CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

CLAUDE ALBERT

Feuilletages invariants et pseudoalgèbres de Lie lisses

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 13, nº 3 (1972), p. 309-323

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1972__13_3_309_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XIII-3

FEUILLETAGES INVARIANTS ET PSEUDOALGEBRES DE LIE LISSES

par Claude ALBERT

INTRODUCTION

Le but de cet article est d'étudier quelques propriétés des pseudoalgèbres de Lie lisses de transformations sur une variété différentiable: la notion de structure lisse, généralisant de près la notion de structure plate, a été introduite par Molino dans [4].

Dans une étude préliminaire, on caractérise les champs d'éléments de contact invariants par une pseudoalgèbre de Lie transitive de transformations (L.A.S. dans la terminologie de Singer-Sternberg) donnée, et on montre que, si un tel champ est intégrable (on donne une condition simple pour cela), la pseudoalgèbre induit sur chaque feuille une pseudoalgèbre de Lie transitive. On obtient par de tels procédés un théorème de réduction généralisant le théorème donné dans [3] pour les structures formellement plates.

Puis on définit les différentes notions de pseudoalgèbres lisses et on montre que ces pseudoalgèbres laissent un feuilletage invariant, ce qui permet de donner une description locale de ces structures. Enfin, en imposant des conditions de lissité «à l'ordre supérieur», on obtient des pseudoalgèbres, dites polies, dont tous les prolongements sont lisses. Là encore l'étude des feuilletages invariants en donne une description locale et permet de montrer que ces pseudoalgèbres se ramènent en fait à un exemple type.

Je tiens à remercier ici Monsieur Molino dont les conseils et les encouragements m'ont été fort utiles dans la préparation de ce travail.

I. FEUILLETAGES INVARIANTS PAR UNE PSEUDOALGEBRE DE LIE

V est une variété C^{ω} ou C^{∞} paracompacte, sans bord et connexe, modelée sur un espace vectoriel réel M de dimension m. On pointe V en x_0, et on désigne par α_{x_0} une carte en x_0 choisie une fois pour toutes. α_{x_0} identifie M avec $T_{x_0} V$.

Soit $\mathcal{L}$ une pseudoalgèbre de Lie transitive sur V. Soit $\mathfrak{L}$ son algèbre formelle, $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{L}_0 \supset \ldots \supset \mathfrak{L}_i \supset \ldots$ sa filtration et

$$gr\,\mathfrak{L} = M \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^i \oplus \ldots$$

l'algèbre graduée associée. Soit E^o la G-structure associée à $\mathcal{L}$ (voir [6]). La donnée de α_{x_0} définit sur E^o un point base r_0 de projection x_0.

Un champ d'éléments de contact $\mathcal{C}$ sur V est canoniquement associé à une H-structure $E_{\mathcal{C}}$ sur V, où, si N est le sous-espace de M correspondant à la valeur $\mathcal{C}(x_0)$ de $\mathcal{C}$ en x_0, H est le sous-groupe de Lie de $GL(M)$ formé de toutes les transformations laissant N invariant. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{C}$ soit invariant par $\mathcal{L}$ est alors que E^o soit une réduction de $E_{\mathcal{C}}$, c'est-à-dire que le sous-espace N soit invariant par les éléments de G (*). Supposons cette condition vérifiée. Tout espace horizontal h en r_0 dans E^o est horizontal dans E. Soit τ_h la torsion d'un tel espace. On a

$$\tau_h \in \partial(M^* \otimes \mathfrak{h}) \Longleftrightarrow \tau_h(N \wedge N) \subset N,$$

$\mathfrak{h}$ étant l'algèbre de Lie de H. Il en résulte que $\mathcal{C}$ est intégrable si, et seulement si, pour un (donc pour tout)

$$\tau \in \Lambda^2 M^* \otimes M \quad \text{tel que} \quad \tau \bmod \partial(M^* \otimes \mathfrak{h})$$

soit égal au tenseur de structure de E^o, on a $\tau(N \wedge N) \subset N$. En conclusion:

(*) Un raisonnement analogue sur la variété R^o de tous les repères linéaires de V sur laquelle on considère la pseudoalgèbre (non transitive mais homogène) relevée de $\mathcal{L}$ montre que, s'il existe sur V une connexion linéaire invariante par $\mathcal{L}$, alors $\mathcal{L}$ est de type fini, et plus précisément $\mathfrak{g}^1 = 0$.

PROPOSITION I.1. *Il y a correspondance bijective entre les feuilletages sur* V *invariants par* $\mathcal{L}$ *et les sous-algèbres* $\mathfrak{L}'$ *de* $\mathfrak{L}$ *telles que* $\mathfrak{L}'_0 = \mathfrak{L}_0$.

On peut noter que $\mathfrak{L}'$ apparaît comme l'algèbre associée à la sous-algèbre $\mathcal{L}'_{x_0}$ de $\mathcal{L}_{x_0}$ définie par

$$\mathcal{L}'_{x_0} = \{ X \in \mathcal{L}_{x_0} \mid X(x_0) \in T_{x_0} W \},$$

W désignant la feuille passant par x_0.

Dans la suite, $\mathcal{C}$ est un feuilletage invariant par $\mathcal{L}$ et W la feuille passant par x_0. Choisissant une décomposition $M = N \oplus \overline{N}$, la carte α_{x_0} donne en x_0 un système de coordonnées $(x^1, \dots, x^n, \bar{x}^{n+1}, \dots, \bar{x}^m) = (x, \bar{x})$ adaptées au feuilletage. Toute section locale de $\mathcal{L}$ est alors de la forme

$$(1) \qquad X = X^i(x, \bar{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \bar{X}^j(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} .$$

Pour tout germe Z en $x \in W$ de champ de vecteurs, soit $\rho_W(Z)$ la restriction à W de Z. Si $\mathfrak{D}_W$ est le faisceau des germes de tous les champs de vecteurs de W, le faisceau $\mathcal{L}_W = \rho_W(\mathcal{L}) \cap \mathfrak{D}_W$ est une pseudoalgèbre de Lie transitive sur W, que nous appellerons *pseudoalgèbre induite par* $\mathcal{L}$ sur W.

Si l'on note $\mathcal{L}_{x_0, j}$ le sous-espace de $\mathcal{L}_{x_0}$ formé des germes nuls à l'ordre $j+1$ en x_0, on aura pour tout $j \geqslant 0$ des applications

$$\rho_j : \mathcal{L}_{x_0, j} \longrightarrow (\mathcal{L}_W)_{x_0, j} .$$

En particulier, ρ_0 est surjective, ce qui donne entre algèbres d'isotropie formelle une surjection $\mathfrak{L}_0 \to (\mathfrak{L}_N)_0$ et entre algèbres d'isotropie linéaire une surjection $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_N$ qui dans les coordonnées $(x, \bar{x})$ correspond à la projection

$$\begin{array}{rc} \begin{array}{r} n\,\{ \\[1em] m-n\,\{ \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \longmapsto A \\ & \begin{array}{cc} \underbrace{}_{n} & \underbrace{}_{m-n} \end{array} \end{array}$$

de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(N)$.

LEMME I.2. *S'il existe un supplémentaire $\bar{N}$ de N dans M sur lequel les éléments de $\mathfrak{g}$ agissent trivialement, l'application $\mathfrak{L}_0 \to (\mathfrak{L}_N)_0$ est bijective.*

En effet, les applications induites $\mathfrak{g}^j \to \mathfrak{g}^j_N$ sont alors bijectives.

On peut généraliser cette étude en se plaçant, non plus sur V, mais sur un espace de prolongement : Soit $\mathfrak{L}'$ une sous-algèbre de $\mathfrak{L}$, ouverte pour la topologie faible, et j le plus petit entier $\geqslant 0$ tel que $\mathfrak{L}'_{j+1} = \mathfrak{L}_{j+1}$. Soit

$$gr\,\mathfrak{L}' = N \oplus \mathfrak{g}' \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}'^j \oplus \mathfrak{g}^{j+1} \oplus \ldots,$$

$$gr\,\mathfrak{L} = M \oplus \mathfrak{g} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^j \oplus \mathfrak{g}^{j+1} \oplus \ldots,$$

et $\bar{N}$ un supplémentaire quelconque de N dans M. La sous-algèbre $\mathfrak{L}'$ de $\mathfrak{L}$ définit, sur un prolongement convenable E^j de E^0, un feuilletage invariant par le relèvement $\mathcal{L}^j$ de $\mathcal{L}$, transitif sur E^j. (On considère ici la notion de prolongement définie par les orbites des relevés successifs de $\mathcal{L}$). Soit F^j la feuille passant par le point base $r_0{}^j$ de E^j associé à α_{x_0}. $\mathfrak{M}^j = \mathcal{L}^j_{F^j}$ est une pseudoalgèbre de Lie transitive sur F^j, dont l'algèbre d'isotropie linéaire $\mathfrak{h}^j$ est la projection sur $N^* \otimes \mathfrak{g}'^j$ de $\mathfrak{g}^{j+1}$ (on a $\mathfrak{g}^{j+1} \subset N^* \otimes \mathfrak{g}'^j \oplus \bar{N}^* \otimes \mathfrak{g}^j$). D'autre part, la projection $\pi^{j-1}_j : E^j \to E^{j-1}$ envoie F^j sur une sous-variété F^{j-1} de E^{j-1}, modelée sur $N \oplus \mathfrak{g}' \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}'^{j-1}$. De plus, $\mathfrak{M}^j$ est π^{j-1}_j-projetable, et sa projection $\mathfrak{M}^{j-1}$ est une pseudoalgèbre de Lie transitive sur F^{j-1} dont l'algèbre d'isotropie linéaire $\mathfrak{h}^{j-1}$ est la projection de $\mathfrak{g}'^j$ sur $N^* \otimes \mathfrak{g}'^{j-1}$. On notera d'ailleurs que $F^j \xrightarrow{\pi^{j-1}_j} F^{j-1}$ est un fibré principal de groupe structural G'^j, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'^j$. Si G^j est le groupe de la fibration principale $E^j \xrightarrow{\pi^{j-1}_j} E^{j-1}$, on a

$$G'^j = \{ a^j \in G^j \mid r_0^j a^j \in F^j \},$$

de sorte que, si

$$N \oplus \mathfrak{g}' \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}'^{j-1} = M \oplus \mathfrak{g} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{j-1},$$

F^j est une G'^j-structure sur F^{j-1}.

En itérant cette construction, on obtient finalement une sous-variété W de V modelée sur N et passant par x_0 et une pseudoalgèbre transitive $\mathcal{M}$ sur W.

Dans le cas particulier où $\mathfrak{L}'$ est transitive, on a $\bar{N}=0$, de sorte que pour tout indice j l'algèbre formelle $\mathfrak{M}^j$ de $\mathcal{M}^j$ s'identifie, d'après le lemme I.2 , avec $\mathfrak{L}'$. On a montré :

THEOREME I.3. *Soit* $\mathfrak{L}'$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{L}$ *ouverte pour la topologie faible, et* $gr\,\mathfrak{L}' = N \oplus \mathfrak{g}' \oplus \dots$. *En tout point* $x \in V$ *passe alors une sous-variété* W *modelée sur* N *pour laquelle la restriction* $\mathcal{L}_W$ *admet un sous-faisceau* $\mathcal{M}$ *tel que :*

- $\mathcal{M}$ *est une pseudoalgèbre de Lie transitive sur* W *.*
- *l'algèbre d'isotropie linéaire de* $\mathcal{M}$ *est l'image de* $\mathfrak{g}'$ *dans la projection* $N^*\otimes N \oplus \bar{N}^*\otimes M \longrightarrow N^*\otimes N$ *.*

Si en particulier $\mathfrak{L}'$ *est transitive, il existe sur* V *une pseudoalgèbre de Lie* $\mathcal{M}$ *de* $\mathcal{L}$ *d'algèbre formelle* $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}'$ *.*

Considérons sur $\mathfrak{L}$ la filtration $(\mathfrak{L}_j)_{j\geqslant -1}$ usuelle, et soit $t^j : \mathfrak{L}_j \to \mathfrak{g}^j$ la projection canonique. On appellera α*-connexion sur* $\mathfrak{L}$ toute famille $k_* = (k_j)_{j\geqslant -1}$ où $k_j : \mathfrak{g}^j \to \mathfrak{L}_j$ est tel que $t^j k_j =$ *identité*. Si $\hat{gr}\,\mathfrak{L} = \prod_{j\geqslant -1} \mathfrak{g}^j$, k_* définit un isomorphisme d'espaces vectoriels $k_* : \hat{gr}\,\mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$. Notons pour $j \geqslant 0$

$$gr_j\,\mathfrak{L} = M \oplus \mathfrak{g} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^{j-1} .$$

On a une injection canonique $i_j : gr_j\,\mathfrak{L} \longrightarrow \hat{gr}\,\mathfrak{L}$ et une projection $p_j : \hat{gr}\,\mathfrak{L} \longrightarrow gr_j\,\mathfrak{L}$. On définit alors la j*-torsion projetée* τ^j *de* k_* par:

$$\tau^j : gr_j\,\mathfrak{L} \wedge gr_j\,\mathfrak{L} \longrightarrow gr_j\,\mathfrak{L} ,$$

$$\tau^j(\alpha \wedge \beta) = p_j\,[k_* i_j\,\alpha , k_* i_j\,\beta] \quad \text{(voir [1])}.$$

Pout toute α-connexion k_*, la suite $(\tau^j)_{j\geqslant 0}$ correspondante converge pour la topologie faible vers un τ^∞, $\tau^\infty : \hat{gr}\,\mathfrak{L} \wedge \hat{gr}\,\mathfrak{L} \longrightarrow \hat{gr}\,\mathfrak{L}$, tel que k_* soit un isomorphisme d'algèbres de Lie de $(\hat{gr}\,\mathfrak{L}\ ;\tau^\infty)$ sur $\mathfrak{L}$.

D'autre part, si $i \geqslant 1$ et $1 \leqslant j \leqslant i$, posons

$$\mathfrak{g}_i^{i-j} = \underbrace{[\,[\dots[}_{j}\,\mathfrak{g}^i , M\,]_0 , M\,]_0 , \dots M\,]_0 ,$$

où $[\,,\,]_o$ est le crochet naturel sur $\hat{gr}\,\mathfrak{L}$. $\mathfrak{g}_i^{i-j}$ est un sous-espace de $\mathfrak{g}^{i-j}$ et $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i^o$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Si on note $\mathfrak{g}_\infty = \bigcap_{i \geqslant 0} \mathfrak{g}_i$, il existe un entier i_o tel que $\mathfrak{g}_\infty = \mathfrak{g}_{i_0}$.

COROLLAIRE I.4. *Soit* $i \geqslant 1$. *S'il existe sur* $\mathfrak{L}$ *une* $\propto$*-connexion* k_* *dont torsions projetées vérifient pour tout* $j \geqslant 0$:

$$\tau^j(\wedge^2(M \oplus \mathfrak{g}_i \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_i^{j-1})) \subset M \oplus \mathfrak{g}_i \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_i^{j-1},$$

alors il existe sur V *une pseudoalgèbre de Lie* $\mathscr{L}^{(i)}$ *de* $\mathscr{L}$ *transitive et d'algèbre formelle* $\mathfrak{L}^{(i)}$ *telle que*

$$gr\,\mathfrak{L}^{(i)} = M \oplus \mathfrak{g}_i \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_i^j \oplus \ldots \quad .$$

On notera en particulier $\mathscr{L}^{(\infty)} = \mathscr{L}^{(i_0)}$.

En effet, $\mathfrak{L}^{(i)} = k_*^{-1}(\prod_{j \geqslant -1} \mathfrak{g}_i^j)$ est alors une sous-algèbre ouverte transitive de $\mathfrak{L}$. On notera que $\mathscr{L}^{(\infty)}$, si elle existe, est la réduction transitive minimale de $\mathscr{L}$ que puisse donner le théorème I.3.

II. PSEUDOALGEBRES DE LIE LISSES

Dans la suite, K est un groupe de Lie et $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche. On note μ le crochet de $\mathfrak{k}$. Si on fait opérer K sur lui-même par translations à gauche, l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales correspondantes est l'algèbre $\tilde{\mathfrak{k}}$ des champs de vecteurs invariants à droite, et on note $\mathscr{K}$ la pseudoalgèbre de Lie sur K des germes de transformations correspondantes. On identifiera $\tilde{\mathfrak{k}}$ avec la fibre $\mathscr{K}_e$ de $\mathscr{K}$ en l'élément neutre de K.

1. PSEUDOALGEBRES DE LIE S-LISSES.

Soit V une variété modelée sur l'espace vectoriel $\mathfrak{k}$; V est localement difféomorphe à la variété K, et on peut donc considérer en tout point $x \in V$ les germes de transformations infinitésimales déduites de $\mathscr{K}$ par un difféomorphisme local $U_x \to U_e$, où U_x est un voisinage de x dans V et U_e un voisinage de e dans K. On dira alors qu'une pseudoalgèbre de Lie $\mathfrak{L}$ sur V *est structurellement lisse* (en abrégé S-lisse) *de type* $(\mathfrak{k}\,;G)$ si :

(SL 1) tout point $x \in V$ possède un voisinage U_x muni d'un difféomorphisme $\phi_x : U_x \to U_e$ tel que $\phi^{-1}_{x*}(\mathcal{K}_{U_e}) \subset \mathfrak{L}_{U_x}$,

(SL 2) le groupe d'isotropie linéaire G de $\mathfrak{L}$ est un sous-groupe de $Aut\,(\mathfrak{k})$.

Une telle pseudoalgèbre est évidemment transitive et, si $x_0 \in V$, on a une décomposition en somme directe d'espaces vectoriels

$$\mathfrak{L}_{x_0} = \mathcal{K}_{x_0} \oplus \mathfrak{L}_{x_0,0}\ ,\ \text{où}\ \mathcal{K}_{x_0} = \phi^{-1}_{x_0*}(\mathcal{K}_e)$$

et donc est une sous-algèbre de $\mathfrak{L}_{x_0}$ isomorphe à $\mathfrak{k}$. Si $u \in \mathfrak{k}$, on notera $\tilde{u}_{x_0}$ l'élément de $\mathcal{K}_{x_0}$ correspondant.

PROPOSITION II.1. *Si $\mathfrak{L}$ est une pseudoalgèbre S-lisse de type $(\mathfrak{k}; G)$ sur V, la G-structure E^0 associée à $\mathfrak{L}$ admet des connexions locales sans courbure dont le tenseur de torsion correspond à μ dans l'identification naturelle entre $T_x V$ et $\mathfrak{k}$. De plus, E^0 est à connexions admissibles.*

Soit en effet r_0 le point base de E^0 au-dessus de x_0. Si $e_1, \dots, e_m$ est une base de $\mathfrak{k}$, $(\tilde{e}_1)_{x_0}, \dots, (\tilde{e}_m)_{x_0}$ ont pour relevés en r_0 des germes de champs qui engendrent un germe en r_0 de connexion répondant à la question. D'autre part G est un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{k}$ et par suite agit naturellement sur le prolongement E^1_μ de E^0 formé de tous les espaces horizontaux sur E^0 dont le tenseur de torsion est égal à μ. Le groupe de la fibration principale $E^1_\mu \to V$ étant le produit semi-direct $G \times G^{(1)}$, où

$$G^{(1)} = exp\ ker(\partial : \mathfrak{k}^* \otimes \mathfrak{g} \to \Lambda^2\, \mathfrak{k}^* \otimes \mathfrak{k}),$$

et $G^{(1)}$ étant un groupe vectoriel, il existe des sections de la fibration $E^1_\mu \to E^0$ correspondant à des connexions sur E^0. D'où la proposition.

Si on utilise alors la notion de G-structure lisse introduite par Molino dans [4], on obtient en justification de la terminologie utilisée :

COROLLAIRE II.2. *La G-structure E^0 associée à la pseudoalgèbre de Lie S-lisse $\mathfrak{L}$ sur V est une G-structure lisse.*

2. ETUDE DES AUTOMORPHISMES DE LA G-STRUCTURE LISSE MODELE.

Soit $\mathfrak{D}^{\omega}$ la pseudoalgèbre de Lie sur K de tous les germes de champs de vecteurs analytiques sur K. $\mathfrak{g}$ étant une sous-algèbre de Lie de $Der(\mathfrak{k})$, on pose

$$\mathfrak{M}^{\omega}=\{X\in\mathfrak{D}^{\omega}/(\forall x\in K)(\exists A_x\in\mathfrak{g})(\forall u\in\mathfrak{k}):[X,u](x)=(A_x u)(x)\};$$

$\mathfrak{M}^{\omega}$ contient $\mathcal{K}$, et donc est une pseudoalgèbre de Lie transitive sur K. A tout $X\in\mathfrak{M}^{\omega}$ est associé un germe de fonction ρ_X à valeurs dans $\mathfrak{g}$ tel que $[X,u]=\rho_X u$.

Considérons alors le système différentiel

$$[X,e_j]=\rho e_j,\quad 1\leqslant j\leqslant m, \tag{1}$$

où $(e_1,\dots,e_m)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{k}$ et ρ un germe analytique donné en l'origine e de K. Il résulte du théorème de Cauchy-Kowalewsky que

LEMME II.3. *Si le système (1) est formellement intégrable, c'est-à-dire si les fonctions analytiques* ρ^i_j *définies par* $\rho=\rho^i_j e^j\otimes e_i$ *satisfont la condition*

$$e_k\rho^i_j=e_j\rho^i_k,\quad i,j,k\in\{1,\dots,m\}, \tag{2}$$

$e_k\rho^i_j$ *indiquant la dérivation selon* e_k *de la fonction* ρ^i_j, *alors (1) admet une unique solution analytique* $X=X^i e_i$ *au voisinage de* e *satisfaisant* $X(e)=0$.

Il en résulte qu'un champ de vecteurs $X\in\mathfrak{M}^{\omega}_{e,0}$ est parfaitement défini par la fonction ρ_X qui lui est associée, et qu'une fonction à valeurs dans $\mathfrak{g}$ est associée à un tel champ si, et seulement si, elle satisfait (2). En particulier, si $A\in\mathfrak{g}$, la fonction constante A est associée à un germe $\tilde{A}$ de champ de vecteurs de $\mathfrak{M}^{\omega}_{e,0}$. On vérifie sans peine que le groupe à un paramètre $\tilde{a}_t$ associé à $\tilde{A}$ est tel que, pour tout $u\in\mathfrak{k}$,

$$\tilde{a}_t(exp\ u)=exp\,(a_{-t}u),$$

a_t étant le groupe à un paramètre d'automorphismes de $\mathfrak{k}$ associé à A. On obtient ainsi, si $u,v\in\mathfrak{k}$ et $A,B\in\mathfrak{g}$, des germes $\tilde{u},\tilde{v},\tilde{A},\tilde{B}\in\mathfrak{M}^{\omega}_e$, $-\tilde{u}(e)=u(e)$, $-\tilde{v}(e)=v(e)$, $\tilde{A}(e)=\tilde{B}(e)=0$, tels que $[\tilde{u},\tilde{v}]=\widetilde{[u,v]}$,

$[\tilde{A}, \tilde{u}] = \widetilde{Au}$, $[\tilde{A}, \tilde{B}] = \overbrace{[A, B]}$. Ceci montre qu'il existe sur l'algèbre formelle $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{M}^{\omega}$ une ∞-connexion dont la 1-torsion projetée τ^1_{μ} est donnée par $\tau^1_{\mu} = \mu + \tau^1_0$, où τ^1_0 est la 1-torsion plate canonique. Cette propriété n'est pas vérifiée à l'ordre supérieur, comme on peut le voir en prenant, pour K, le sous-groupe de Lie de $GL(\mathbf{R}^2)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$, où $x, y \in \mathbf{R}$, $y > 0$, et $Der(\mathfrak{k})$ pour $\mathfrak{g}$. Par contre, on a

THEOREME II.4. *Soit* $r \geqslant 1$ *et une suite* $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1, \dots, \mathfrak{g}^r$ *telle que :*

- *(i)* $\mathfrak{g}$ *est une sous-algèbre de* $Der(\mathfrak{k})$,
- *(ii)* $\mathfrak{g}^{i+1} \subset \mathfrak{g}^{i(1)}$, *si* $0 \leqslant i \leqslant r$,
- *(iii)* $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j]_0 \subset \mathfrak{g}^{i+j}$, *si* $0 \leqslant i, j, i+j \leqslant r$,
- *(iv)* $[\mathfrak{g}^1, \mathfrak{k}']_0 = 0$,

$\mathfrak{k}' = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ *étant l'algèbre dérivée de* $\mathfrak{k}$. *Alors il existe sur K une sous-pseudoalgèbre de Lie analytique* $\mathfrak{L}^{\omega}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1, \dots, \mathfrak{g}^r}$ *de* $\mathfrak{M}^{\omega}$ *telle que*

$$(3) \qquad gr\, \mathfrak{L}^{\omega}_{\mathfrak{g}, \dots, \mathfrak{g}^r} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^r \oplus \mathfrak{g}^{r(1)} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^{r(j)} \oplus \dots$$

et sur laquelle existe une ∞*-connexion* k^{μ}_{*} *dont les torsions projetées sont données par* $\tau^j_{\mu} = \mu + \tau^j_0$ *pour tout* $j \geqslant 0$. $\mathfrak{L}^{\omega}_{\mathfrak{g}, \dots, \mathfrak{g}^r}$ *sera dite pseudo-algèbre analytique lisse canonique sur K associée à la suite* $\mathfrak{g}, \dots, \mathfrak{g}^r$.

Considérons, en effet, $gr\, \mathfrak{L}_{\mathfrak{g}, \dots, \mathfrak{g}^r}$ définie par (3). C'est une algèbre de Lie pour le crochet $[\, ,\,]_0$. Si $j \geqslant 1$, définissons $k^{\mu}_j : \mathfrak{g}^j \to \mathfrak{M}^{\omega}_{e,j}$ de la façon suivante : si $A^j \in \mathfrak{g}^j$, soit $\rho_{\tilde{A}^j}$ la solution du système différentiel

$$e_{i_1} \dots e_{i_j} \rho_{\tilde{A}^j} e_i = (-1)^j A^j (e_{i_1} \dots e_{i_j} e_i),$$

où $i, i_1, \dots, i_j \in \{1, \dots, m\}$, avec les conditions à l'origine

$$(e_{i_1} \dots e_{i_s} \rho_{\tilde{A}^j})(e) = 0 \quad \text{si} \quad s < j.$$

Il résulte de la condition (iv) que $[\mathfrak{g}^j, \mathfrak{k}']_0 = 0$; par suite ce système est formellement intégrable. On montre aisément qu'il admet par conséquent une unique solution sur un voisinage de e, et que cette solution est analytique. La solution $\rho_{\tilde{A}^j}$ vérifie (2), et par suite, d'après le lemme II.3, il existe un champ $\tilde{A}^j$ dans $\mathfrak{M}^{\omega}_{e,j}$ associé à $\rho_{\tilde{A}^j}$. On pose alors $k^{\mu}_j A^j = \tilde{A}^j$.

On a bien $t^j k_j^\mu = identit\acute{e}$.

On définit une ∞-connexion k_*^μ sur $\mathfrak{M}_e^\omega$, donc sur $\mathfrak{M}$, en prolongeant chaque k_j^μ sur $\mathfrak{H}^j = \mathfrak{M}_{e,j}^\omega / \mathfrak{M}_{e,j+1}^\omega$ d'une façon arbitraire. Comme l'on a, pour $i, j \geqslant 1$, les relations $[\tilde{A}^i, \tilde{e}_j] = \widetilde{A^i e_j}$, $[\tilde{A}^i, \tilde{A}] = \widetilde{[A^i, A]}_o$, $[\tilde{A}^i, \tilde{A}^j] = \widetilde{[A^i, A^j]}_o$, dont la vérification est longue, mais non difficile, les torsions projetées τ_μ^j de cette ∞-connexion respectent le sous-espace $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g},\dots,\mathfrak{g}^r} = k_*^\mu(\widehat{gr}\, \mathfrak{L}_{\mathfrak{g},\dots,\mathfrak{g}^r})$ de $\mathfrak{M}$, et $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g},\dots,\mathfrak{g}^r}$ est une sous-algèbre. Il lui correspond une sous-algèbre $(\mathfrak{L}^\omega_{\mathfrak{g},\dots,\mathfrak{g}^r})_e$ de $\mathfrak{M}^\omega$, contenant $\mathfrak{K}_e$. Il est donc cohérent de transporter $(\mathfrak{L}^\omega_{\mathfrak{g},\dots,\mathfrak{g}^r})_e$ sur K en utilisant les translations à gauche. D'où $\mathfrak{L}^\omega_{\mathfrak{g},\dots\mathfrak{g}^r}$.

Ces résultats s'étendent au cas C^∞: si $\mathfrak{D}$ est le faisceau sur K des germes de champs de vecteurs C^∞, on définit pour $\mathfrak{g} \subset Der(\mathfrak{k})$:

$$\mathfrak{M} = \{ X \in \mathfrak{D} / (\forall x \in K)(\exists A_x \in \mathfrak{g})(\forall u \in \mathfrak{k}) : [X, u](x) = (A_x u)(x) \}$$

et on obtient un théorème analogue au théorème II.4 en remplaçant le mot «analytique» par «C^∞», et en supprimant l'indice ω. Pour montrer ce résultat, il suffit de prendre

$$\mathfrak{L}_{\mathfrak{g},\dots,\mathfrak{g}^r} = \{ X \in \mathfrak{D} / (\forall x \in K)(\exists X^\omega \in (\mathfrak{L}^\omega_{\mathfrak{g},\dots,\mathfrak{g}^r})_x) : j_x^{r+1} X = j_x^{r+1} X^\omega \}.$$

On définit bien ainsi une pseudoalgèbre de Lie ayant même algèbre formelle que $\mathfrak{L}^\omega_{\mathfrak{g},\dots,\mathfrak{g}^r}$: c'est la pseudoalgèbre C^∞ lisse canonique associée à la suite $\mathfrak{g}, \dots, \mathfrak{g}^r$.

3. PSEUDOALGEBRES DE LIE LISSES.

On dira dans la suite qu'une pseudoalgèbre de Lie $\mathfrak{L}$ sur V est *lisse de type* $(\mathfrak{k}; G)$ si

(L1) $\mathfrak{L}$ est localement isomorphe à une pseudoalgèbre lisse canonique sur K (C^∞ ou analytique),

(L2) le groupe d'isotropie linéaire G de $\mathfrak{L}$ est un sous-groupe de $Aut\ \mathfrak{k}$.

On notera que L2 est une conséquence de L1 si G est connexe, en particulier si V est simplement connexe.

En particulier, $\mathcal{L}$ lisse entraine $\mathcal{L}$ S-lisse.

On dira que $\mathcal{L}$ est *formellement lisse* (en abrégé F-lisse) si son algèbre formelle $\mathfrak{L}$ est lisse, c'est-à-dire s'il existe sur $\mathfrak{L}$ une ∞-connexion k_*^{μ} dont les torsions projetées soient les τ_{μ}^{j}.

Dans le cas où K est abélien, $\mu = 0$ et lisse = plat. On a donc la notion de pseudoalgèbre F-plate, S-plate.

THEOREME II.5. *Toute pseudoalgèbre de Lie $\mathcal{L}$ sur V F-lisse (resp. lisse) de type $(\mathfrak{k}; G)$ admet une sous-pseudoalgèbre $\mathcal{L}^{(\infty)}$ F-lisse (resp. lisse) telle que*

$$gr\, \mathfrak{L}^{(\infty)} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g}_{\infty} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{\infty}^{i} \oplus \ldots$$

En particulier, si V est simplement connexe, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe sur V une pseudoalgèbre $\mathcal{L}$ de type fini, lisse de type $(\mathfrak{k}; G)$, est que V soit le revêtement universel d'un ouvert U du groupe de Lie K. Alors $\mathcal{L}$ est la relevée dans V de la restriction à U d'une pseudoalgèbre lisse canonique sur K.

Le corollaire I.4 donne l'existence de $\mathcal{L}^{(\infty)}$, et comme k_*^{μ} reste adaptée à $\mathfrak{L}^{(\infty)}$, $\mathcal{L}^{(\infty)}$ est F-lisse. Si $\mathcal{L}$ est lisse, puisque $\mathcal{L}^{(\infty)}$ est induite par $\mathcal{L}$ sur une feuille d'un feuilletage invariant, on peut opérer simultanément les réductions sur $\mathcal{L}$ et sur la pseudoalgèbre $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}, \ldots, \mathfrak{g}^{r}}$ sur K qui lui est localement équivalente. D'où la lissité de $\mathcal{L}^{(\infty)}$. Enfin si $\mathcal{L}$ est lisse de type fini et V simplement connexe, $\mathfrak{g}_{\infty} = 0$ et la structure associée à $\mathcal{L}^{(\infty)}$ est un parallèlisme lisse sur V, c'est-à-dire une famille de m champs de vecteurs globaux linéairement indépendants en tout point et engendrant une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{k}$. On définit alors $\alpha : V \to K$ en posant $\alpha(x_0) = e$ et en développant dans K à partir de e les chemins différentiables de V d'origine x_0. α est de rang m en tout point et $\alpha(V) = U$ est un ouvert de K. $\alpha : V \to U$ est le revêtement universel de U.

Si $\mathcal{L}$ est une pseudoalgèbre F-lisse ou S-lisse, la proposition I.1 montre qu'il y a correspondance bijective entre les feuilletages sur V invariants par $\mathcal{L}$ et les sous-algèbres de $\mathfrak{k}$ stables par G.

THEOREME II.6. *Soit sur V une pseudoalgèbre de Lie $\mathcal{L}$ S-lisse (resp.*

F-lisse, resp. lisse) de type ($\mathfrak{k}; G$). *Alors il existe sur* V *un feuilletage invariant par* $\mathcal{L}$ *et tel que :*

(a) Si $\mathcal{L}$ *est S-lisse, la pseudoalgèbre* $\mathcal{L}'$ *induite par* $\mathcal{L}$ *sur chaque feuille* V' *est S-lisse.*

Si $\mathcal{L}$ *est F-lisse, il existe pour chaque feuille* V' *un ouvert* U' *du groupe de Lie* K' *dérivé de* K *tel que* U' *et* V' *aient le même revêtement universel. Le pseudogroupe* $\mathcal{P}(\mathcal{L}_{V'})$ *induit par* $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ *sur* V' *s'identifie ainsi localement au pseudogroupe de Lie des germes de transformations de* K' *définies par l'action du groupe* $K' \times H$ *(produit semi-direct), où* H *est un groupe d'automorphismes de* K' *dont l'algèbre de Lie est la projection de* $\mathfrak{g}$ *sur Der* $\mathfrak{k}'$.

(b) Sur chaque sous-variété transverse au feuilletage la pseudoalgèbre de Lie définie par projection de $\mathcal{L}$ *le long des feuilles est S-plate (resp. F-plate, resp. plate).*

Considérons en effet le feuilletage défini par l'idéal dérivé $\mathfrak{k}'$. Si $\mathcal{L}$ est S-lisse, $\mathcal{L}'$ est S-lisse. Si $\mathcal{L}$ est F-lisse, $\mathcal{L}'$ aussi, et on a de plus $\mathfrak{g}^1 = 0$. Le point (a) résulte alors d'une simple application des théorèmes II-5 et I.3, et de [5] chapitre IV.

Soit maintenant W une sous-variété transverse passant par x_0, et V' la feuille en x_0. On peut écrire localement V sous la forme $V' \times W$, correspondant à une décomposition $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{m}$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{k}$. La projection β_W le long des feuilles est alors donnée par

$$\beta_W\left(X^i(x,\bar{x})\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} + \bar{X}^j(\bar{x})\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right) = \bar{X}^j(\bar{x})\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j},$$

avec les notations de (1) chapitre I. Par suite, si $\mathcal{L}$ est S-lisse, $\beta_W(\mathfrak{k}')$ est une sous-algèbre transitive abélienne de $\beta_W(\mathcal{L})$. D'autre part, β_W induit un épimorphisme $\beta : \mathfrak{L} \to \mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M}$ est l'algèbre formelle de $\beta_W(\mathcal{L})$, et si $\mathfrak{L}$ est lisse, on vérifie sans peine que $\mathfrak{M}$ est plate. Enfin, si $\mathcal{L}$ est lisse, on se ramène localement sur le groupe K, le feuilletage étant le feuilletage défini par le sous-groupe dérivé K'. Alors $\beta_W(\mathcal{L})$ est plate.

4. PSEUDOALGEBRES DE LIE POLIES.

Soit sur V une pseudoalgèbre $\mathcal{L}$ S-lisse de type $(\mathfrak{k}; G)$. Sur la G-structure E^o associée à $\mathcal{L}$, le parallèlisme local associé à une connexion locale sans courbure de torsion μ définit un difféomorphisme local avec $K \times G$. On dira que $\mathcal{L}$ *est polie de type* $(\mathfrak{k}; G)$ si la relevée $\mathcal{L}^o$ de $\mathcal{L}$ dans E^o est une pseudoalgèbre S-lisse de type $(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g}; G^1)$.

PROPOSITION II.7. *Si* $\mathcal{L}$ *est une pseudoalgèbre polie de type* $(\mathfrak{k}; G)$, *alors* $\mathcal{L}$ *est lisse de même type et, pour tout* $j \geqslant 0$, *le prolongement* $\mathcal{L}^j$ *est lisse de type* $(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^j; G^{j+1})$.

$\mathcal{L}$ est S-lisse. On a donc $\tilde{\mathfrak{k}} \subset \mathcal{L}_{x_0}$ et $G \subset Aut\, \mathfrak{k}$. Puisque $\mathcal{L}^o$ est S-lisse on aura $\widetilde{\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g}} \subset \mathcal{L}_{x_0}$, en particulier $\tilde{\mathfrak{g}} \subset \mathcal{L}_{x_0}$. Or $\tilde{\mathfrak{g}}$ est précisément l'image de $\mathfrak{g}$ dans l'application $A \to \tilde{A} = k^{\mu}_{*}(A)$. Enfin $\mathfrak{g}^1 \subset Der(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g})$ a pour conséquence $[\mathfrak{g}^1, \mathfrak{k}']_o = 0$. Donc $\mathcal{L}$ est lisse. Pour montrer que $\mathcal{L}^j$ est lisse, on procède par récurrence sur j, compte tenu des relations:

$$\text{si } j \geqslant 1, \quad [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{k}']_o = 0 \quad \text{et} \quad [\mathfrak{g}^{j+1}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{k}]_o]_o = 0,$$

$$\text{si } i, j \geqslant 0, \quad [\mathfrak{g}^{j+1}, \mathfrak{g}^i]_o = 0,$$

qui résultent immédiatement de l'hypothèse.

COROLLAIRE II.8. *Pour que* $\mathcal{L}$ *soit polie de type* $(\mathfrak{k}; G)$, *il faut et il suffit que* $\mathcal{L}$ *soit lisse de type* $(\mathfrak{k}; G)$ *et que* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1]_o = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2]_o = 0$.

EXEMPLE: Soit $\mathfrak{g}$ un sous-espace vectoriel de $Der\, \mathfrak{k}$ tel que, si $A, B \in \mathfrak{g}$, le composé AB soit égal à 0. Donc $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre abélienne. Soit $\mathfrak{k}_0$ la sous-algèbre de $\mathfrak{k}$ formée des $u \in \mathfrak{k}$ tels que $Au = 0$ pour tout $A \in \mathfrak{g}$. Alors $[\mathfrak{g}, \mathfrak{k}]_o \subset \mathfrak{k}_0$ et tous les prolongements de $\mathfrak{g}$ s'annulent sur $\mathfrak{k}_0$. La pseudoalgèbre de Lie lisse canonique sur K associée à une suite $\mathfrak{g}, \ldots, \mathfrak{g}^r$ est polie. Si l'on rapporte $\mathfrak{k}$ à une base $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_m)$ adaptée à $\mathfrak{k}_0 = \mathbf{R}(e_1, \ldots, e_p)$, $\mathfrak{g}$ devient une algèbre de matrices de la forme

$$\begin{array}{r} p\;\Big\{ \\ m-p\;\Big\{ \\ \end{array} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} 0 & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} \underbrace{}_{p} & \underbrace{}_{m-p} \end{array} \end{array}$$

PROPOSITION II.9. *Si* $\mathfrak{L}$ *est une pseudoalgèbre polie, la sous-pseudoalgèbre* $\mathfrak{L}^{(\infty)}$ *de* $\mathfrak{L}$ *est polie et est localement équivalente à une pseudoalgèbre sur* K *du type décrit dans l'exemple précédent.*

Soit en effet $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_\infty$. Si

$$\mathfrak{k}_0 = \{ u \in \mathfrak{k} / (\forall A \in \mathfrak{h}) \ A u = 0 \},$$

on a pour $A^2 \in \mathfrak{h}^2$, $u, v, w \in \mathfrak{k}$, $A \in \mathfrak{h}$:

$$A^2(Au) = 0 \Longrightarrow A^2(v.w).Au = 0.$$

Comme $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_2$, on obtient le résultat cherché.

On notera que, si V est simplement connexe, H est réduit à sa composante neutre, qui est dans une base adaptée à $\mathfrak{k}_0$

$$\begin{pmatrix} id & * \\ 0 & id \end{pmatrix}.$$

Un tel groupe est vectoriel, et définit donc un parallèlisme.

THEOREME II.10. *Soit sur* V *une pseudoalgèbre de Lie* $\mathfrak{L}$ *polie de type* $(\mathfrak{k}; G)$. *Alors le revêtement universel de* V *est parallèlisable, et il existe sur* V *un feuilletage invariant par* $\mathfrak{L}^{(\infty)}$ *tel que :*

(a) pour chaque feuille V_0 *il existe un ouvert* U_0 *du sous-groupe analytique* K_0 *de* K *d'algèbre de Lie* $\mathfrak{k}_0$ *tel que* V_0 *et* U_0 *aient le même revêtement universel. Le pseudogroupe* $\mathfrak{P}(\mathfrak{L}^{(\infty)}_{V_0})$ *induit par* $\mathfrak{P}(\mathfrak{L}^{(\infty)})$ *sur* V_0 *s'identifie ainsi localement avec le pseudogroupe de Lie des germes de translation de* K_0.

(b) Chaque sous-variété transverse localement connexe W *est un revêtement d'un ouvert de* $\mathbf{R}^q$, *où* q *est la codimension du feuilletage et la pseudoalgèbre définie sur* W *par projection de* $\mathfrak{L}^{(\infty)}$ *le long des feuilles s'identifie ainsi au parallélisme plat canonique sur* $\mathbf{R}^q$.

La démonstration procède comme pour le théorème II.6, en considérant le feuilletage invariant défini par $\mathfrak{k}_0$. On notera d'ailleurs que $\mathfrak{k}' \subset \mathfrak{k}_0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALBERT C., *Connexions sur les pseudogroupes de Lie,* Thèse 3^{e} cycle, Montpellier, 1970.

[2] ALBERT C., Pseudoalgèbres de Lie lisses, Montpellier 1971, non publié.

[3] ALBERT C. et MOLINO P., Réduction des G-structures formellement plates, *C.R.A.S.* 270 (1970), pp. 384-387.

[4] MOLINO P., Sur quelques propriétés des G-structures, *J. of Diff. Geometry* (à paraître).

[5] PALAIS R.S., A global formulation of the Lie theory of transformation groups, *Mem. of A.M.S.* 22 (1957).

[6] SINGER I.M. et STERNBERG S., The infinite groups of Lie and Cartan, *Jour. d'Analyse de Jérusalem* 15 (1965) pp. 1-114.