') \in \hat{R} \text{ si } \mathfrak{F}' = R(\mathfrak{F}),$$

et considérons les espaces uniformes $(E, *\mathfrak{U})$ et $(E', \mathfrak{U}*)$; soient $(\hat{E}, *\hat{\mathfrak{U}})$ et $(\hat{E}', \hat{\mathfrak{U}}*)$ respectivement les séparés complétés de $(E, *\mathfrak{U})$ et de $(E', \mathfrak{U}*)$.

Montrons que la bistructure uniforme $((\hat{E}, *\hat{\mathfrak{U}}), \hat{R}, (\hat{E}', \hat{\mathfrak{U}}*))$ est préuniformisable. Appliquons alors la proposition 7, § 1-4.

Comme $\hat{R}$ est une bijection, il est clair que :

$$\hat{R} \circ (\hat{R})^{-1} \subset \mathcal{V} \text{ pour tout } \mathcal{V} \in *\hat{\mathfrak{U}},$$

$$(\hat{R})^{-1} \circ \hat{R} \subset \mathcal{V}' \text{ pour tout } \mathcal{V}' \in \hat{\mathfrak{U}}* .$$

Pour établir les conditions 3 et 4 de cette proposition, démontrons d'abord le lemme suivant :

LEMME. *Si A est une partie de $E \times E$ telle que $A \times A \subset V \circ V^{-1}$, alors $R(A) \times R(A) \subset (V^{-1} \circ V)^2$.*

Soit en effet $(a', b') \in R(A) \times R(A)$. Il existe $(a, b) \in A \times A$, tel que :

$$(a', a) \in R^{-1} \subset V^{-1}, \ (a, b) \in V \circ V^{-1} \text{ et } (b, b') \in R \subset V.$$

D'où

$$(a', b') \in V^{-1} \circ V \circ V^{-1} \circ V = (V^{-1} \circ V)^2 ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Vérifions alors la condition 3 de la proposition 7, § 1-4.

Soit en effet $\mathfrak{V} \in {}^*\hat{\mathfrak{U}}$, et démontrons que $(\hat{R})^{-1} \circ \mathfrak{V} \circ \hat{R}$ est un élément de $\mathfrak{U}^*$. Il existe un $V \in \mathfrak{U}$ tel que : $\widetilde{(V \circ V^{-1})} \subset \mathfrak{V}$, où $\widetilde{(V \circ V^{-1})}$ désigne l'ensemble des couples $(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$ des filtres de Cauchy minimaux sur E, ayant en commun un ensemble A qui soit petit d'ordre $V \circ V^{-1}$.

Montrons alors que $(\hat{R})^{-1} \circ \widetilde{(V \circ V^{-1})} \circ \hat{R} \supset \widetilde{(W^{-1} \circ W)}$, où W est un entourage de R tel que $(W \circ W^{-1})^2 \subset V \circ V^{-1}$.

Soit en effet $(\mathfrak{X}', \mathfrak{F}')$ un élément de $\widetilde{(W^{-1} \circ W)}$. Il existe $A' \in \mathfrak{X}' \cap \mathfrak{F}'$ tel que $A' \times A' \subset W^{-1} \circ W$. D'après le lemme précédent (appliqué à R^{-1} et $\mathfrak{U}^{-1}$), $R^{-1}(A') \times R^{-1}(A') \subset (W \circ W^{-1})^2$. Par conséquent

$$R^{-1}(A') \times R^{-1}(A') \subset V \circ V^{-1},$$

ce qui entraîne $(R^{-1}(\mathfrak{X}'), R^{-1}(\mathfrak{F}')) \in \widetilde{(V \circ V^{-1})}$. Comme

$$(R^{-1}(\mathfrak{F}'), \mathfrak{F}') \in \hat{R} \text{ et } (\mathfrak{X}', R^{-1}(\mathfrak{X}')) \in (\hat{R})^{-1},$$

on a

$$(\mathfrak{X}', \mathfrak{F}') \in (\hat{R})^{-1} \circ \widetilde{(V \circ V^{-1})} \circ \hat{R},$$

$$\text{d'où } (\hat{R})^{-1} \circ \mathfrak{V} \circ \hat{R} \supset \widetilde{(W^{-1} \circ W)}.$$

Ceci prouve que $(\hat{R})^{-1} \circ \mathfrak{V} \circ \hat{R}$ est un élément de $\hat{\mathfrak{U}}^*$.

On montre de même que, si $\mathfrak{V}'$ est un élément de $\hat{\mathfrak{U}}^*$, alors $\hat{R} \circ \mathfrak{V}' \circ (\hat{R})^{-1}$ est un élément de ${}^*\hat{\mathfrak{U}}$.

Il en résulte que la bistructure uniforme $((\hat{E}, {}^*\hat{\mathfrak{U}}), \hat{R}, (\hat{E}', \hat{\mathfrak{U}}^*))$ est préuniformisable.

Soit alors $(\hat{\mathfrak{U}}, \hat{R})$ la structure préuniforme sur $\hat{E} \times \hat{E}'$ définie par la proposition 7, § 1-4. Puisque $\hat{R}$ est une bijection de $\hat{E}$ vers $\hat{E}'$, l'espace préuniforme $(\hat{E}, (\hat{\mathfrak{U}}, \hat{R}), \hat{E}')$ répond à la première condition posée au début du sous-paragraphe.

Soit i l'application de l'espace uniforme $(E, {}^*\mathfrak{U})$ dans l'espace uniforme $(\hat{E}, {}^*\hat{\mathfrak{U}})$ qui, à $x \in E$, associe le filtre des voisinages de x

dans $*T$; soit de même i' l'application qui, à $x' \in E'$, associe le filtre des voisinages de x' dans T^*.

On sait que i et i' sont respectivement uniformément continues de $(E, *\mathfrak{U})$ dans $(\hat{E}, *\hat{\mathfrak{U}})$ et de $(E', \mathfrak{U}^*)$ dans $(\hat{E}', \hat{\mathfrak{U}}^*)$.

Montrons que $i \times i'(R) \subset \hat{R}$. Autrement dit, si $\mathfrak{H}(x)$ et $\mathfrak{H}'(x')$ désignent respectivement les filtres des voisinages de x dans $*T$ et de x' dans T'^* et si $(x, x') \in R$, alors $R(\mathfrak{H}(x)) = \mathfrak{H}'(x')$.

Comme $R^{-1}(R(\mathfrak{H}(x))) = \mathfrak{H}(x)$, la proposition 19 (appliquée à R^{-1} et $\mathfrak{U}^{-1}$) entraîne que $R(\mathfrak{H}(x))$ converge vers x'. Par conséquent $\mathfrak{H}'(x') \subset R(\mathfrak{H}(x))$. Les deux filtres $\mathfrak{H}'(x')$ et $R(\mathfrak{H}(x))$ étant des filtres de Cauchy, il vient $R(\mathfrak{H}(x)) = \mathfrak{H}'(x')$.

La proposition 9, § 1-4 montre que l'application $i \times i'$ de l'espace préuniforme $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ dans $(\hat{E}, (\hat{\mathfrak{U}}, \hat{R}), \hat{E}')$ est préuniformément continue.

Enfin il est clair que $i \times i'(E \times E') = i(E) \times i'(E')$ est partout dense sur $\hat{E} \times \hat{E}'$ dans $*\hat{T} \times \hat{T}^*$.

D'où le théorème :

THEOREME. *Soit* $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ *un espace préuniforme. Il existe un espace préuniforme* $(\hat{E}, (\hat{\mathfrak{U}}, \hat{R}), \hat{E}')$ *tel que les deux structures uniformes associées à* $\hat{\mathfrak{U}}$ *soient complètes et séparées, et une application* $i \times i'$ *de* $E \times E'$ *dans* $\hat{E} \times \hat{E}'$ *qui soit préuniformément continue et telle que l'ensemble* $i \times i'(E \times E')$ *soit partout dense sur* $\hat{E} \times \hat{E}'$.

3. Structure préuniforme quasi-compacte.

Nous désignerons encore par $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ un espace préuniforme.

DEFINITION 8. Nous dirons que l'espace préuniforme $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ est *quasi-compact à gauche* si $(E, *\mathfrak{U}, E)$ est un espace uniforme quasi-compact.

Soit donné, pour tout $i \in I$, un espace préuniforme $(E_i, (\mathfrak{U}_i, R_i), E'_i)$ qui soit quasi-compact à gauche, et soit $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ le produit des $(E_i, (\mathfrak{U}_i, R_i), E'_i)$.

Comme $^*\mathfrak{U}$ est le produit des $^*\mathfrak{U}_i$, la topologie $^*T$ associée à $^*\mathfrak{U}$ est le produit des topologies $^*T_i$ associées à $^*\mathfrak{U}_i$, et est donc quasi-compacte comme produit de topologies quasi-compactes. Inversement si $^*T$ est quasi-compacte, chaque $^*T_i$ est quasi-compacte. Ainsi

Pour que le produit d'espaces préuniformes soit quasi-compact a gauche, il faut et il suffit que chacun des facteurs soit quasi-compact à gauche.

THEOREME. *Soient $\mathfrak{F}$ un filtre sur E et $(x, x') \in R$. Pour que $\mathfrak{F}$ admette x pour point adhérent dans $^*T$, il faut et il suffit que $\mathfrak{F}^2 \circ R$ admette (x, x') pour point adhérent dans $^*T \times T^*$.*

En effet, x est un point adhérent à $\mathfrak{F}$ si, et seulement si, il existe un filtre $\mathfrak{F}'$ plus fin que $\mathfrak{F}$ qui converge vers x. Or, d'après le théorème du §2-3, ceci équivaut à dire que $\mathfrak{F}'^2 \circ R$ converge vers tout (x, x'), ce qui signifie que (x, x') est adhérent au filtre $\mathfrak{F}^2 \circ R$ (moins fin que $\mathfrak{F}'^2 \circ R$). Ce qui achève la démonstration.

Soit A une partie de E. Du théorème précédent appliqué au filtre $\mathfrak{F}$ de base $\{A\}$, il résulte

COROLLAIRE. *Soient A une partie de E et $(x, x') \in R$. Alors x est adhérent à A dans $^*T$ si, et seulement si, (x, x') est adhérent à $(A \times A) \circ R$ dans $^*T \times T^*$.*

DEFINITION 9. Nous dirons qu'un espace préuniforme $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ est *quasi-compact à droite* si l'espace uniforme $(E', \mathfrak{U}^*, E')$ est quasi-compact.

PROPOSITION 22. *Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur E. Si $R(\mathfrak{F})$ admet un point adhérent a' dans T^*, tout point a de E tel que $(a, a') \in R$ est point adhérent de $\mathfrak{F}$.*

En effet cette proposition se déduit de la proposition 20, §2-4 par un raisonnement analogue au précédent. De la proposition 22, il résulte

THEOREME. *UN ESPACE PREUNIFORME EST QUASI-COMPACT A GAUCHE SSI IL EST QUASI-COMPACT A DROITE.*

CHAPITRE III

EXEMPLES DE STRUCTURE PREUNIFORME

1. Espace préuniforme fonctionnel.

Soient E un ensemble et $(F, (\mathfrak{D}, P), F')$, un espace préuniforme. Soit $\mathfrak{J}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications de E vers F; de même $\mathfrak{J}(E, F')$ est l'ensemble de toutes les applications de E vers F'. Soit enfin $\mathfrak{S}$ un ensemble non vide de parties de E qui soit stable pour la réunion.

Soit $\hat{P}$ la relation de $\mathfrak{J}(E, F)$ vers $\mathfrak{J}(E, F')$ définie par :

$$(u, u') \in \hat{P} \text{ si } (u(x), u'(x)) \in P \text{ pour tout } x \in \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A.$$

Montrons que $\hat{P}$ est une relation bimultifonctionnelle de $\mathfrak{J}(E, F)$ vers $\mathfrak{J}(E, F')$.

Soit en effet u une application de E vers F. Pour tout $x \in E$, l'ensemble $R(u(x))$ est une partie non vide de F'. D'après l'axiome du choix, il existe un $u'(x) \in R(u(x))$. Il est clair que $(u, u') \in \hat{P}$.

Soit de même une application u' de E vers F'. Pour tout $x \in E$, si $u(x) \in R^{-1}(u'(x))$, le couple (u, u') est un élément de $\hat{P}$.

Pour $A \in \mathfrak{S}$ et pour $V \in \mathfrak{D}$, soit $\mathfrak{W}(A, V)$ l'ensemble des couples (u, u') d'une application u de E vers F et d'une application u' de E vers F' tels que : $(u(x), u'(x)) \in V$ pour tout $x \in A$.

Considérons alors l'ensemble des parties de $\mathfrak{J}(E, F) \times \mathfrak{J}(E, F')$ défini par :

$$(\mathfrak{B}) = \{\mathfrak{W}(A, V) / A \in \mathfrak{S} \text{ et } V \in \mathfrak{D}\}.$$

1) $(\mathfrak{B})$ est une base de filtre sur $\mathfrak{J}(E, F) \times \mathfrak{J}(E, F')$, car $\mathfrak{W}(A, V) \cap \mathfrak{W}(B, W) \supset \mathfrak{W}(A \cup B, V \cap W)$.

2) Pour tout $\mathfrak{W}(A, V)$, on a $\hat{P} \subset \mathfrak{W}(A, V)$. En effet, $(u, u') \in \hat{P}$ entraîne

$$(u(x), u'(x)) \in P \subset V \text{ pour tout } x \in E,$$

c'est-à-dire $(u, u') \in \mathfrak{W}(A, V)$.

3) Vérifions enfin l'axiome $PU\,4$.

Soit un $\mathfrak{W}(A, V)$ donné. Il existe un $W \in \mathfrak{D}$ tel que

$$W \circ W^{-1} \circ W \subset V.$$

Montrons que :

$$\mathfrak{W}(A, W) \circ (\mathfrak{W}(A, W))^{-1} \circ \mathfrak{W}(A, W) \subset \mathfrak{W}(A, V).$$

Soit en effet (u, v') un élément du premier membre.

Cela revient à dire qu'il existe $u' \in \mathfrak{J}(E, F')$ et $v \in \mathfrak{J}(E, F)$ tels que

$$(u, u') \in \mathfrak{W}(A, W),$$

$$(v, u') \in \mathfrak{W}(A, W),$$

$$(v, v') \in \mathfrak{W}(A, W).$$

Pour tout $x \in A$, on a :

$$(u(x), u'(x)) \in W, \quad (u'(x), v(x)) \in W^{-1} \text{ et } (v(x), v'(x)) \in W.$$

Par conséquent $(u(x), v'(x)) \in W \circ W^{-1} \circ W \subset V$, d'où $(u, v') \in \mathfrak{W}(A, V)$. Ceci achève la démonstration.

Soit alors $\hat{\mathfrak{D}}$ le filtre engendré par $(\mathfrak{B})$, il est clair que le couple $(\hat{\mathfrak{D}}, \hat{P})$ *est une structure préuniforme sur l'ensemble* $\mathfrak{J}(E, F) \times \mathfrak{J}(E, F')$.

- Si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties finies de E, la structure préuniforme correspondante est alors appelée la *structure préuniforme de la convergence simple.*

- Si $\mathfrak{S} = \{E\}$, la structure préuniforme correspondante est appelée la *structure préuniforme de la convergence uniforme.*

- Si E est muni d'une topologie et si on prend pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties compactes de E, la structure uniforme correspondante est appelée *structure préuniforme de la convergence compacte.*

PROPOSITION 1. *La structure* $*(\hat{\mathfrak{D}})$ *est identique à la structure uniforme sur* $\mathfrak{J}(E, F)^2$ *associée**) *à* $\mathfrak{S}$ *et à la structure uniforme sur* $(F, {}^*\mathfrak{D}, F)$.

*) C'est-à-dire la structure uniforme de la $\mathfrak{S}$-convergence sur $\mathfrak{J}(E, F)$, au sens de Bourbaki, lorsque F est muni de la structure uniforme ${}^*\mathfrak{D}$.

a) Soit en effet $\mathfrak{X}$ un entourage de la diagonale de $\mathfrak{J}(E,F)$ pour la structure uniforme $*(\hat{\mathfrak{D}})$. Il existe un $\mathfrak{W}(A,V)$, tel que

$$\mathfrak{W}(A,V)\circ(\mathfrak{W}(A,V))^{-1}\subset\mathfrak{X}.$$

Montrons que $\mathfrak{W}(A,V\circ V^{-1})\subset\mathfrak{X}$. Soit en effet (u,v) un élément du premier membre. Pour tout $x\in A$, on a $(u(x),v(x))\in V\circ V^{-1}$; il existe donc, d'après l'axiome du choix, un $u'(x)\in F'$ tel que $(u(x),u'(x))\in V$ et $(u'(x),v(x))\in V^{-1}$.

Si $\overline{u'}$ est une extension quelconque de u' à E, on a :

$$(u,\overline{u'})\in\mathfrak{W}(A,V) \text{ et } (\overline{u'},v)\in(\mathfrak{W}(A,V^{-1})), \text{ d'où } (u,v)\in\mathfrak{X}.$$

b) Soit réciproquement $\mathfrak{X}$ un entourage de la diagonale de $\mathfrak{J}(E,F)$ pour la structure uniforme associée à $*\mathfrak{D}$. Il existe un $V\in\mathfrak{D}$ tel que $\mathfrak{W}(A,V\circ V^{-1})\subset\mathfrak{X}$. Montrons que $\mathfrak{W}(A,V)\circ(\mathfrak{W}(A,V))^{-1}\subset\mathfrak{X}$.

Soit en effet (u,v) un élément du premier membre.

Il existe un $u'\in\mathfrak{J}(E,F')$ tel que :

$$(u,u')\in\mathfrak{W}(A,V) \text{ et } (u',v)\in(\mathfrak{W}(A,V))^{-1}.$$

Pour tout $x\in A$, on a donc

$$(u(x),u'(x))\in V \text{ et } (u'(x),v(x))\in V^{-1},$$

et par suite $(u(x),v(x))\in V\circ V^{-1}$. D'où $(u,v)\in\mathfrak{W}(A,V\circ V^{-1})\subset\mathfrak{X}$, ce qui achève la démonstration.

De même $(\hat{\mathfrak{D}})^*$ est identique à la structure uniforme sur $\mathfrak{J}(E,F')^2$ associée à $\mathfrak{S}$ et à la structure uniforme $(F',\mathfrak{D}^*,F')$.

Nous allons supposer maintenant que $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties de E tel que, pour tout $x\in E$, il existe au moins un $A_x\in\mathfrak{S}$ auquel appartient $\mathfrak{X}$.

PROPOSITION 2. *Si $(F,(\mathfrak{D},P),F')$ est P-séparé, alors*

$$(\mathfrak{J}(E,F),(\hat{\mathfrak{D}},\hat{P}),\mathfrak{J}(E,F'))$$

est $\hat{P}$-séparé.

D'après la proposition 5, § 1-3, Ch. 2, il suffit de montrer que l'intersection de tous les entourages de la relation $\hat{P}$ est égale à $\hat{P}$. Soit à cet effet $(u,u')\in\mathfrak{J}(E,F)\times\mathfrak{J}(E,F')$ tel que $(u,u')\in\mathfrak{W}(A,V)$ pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et pour tout $V \in \mathfrak{D}$. Soit $x \in E$; il existe un $A_x \in \mathfrak{S}$ tel que $x \in A_x$.

Pour tout $V \in \mathfrak{D}$, on a donc $(u(x), u'(x)) \in V$.

Comme $(F, (\mathfrak{D}, P), F')$ est P-séparé, il vient $(u(x), u'(x)) \in P$, d'où $(u, u') \in \hat{P}$.

PROPOSITION 3. *Si* $(\mathcal{J}(E, F), (\hat{\mathfrak{D}}, \hat{P}), \mathcal{J}(E, F'))$ *est* $\hat{P}$*-séparé, alors* $(F, (\mathfrak{D}, P), F')$ *est* P*-séparé.*

Soit en effet $(a, a') \in F \times F'$ tel que $(a, a') \in V$ pour tout $V \in \mathfrak{D}$. Soient λ_a et $\lambda_{a'}$ les applications de E dans F et dans F', définies par $\lambda_a(x) = a$ et $\lambda_{a'}(x) = a'$. Comme $(\lambda_a, \lambda_{a'}) \in \mathfrak{W}(A, V)$ pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et pour tout $V \in \mathfrak{D}$, on a $(\lambda_a, \lambda_{a'}) \in \hat{P}$; il s'ensuit

$$(\lambda_a(x), \lambda_{a'}(x)) \in P \text{ et } (a, a') \in P.$$

Ceci prouve :

THEOREME. *L'espace préuniforme* $(\mathcal{J}(E, F), (\hat{\mathfrak{D}}, \hat{P}), \mathcal{J}(E, F'))$ *est* $\hat{P}$*-séparé si, et seulement si,* $(F, (\mathfrak{D}, P), F')$ *est* P*-séparé.*

Terminons ce paragraphe en remarquant que, si $(F, (\mathfrak{D}, P), F')$ est complet à gauche, l'espace préuniforme $(\mathcal{J}(E, F), (\hat{\mathfrak{D}}, \hat{P}), \mathcal{J}(E, F'))$ est complet à gauche.

En effet d'après la proposition 1, $*(\hat{\mathfrak{D}})$ est identique à la structure uniforme sur $\mathcal{J}(E, F)^2$ associée à la structure uniforme $(F, *\mathfrak{D}, F)$. Or par hypothèse $*\mathfrak{D}$ est une structure uniforme complète; on sait alors que $\mathcal{J}(E, F)$ est un espace complet relativement à $*(\hat{\mathfrak{D}})$.

Réciproquement si nous supposons que $(\mathcal{J}(E, F), (\hat{\mathfrak{D}}, \hat{P}), \mathcal{J}(E, F'))$ est complet à gauche, $\mathcal{J}(E, F)$ est complet par rapport à la structure uniforme associée à $\mathfrak{S}$ et à la structure uniforme $(F, *\mathfrak{D}, F)$, ce qui montre que l'espace $(F, *\mathfrak{D}, F)$ est complet.

Ainsi :

Pour qu'un espace préuniforme fonctionnel soit complet à gauche, il faut et il suffit que l'espace préuniforme des images soit complet à gauche.

2. Espace prémétrique.

DEFINITION. Un *espace prémétrique* (E, d, E') est constitué par deux ensembles E et E', et une application d de $E \times E'$ dans l'ensemble des nombres positifs ou nuls(*) vérifiant les axiomes suivants :

PM 1) Pour tout $a \in E$, il existe au moins un $\hat{a} \in E'$ tel que $d(a, \hat{a}) = 0$.

PM 2) Pour tout $a' \in E'$, il existe au moins un $\hat{a}' \in E$ tel que $d(\hat{a}', a') = 0$.

PM 3) Pour tout couple a et b d'éléments de E, et pour tout couple a' et b' d'éléments de E', on a :

$$d(a, b') \leq d(a, a') + d(b, a') + d(b, b').$$

Le nombre $d(a, a')$ sera appelé la *distance de* a à a'. L'axiome PM 3) sera appelé l'inégalité *quadrangulaire.*

Nous allons voir comment, à partir d'un espace prémétrique (E, d, E'), nous induisons des écarts sur E et sur E'.

PROPOSITION 4. *Soit b un point de E, b'_1 et b'_2 deux points de E' tels que $d(b, b'_1) = 0 = d(b, b'_2)$. Pour tout point a de E on a :*

$$d(a, b'_1) = d(a, b'_2).$$

D'après l'inégalité quadrangulaire on a :

$$d(a, b'_1) \leq d(a, b'_2) + d(b, b'_2) + d(b, b'_1),$$

d'où $d(a, b'_1) \leq d(a, b'_2)$. On a de même

$$d(a, b'_2) \leq d(a, b'_1) + d(b, b'_1) + d(b, b'_2),$$

d'où $d(a, b'_2) \leq d(a, b'_1)$. Il en résulte $d(a, b'_1) = d(a, b'_2)$.

PROPOSITION 5. *En posant $*d(a, b) = d(a, \hat{b})$ si $(a, b) \in E \times E$ et $d(b, \hat{b}) = 0$, alors $*d$ est un écart sur E.*

Remarquons d'abord que la proposition 4 montre que le nombre $*d(a, b)$ ne dépend pas du représentant $\hat{b}$ tel que $d(b, \hat{b}) = 0$.

Ceci dit on a :

$$*d(a, a) = d(a, \hat{a}) = 0.$$

(*) Plus généralement dans l'intervalle $[0, \infty]$.

$*d$ est symétrique, car

$$*d(a,b) = d(a,\hat{b}) \leq d(a,\hat{a}) + d(b,\hat{a}) + d(b,\hat{b})$$
$$= d(b,\hat{a}) = *d(b,a).$$

On a de même

$$*d(b,a) = d(b,\hat{a}) \leq d(b,\hat{b}) + d(a,\hat{b}) + d(b,\hat{b})$$
$$= d(a,\hat{b}) = *d(a,b),$$

d'où $*d(a,b) = *d(b,a)$. Vérifions enfin l'inégalité triangulaire. On a, en utilisant l'inégalité quadrangulaire :

$$*d(a,b) + *d(b,c) = d(a,\hat{b}) + d(b,\hat{b}) + d(b,\hat{c}) \geq d(a,\hat{c}) = *d(a,c).$$

Ce qui achève la démonstration.

Nous appellerons $*d$ *l'écart induit par* d *sur* E. On voit de même que, en posant

$$d*(a',b') = d(\hat{a}',b') \text{ si } (a',b') \in E' \times E',$$

alors $d*$ est un écart sur E', que nous appellerons *l'écart induit par* d *sur* E'.

2.1. STRUCTURE PREUNIFORME ASSOCIEE A UN ESPACE PREMETRIQUE.

Soit (E,d,E') un espace prémétrique. Posons :

$$R = \{(a,a')/d(a,a') = 0\},$$

et, si ε est un nombre strictement positif,

$$V_\varepsilon = \{(a,a')/d(a,a') < \varepsilon\}.$$

PROPOSITION 6. *Si* $\mathfrak{U}$ *est l'ensemble des parties de* $E \times E'$ *contenant un* V_ε, *le couple* $(\mathfrak{U}, R)$ *est une structure préuniforme sur* $E \times E'$.

1) Il est clair que R est une relation bimultifonctionnelle de E vers E'.

2) L'ensemble des V_ε est évidemment une base de filtre sur $E \times E'$, donc $\mathfrak{U}$ est un filtre sur $E \times E'$.

3) Soit un $X \in \mathfrak{U}$. Il existe un ε tel que $V_\varepsilon \subset X$. Montrons que :

$$V_{\varepsilon/3} \circ V_{\varepsilon/3}^{-1} \circ V_{\varepsilon/3} \subset V_\varepsilon .$$

Soit en effet (a, b') un élément du premier membre. Cela revient à dire qu'il existe $a' \in E'$ et $b \in E$ tels que :

$$d(a, a') < \varepsilon/3, \quad d(b, a') < \varepsilon/3 \quad \text{et} \quad d(b, b') < \varepsilon/3.$$

D'après l'inégalité quadrangulaire $d(a, b') < \varepsilon$. Donc $(a, b') \in V_\varepsilon$.

PROPOSITION 7. *L'espace préuniforme* $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ *est toujours* R*-séparé.*

Si en effet (a, a') est un élément de $E \times E'$ tel que $(a, a') \in V$ pour tout $V \in \mathfrak{U}$, on a $(a, a') \in V_\varepsilon$ pour tout ε positif, et par suite $d(a, a') = 0$ et $(a, a') \in R$. Ce qui achève la démonstration.

On montre que, si (E, d, E') est un espace prémétrique, *les structures uniformes associées aux écarts* $*d$ *et* $d*$ *sont respectivement identiques à* $*\mathfrak{U}$ *et* $\mathfrak{U}*$.

DEFINITION 1. Nous dirons qu'un espace préuniforme $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ est *prémétrisable* s'il existe une fonction d telle que (E, d, E') soit un espace prémétrique et que la structure préuniforme associée à d soit identique à $(\mathfrak{U}, R)$.

D'après la proposition 7, si $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ est métrisable, R est nécessairement un fermé de $E \times E'$ pour la topologie T déduite de $\mathfrak{U}$, et par exemple $\mathfrak{U}*$ est écartisable.

Montrons réciproquement que cette double condition est suffisante. Supposons en effet que p soit un écart sur E' tel que la structure uniforme associée à p soit identique à $\mathfrak{U}*$. Posons alors $d(a, b') = p(a', b')$ si a' est un point de E' tel que $(a, a') \in R$, et établissons les lemmes suivants.

LEMME 1. *Le nombre* $p(a', b')$ *ne dépend pas du représentant* a' *tel que* $(a, a') \in R$.

Soient en effet a'_1 et a'_2 deux points de E' tels que (a, a'_1) et $(a, a'_2) \in R$. On a

$$(a, a'_1) \in R \quad \text{et} \quad (a'_2, a) \in R^{-1}.$$

D'où $(a'_2, a'_1) \in R^{-1} \circ R$. Cela revient à dire que (a'_2, a'_1) appartient à tout p-entourage de E'; par conséquent $p(a'_2, a'_1) = 0$. Il en résulte

$$p(a'_1, b') = p(a'_2, b') \text{ pour tout } b' \in E'.$$

LEMME 2. *Le triplet* (E, d, E') *est un espace prémétrique.*

1) Soit $a' \in E'$. Il existe un $a \in E$ tel que $(a, a') \in R$. Et l'on a : $d(a, a') = p(a', a') = 0$.

2) Soit $a \in E$. Il existe un $a' \in E'$ tel que $(a, a') \in R$. On a de même $d(a, a') = p(a', a') = 0$.

3) Vérifions l'inégalité quadrangulaire. Soient a et $b \in E$ et a' et $b' \in E'$. Alors

$$d(a, a') + d(b, a') + d(b, b') = p(\hat{a}, a') + p(\hat{b}, a') + p(\hat{b}, b'),$$

si $(a, \hat{a})$ et $(b, \hat{b}) \in R$. D'où

$$d(a, a') + d(b, a') + d(b, b') \geq p(\hat{a}, b') = d(a, b').$$

PROPOSITION 8. *La structure préuniforme associée à d est identique à* $(\mathfrak{U}, R)$.

1) Montrons que R est l'ensemble des couples (a, a') tels que $d(a, a') = 0$.

Si $(a, a') \in R$, alors $d(a, a') = p(a', a') = 0$.

Si réciproquement $d(a, b') = 0$, alors $p(a', b') = 0$, si a' est un point de E' tel que $(a, a') \in R$. Par conséquent $(a, a') \in V$, et $(a', b') \in V^{-1} \circ V$, pour tout $V \in \mathfrak{U}$. Par suite (a, b') appartient à chaque élément de $\mathfrak{U}$. Comme par hypothèse R est un fermé de $E \times E$ pour T, on a donc $(a, b') \in R$.

2) Soit $V \in \mathfrak{U}$. Il existe un $W \in \mathfrak{U}$ tel que $W \circ W^{-1} \circ W \subset V$. Comme $W^{-1} \circ W$ est un entourage de E', il existe un nombre positif ε tel que :

$$p(a', b') < \varepsilon \text{ entraîne } (a', b') \in W^{-1} \circ W.$$

Montrons alors que le d-entourage V_ε de R est contenu dans V.

Soit en effet $(a, b') \in V_\varepsilon$. Pour un $a' \in E'$ tel que $(a, a') \in R$, on a $p(a', b') < \varepsilon$. D'où

$$(a, a') \in W \text{ et } (a', b') \in W^{-1} \circ W.$$

Par suite

$$(a, b') \in W \circ W^{-1} \circ W \subset V, \text{ et } V_\varepsilon \subset V.$$

Ce qui montre que V est un d-entourage de R.

3) Soit réciproquement V_ε un d-entourage de R. Montrons d'abord que $V_\varepsilon^{-1} \circ R$ contient un p-entourage de E'.

Supposons en effet que $p(a', b') < \varepsilon$. Si b est un point de E tel que $(b, b') \in R$, on a :

$$(b, b') \in R \text{ et } p(b', a') < \varepsilon.$$

Par suite $d(b, a') < \varepsilon$, et $(b, a') \in V_\varepsilon$. D'où

$$(a', b) \in V_\varepsilon^{-1} \text{ et } (a', b') \in V_\varepsilon^{-1} \circ R.$$

Il existe par conséquent un $W \in \mathfrak{U}$ tel que $V_\varepsilon^{-1} \circ R \supset W^{-1} \circ W$. Montrons alors que $V_\varepsilon \supset R \circ W^{-1} \circ W$. Soit en effet $(a, b') \in R \circ W^{-1} \circ W$. Il existe a' tel que $(a, a') \in R$ et $(a', b') \in W^{-1} \circ W$. En particulier

$$d(a, b') = p(a', b'). \tag{1}$$

Comme $(a', b') \in W^{-1} \circ W \subset V_\varepsilon^{-1} \circ R$, il existe un $b \in E$ tel que $(a', b) \in V_\varepsilon^{-1}$ et $(b, b') \in R$. D'où

$$p(b', a') = d(b, a') < \varepsilon.$$

En tenant compte de la relation *(1)*, on a donc $d(a, b') < \varepsilon$, ce qui prouve que $(a, b') \in V_\varepsilon$ et que $V_\varepsilon \in \mathfrak{U}$, et achève la démonstration. Il s'ensuit :

THEOREME. *POUR QUE L'ESPACE PREUNIFORME $(E, (\mathfrak{U}, R), E')$ SOIT PREMETRISABLE, IL FAUT ET IL SUFFIT QUE R SOITUN FERME DE $^*T \times T^*$, ET QUE L'UNE DES DEUX STRUCTURES UNIFORMES $^*\mathfrak{U}$ ET $\mathfrak{U}^*$ SOIT ECARTISABLE.*

Signalons quelques résultats que nous donnerons sans démonstration.

1) Si nous désignons par $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ l'ensemble des espaces prémétriques (E, d, E') lorsque E et E' parcourent un univers, et par $\mathfrak{P}\mathfrak{M}_o$ l'ensemble des espaces (E, δ, E) munis d'un écart, les applications suivantes :

$$(E, d, E') \to \beta(E, d, E') = (E, {}^*d, E),$$

$$(E, d, E') \to \alpha(E, d, E') = (E', d^*, E'),$$

sont deux rétractions de $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{P}\mathfrak{M}_o$.

Si (E, d, E') et (F, r, F') sont deux espaces prémétriques tels que $\alpha(E, d, E') = \beta(F, r, F')$, l'opération définie par

$$(E, d, E') \circ (F, r, F') = (E, d \circ r, F'), \text{ où } d \circ r \text{ est la fonction}$$
$$\text{définie par } d \circ r(a, b') = r(\hat{a}, b') \text{ si } d(a, \hat{a}) = 0,$$

est telle que *l'ensemble* $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ *est un groupoïde dont la classe des unités est l'ensemble des espaces munis d'un écart.*

2) On peut donner une définition séquentielle d'un espace prémétrique complet (sans faire intervenir la structure préuniforme associée) en procédant de la manière suivante : Soit (E, d, E') un espace prémétrique.

Une suite (x_n) de points de E est dite d-convergente vers un point x' de E' si, pour tout nombre positif ε, il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que $n \geq n(\varepsilon)$ entraîne $d(x_n, x') \leq \varepsilon$.

On montre que (x_n) est d-convergente vers x' si, et seulement si, la suite (x_n) converge vers $\hat{x}'$ dans l'espace métrique $(E, {}^*d, E)$.

Une suite (x_n) de points de E est dite une d-suite de Cauchy si, pour tout nombre positif ε, il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que n et $m \geq n(\varepsilon)$ entraînent $d(x_n, \hat{x}_m) \leq \varepsilon$.

Un espace prémétrique est dit d-complet à gauche si toute d-suite de Cauchy de points de E est d-convergente. On montre qu'un espace prémétrique est complet à gauche si, et seulement si, l'espace préuniforme associé est complet à gauche.

3) On procède de même pour la quasi- compacité.

3. Groupe préuniforme.

DEFINITION 2. Soient G et G' deux groupes (dont les lois de composition sont notés sans signe, et dont les éléments unités sont respectivement e et e'). Nous dirons que $(H, \times)$ est *un produit préuniforme de* G *et* G' si H est un groupe (dont l'élément unité est noté 1) et $\times$ une application de $G \times G'$ dans H vérifiant les propriétés suivantes :

GP 1) Pour tout $a \in G$, il existe au moins un $\hat{a} \in G'$ tel que $a \times \hat{a} = 1$.

GP 2) Pour tout $a' \in G'$, il existe au moins un $\hat{a}' \in G$ tel que $\hat{a}' \times a' = 1$.

GP 3) Pour tout couple d'éléments a et b de G, et pour tout couple d'éléments a' et b' de G', on a $(a \times a')(b \times b') = ab \times a'b'$.

Remarquons que deux groupes G et G' admettent toujours un produit uniforme qui s'obtient par exemple en prenant $H = G$ et $a \times a' = e$ pour tout $a \in G$ et $a' \in G'$. Si G est un groupe abélien, $(G, \times)$ est un produit préuniforme de G et G en posant $a \times a' = aa'$.

Remarquons également que l'application qui à $(a, a') \in G \times G'$ fait correspondre $a \times a' \in H$ est un homomorphisme entre les groupes $G \times G'$ et H. Par conséquent $e \times e' = 1$ et $(a \times a')^{-1} = a^{-1} \times a'^{-1}$.

Si $(H, \times)$ est un produit préuniforme de G et G', on voit qu'en posant $(a, a') \in R$ si $a \times a'^{-1} = 1$, R est une relation bimultifonctionnelle de E vers E'.

DEFINITION 3. Un *groupe préuniforme* $(G,(H,\times, T), G')$ est le triplet formé par deux groupes G et G' et par un produit préuniforme $(H, \times)$ de G et de G', lorsque de plus H est muni d'une topologie T compatible avec sa structure de groupe.

Considérons le filtre des voisinages de 1 dans T, que nous désignerons par $\mathfrak{V}(1)$, et voyons comment à un groupe préuniforme est associée une structure préuniforme.

PROPOSITION 9. *Si, pour tout* $X \in \mathfrak{V}(1)$, $d(X)$ *est l'ensemble des couples* (a, a') *tels que* $a \times a'^{-1} \in X$, *les* $d(X)$ *engendrent un filtre* $\mathfrak{U}_d$ *tel que le couple* $(\mathfrak{U}_d, R)$ *soit une structure préuniforme sur* $G \times G'$.

1) On sait que R est en particulier bimultifonctionnelle.

2) Pour tout $X \in \mathfrak{V}(1)$, on a $R \subseteq d(X)$, car $(a, a') \in R$ entraîne $a \times a'^{-1} = 1 \in X$.

3) Il est clair que, si X_1 et X_2 sont deux éléments de $\mathfrak{V}(1)$ tels que $X_1 \subseteq X_2$, alors $d(X_1) \subseteq d(X_2)$. Ce qui montre que les $d(X)$ lorsque X parcourt $\mathfrak{V}(1)$ constituent une base de filtre sur $G \times G'$.

4) Soit un $d(X)$ donné. Il existe un voisinage Y symétrique de 1 dans H tel que $Y\,Y\,Y \subseteq X$. Montrons que $d(Y) \circ (d(Y))^{-1} \circ d(Y) \subseteq d(X)$. Soit en effet (a, b') un élément du premier membre. Il existe donc a' et b tels que $(a, a') \in d(Y)$, $(a', b) \in (d(Y))^{-1}$ et $(b, b') \in d(Y)$, c'est-à-dire $a \times a'^{-1} \in Y$, $b \times a'^{-1} \in Y$ et $b \times b'^{-1} \in Y$. Comme $Y = Y^{-1}$, on a

aussi $b^{-1} \times a' \in Y^{-1}$, d'où :

$$(a \times a'^{-1})(b^{-1} \times a')(b \times b'^{-1}) \in Y\,Y\,Y \subseteq X.$$

Ce qui revient à dire que $a \times b'^{-1} \in X$, et que $(a, b') \in d(X)$. Ceci achève la démonstration.

Si $\mathfrak{U}_d$ est le filtre engendré par les $d(X)$ lorsque X parcourt $\mathfrak{V}(1)$, le couple $(\mathfrak{U}, R)$ est donc une structure préuniforme sur $G \times G'$, que nous appellerons *la structure préuniforme droite* associée au produit $(H, \times, T)$ de G et de G'.

Si nous définissons $g(X)$, pour tout $X \in \mathfrak{V}(1)$, comme l'ensemble des couples (a, a') tels que $a^{-1} \times a' \in X$, en remarquant que R est encore la relation de E vers E' vérifiée par le couple (a, a') si, et seulement si, $a^{-1} \times a' = 1$ (en effet $a \times a'^{-1} = 1$ entraîne $(a \times a'^{-1})^{-1} = = a^{-1} \times a' = 1$), on montre d'une manière analogue que :

PROPOSITION 10. *L'ensemble des $g(X)$, lorsque X parcourt $\mathfrak{V}(1)$, engendre un filtre $\mathfrak{U}_g$ tel que le couple $(\mathfrak{U}_g, R)$ soit une structure préuniforme sur $G \times G'$.*

Nous appellerons $(\mathfrak{U}_g, R)$ la *structure préuniforme gauche associée.*

PROPOSITION 13. *L'application $(a, a') \overset{r}{\to} (a^{-1}, a'^{-1})$ est un isomorphisme des espaces préuniformes $(G, (\mathfrak{U}_g, R), G')$ et $(G, (\mathfrak{U}_d, R), G')$.*

Soit en effet un $V \in \mathfrak{U}_g$. Il existe un $X \in \mathfrak{V}(1)$ tel que $g(X) \subseteq V$. Montrons que $r(g(X)) = d(X)$. Soit en effet $(a, a') \in g(X)$. Cela revient à dire que $a^{-1} \times a' \in X$. Par conséquent $a^{-1} \times (a'^{-1})^{-1} \in X$, ce qui entraîne $r(a, a') = (a^{-1}, a'^{-1}) \in d(X)$.

Soit réciproquement $(a, a') \in d(X)$, c'est-à-dire $a \times a'^{-1} \in X$, soit encore $(a^{-1})^{-1} \times (a'^{-1}) \in X$; par suite $(a, a') = r(a^{-1}, a'^{-1})$, où $(a^{-1}, a'^{-1}) \in g(X)$.

On a donc $r(V) \supseteq d(X)$ et par suite $r(V) \in \mathfrak{U}_d$. On montre de même que, si $W \in \mathfrak{U}_g$, alors $r^{-1}(W) \in \mathfrak{U}_d$.

Ce qui prouve en particulier que, *si l'un des deux espaces préuniformes de la proposition 13 est complet, l'autre l'est aussi.*

PROPOSITION 14. *Si $^*T_d$ est la topologie sur G déduite de $^*\mathfrak{U}_d$, alors $(G, {}^*T_d)$ est un groupe topologique.*

Il s'agit de montrer l'application $(a, b) \to ab^{-1}$ est une application continue de $*T_d \times *T_d$ dans $*T_d$. Soit en effet A un voisinage de ab^{-1} dans G. Il existe un $X \in \mathfrak{V}(1)$ tel que $(d(X) \circ (d(X))^{-1})(ab^{-1}) \subseteq A$. Il suffit alors de montrer que $((d(Y) \circ (d(Y))^{-1}(a))\,((d(Y) \circ (d(Y))^{-1}(b))^{-1}$ est contenu dans $(d(X) \circ (d(X))^{-1}(ab^{-1}))$ pour un $Y \in \mathfrak{V}(1)$.

Soit en effet Y un voisinage symétrique de 1 tel que $YY \subseteq X$. Soit alors xy^{-1} un élément du premier membre de l'inclusion à démontrer. Cela revient à dire qu'il existe

$$(a, a') \in d(Y) \text{ et } (a', x) \in (d(Y))^{-1},$$

$$(b, b') \in d(Y) \text{ et } (b', y) \in (d(Y))^{-1}.$$

Soit encore

$$a \times a'^{-1} \in Y,\; x \times a'^{-1} \in Y,\; b \times b'^{-1} \in Y \text{ et } y \times b'^{-1} \in Y.$$

Comme $Y = Y^{-1}$, on a aussi $b^{-1} \times b' \in Y$ et $y^{-1} \times b' \in Y$, d'où

$$ab^{-1} \times a'^{-1}b' = (a \times a'^{-1})(b^{-1} \times b') \in YY \subseteq X$$

et $$xy^{-1} \times a'^{-1}b' = (x \times a'^{-1})(y^{-1} \times b') \in YY \subseteq X,$$

c'est-à-dire

$$(ab^{-1}, (b'^{-1}a')) \in d(X) \text{ et } (xy^{-1}, (b'^{-1}a')) \in d(X).$$

Il en résulte $xy^{-1} \in (d(X) \circ (d(X))^{-1})(ab^{-1})$, ce qui achève la démonstration.

On montre de même :

PROPOSITION 15. *Si T^*_d est la topologie sur G' déduite de $\mathfrak{U}^*_d$, alors (G', T^*_d) est un groupe topologique.*

PROPOSITION 16. *On a $*T_g = *T_d$ et $T^*_g = T^*_d$.*

Montrons par exemple la première égalité. Il suffit de prouver que T_g et T_d admettent le même filtre de voisinages au point e.

Soit en effet A un voisinage de e pour la topologie $*T_g$. Cela revient à dire qu'il existe un $X \in \mathfrak{V}(1)$ tel que $(g(X) \circ (g(X))^{-1})(e) \subseteq A$. Soit alors Y un voisinage symétrique de 1 tel que $Y \subseteq X$. Montrons que $(d(Y) \circ (d(Y))^{-1})(e)$ est contenu dans $(g(X) \circ (g(X))^{-1})(e)$. Soit en effet a un élément du premier membre de l'inclusion à démontrer. Cela revient à dire que $(a, a') \in d(Y)$ et $(a', e) \in d(Y)$, d'où $a \times a'^{-1} \in Y$ et $e \times a'^{-1} \in Y$. Comme $Y = Y^{-1}$, on a aussi $a^{-1} \times a' \in Y$ et $e \times a' \in Y$, ce qui entraîne $(a, a') \in g(Y) \subseteq g(X)$ et $(e, a') \in g(Y) \subseteq g(X)$, et par suite $a \in (g(X) \circ (g(X))^{-1})(e)$. Par conséquent A est un voisinage de e pour la topologie $*T_d$. On montre de même que, si A est un voisinage de e pour la topologie $*T_d$, c'est un voisinage de e pour la topologie $*T_g$.

PROPOSITION 7. *Si $(G, *T_d)$ est compact, alors $\mathfrak{U}_d = \mathfrak{U}_g$.*

Considérons en effet $*\mathfrak{U}_d$ et $*\mathfrak{U}_g$. Comme $*T_d = *T_g$ et que par exemple $*T_d$ est compacte, on a $*\mathfrak{U}_d = *\mathfrak{U}_g$. D'après la proposition 2, § 1, Chap. 1, $\mathfrak{U}_d = \mathfrak{U}_g$. Ce qui achève la démonstration.

Signalons deux résultats que nous donnerons sans démonstration :

- Si $(G, (H, \times, T), G')$ est un groupe préuniforme, et si (H, T) est un groupe topologique séparé, les structures préuniformes $(\mathfrak{U}_d, R)$ et $(\mathfrak{U}_g, R)$ sont R-séparées.

- Réciproquement, si par exemple $(\mathfrak{U}_d, R)$ est R-séparée et si l'application $(a, a') \to a \times a'$ est surjective, alors (H, T) est séparé.

Bibliographie.

[1] J. LEVY-BRUHL, *Introduction aux structures algébriques,* Dunod, Paris (1968).

[2] N. BOURBAKI, *Topologie Générale,* Livre III, ch. 2, Hermann, Paris.

[3] J. CHACRON, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 268 (1969), p. 267 et 1248.

[4] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory* (Revised Edition), Am. Math. Soc (1948).

[5] C. EHRESMANN, *Catégories et structures,* Dunod, Paris (1965).

[6] M.B. BRINKMANN, Relations for groups and exact categories, *Lecture Notes* 92 (1969), p. 1-9.

[7] D. PUPPE, Korrespondenzen in Abelschen Kategories, *Math. Ann.* 148 (1962), p. 1-30.

TABLE DES MATIERES

Faculté des Sciences

33, rue St Leu

80 - Amiens