

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

MARIE-CLAUDE LEBLOND

Complétion d'un foncteur structuré

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 13, n° 4 (1972), p. 377-392

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1972__13_4_377_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPLETION D'UN FONCTEUR STRUCTURE

par Marie-Claude LEBLOND

Introduction.

Dans ce travail, nous utilisons les notations et la terminologie de [1] et [2]. Soit p un foncteur d'une catégorie H vers la catégorie des applications associée à un univers \mathcal{U} . Une catégorie p -structurée est une catégorie C' munie d'un objet s de H (ou p -structure) relativement auquel les applications source, but et loi de composition de C' se relèvent. Considérons un foncteur p -structuré \hat{h} entre deux catégories p -structurées. Dans de nombreux cas, le foncteur sous-jacent à \hat{h} est un foncteur à limites projectives. Cependant des exceptions se présentent, en particulier dans l'étude des variétés différentiables, car la catégorie des applications différentiables n'est pas à noyaux. Le problème se pose donc de chercher si un foncteur p -structuré peut être «universellement» plongé dans un foncteur p -structuré dont le foncteur sous-jacent soit à limites projectives. De cette manière, nous généraliserons le théorème de complétion d'un foncteur double obtenu dans [3], dont le théorème de complétion d'un foncteur local est un cas particulier.

Partant donc d'une catégorie p -structurée (K', s_K) et d'un ensemble \mathcal{J} de catégories I' telles que l'ensemble I sous-jacent appartienne à \mathcal{U} , nous supposons donné sur K' un «choix» de limites projectives pour certains foncteurs issus d'un élément de \mathcal{J} . Nous montrons qu'on peut associer canoniquement à un foncteur p -structuré de but (K', s_K) un foncteur p -structuré de même but et dont la source est munie d'un choix de limites projectives appliquées sur les limites choisies sur K' . Pour cela, nous ramenons le problème à l'existence de l'adjoint d'un certain foncteur $p\mathcal{J}$ et nous montrons que $p\mathcal{J}$ vérifie les hypothèses du théorème d'existence de structures libres de [4].

0. Rappel de quelques définitions.

Soit \mathcal{U} un univers, \mathfrak{M}^0 la catégorie des applications associée à \mathcal{U} et p un foncteur d'une catégorie H' vers \mathfrak{M}^0 . On notera p_γ le foncteur restriction de p au groupoïde H'_γ des éléments inversibles de H' .

Etant donné une catégorie C' , on désigne par C'_0 l'ensemble de ses unités, par α et β ses applications source et but, par $C' * C'$ l'ensemble de ses couples composables, par κ sa loi de composition, par $e'. C. e$ l'ensemble des morphismes de source e et de but e' .

Si G est un foncteur de C' vers C'' et si $T = (G', t, G)$ est une transformation naturelle de G vers G' , on note qT la transformation naturelle $(q. G', \underline{q}t, q. G)$, lorsque q est un foncteur (K', \underline{q}, C'') , de C'' vers K' . Un foncteur constant sur une unité e de C' est noté e^\wedge .

On dit qu'un foncteur $p = (\mathfrak{M}^0, \underline{p}, H')$ de H' vers \mathfrak{M}^0 est un foncteur *d'homomorphismes saturé* si:

1° p est fidèle,

2° p_γ est un foncteur d'hypermorphismes saturé, i.e. si s est une unité de H' et si f est une bijection de source $p(s)$, il existe un unique élément h de H'_γ de source s vérifiant $p(h) = f$.

On appelle *catégorie p -structurée* un couple (C', s) vérifiant:

1° C' est une catégorie, s une unité de H' et $p(s) = C$,

2° il existe des éléments s_0 de H'_0 , a_0, b_0 et i de H tels que:

$$i \in s. H. s_0, \quad a_0 \in s_0. H. s, \quad b_0 \in s_0. H. s, \\ p(i) = (C, \iota, C'_0), \quad p(a_0) = \alpha, \quad p(b_0) = \beta,$$

où (C, ι, C'_0) est l'injection canonique de C'_0 dans C ,

4° il existe un produit fibré $s * s$ de (a_0, b_0) dans H' et un élément k de $s. H. s * s$ tel que $p(k)$ soit la loi de composition κ de C' .

On appelle *foncteur p -structuré* un triplet

$$\hat{h} = ((C', s'), h, (C', s))$$

vérifiant les conditions suivantes:

1° (C', s) et (C', s') sont des catégories p -structurées,

2° h appartient à $s'. H. s$ et $p(h)$, noté \underline{h} , définit un foncteur \bar{h} de

C' vers C'' .

On note $\mathcal{F}(p)$ l'ensemble des foncteurs p -structurés. $\mathcal{F}(p)^\circ$ est une catégorie pour la loi de composition:

$$\begin{aligned} ((C'_2, s'_2), b_2, (C_2, s_2)) \circ ((C'_1, s_1), b_1, (C_1, s_1)) = \\ = ((C'_2, s'_2), b_2 \cdot b_1, (C_1, s_1)) \end{aligned}$$

ssi $((C'_1, s_1) = (C_2, s_2))$. Elle admet pour classe d'objets l'ensemble $\mathcal{F}(p)_\circ$ des catégories p -structurées.

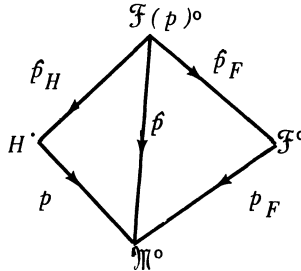
Appelons \hat{p}_H , \hat{p}_F et \hat{p} les foncteurs de $\mathcal{F}(p)^\circ$ vers H' , vers \mathcal{F}° et vers \mathfrak{M}° respectivement tels que:

$$\hat{p}_H(\hat{b}) = b, \quad \hat{p}_F(\hat{b}) = (C', \underline{b}, C') = \bar{b}, \quad \hat{p}(\hat{b}) = \underline{b}.$$

On a

$$p \circ \hat{p}_H = \hat{p} = p_F \circ \hat{p}_F,$$

où p_F est le foncteur d'oubli vers \mathfrak{M}° de la catégorie \mathcal{F}° des foncteurs.



Dans tout cet article, nous supposons que p est un foncteur d'homomorphismes saturé, que (K', s_K) est une catégorie p -structurée donnée, notée \mathbf{K} , que \mathcal{J} est un ensemble de catégories I' telles que I appartienne à \mathcal{U} , enfin que u_K est une application \mathcal{J} -limite projective naturalisée partielle donnée sur la catégorie K' . Autrement dit, u_K associe à certains foncteurs G vers K' et dont la source appartient à \mathcal{J} une limite projective naturalisée $u_K(G)$ de G . Pour simplifier les notations, nous poserons

$$\bar{\mathbf{K}} = (\mathbf{K}, u_K) = ((K', s_K), u_K).$$

Le problème est alors le suivant: Etant donné un foncteur p -structuré $\hat{b} = (\mathbf{K}, b, (C', s))$ de but \mathbf{K} , existe-t-il une catégorie p -structurée

«canonique» (C_p^{\cdot}, s_p) telle que:

1° (C^{\cdot}, s) «se plonge» dans une sous-catégorie p -structurée de la catégorie p -structurée (C_p^{\cdot}, s_p) ,

2° il existe un foncteur p -structuré $\hat{h}_p = (\mathbf{K}, h_p, (C_p^{\cdot}, s_p))$ de but \mathbf{K} «prolongeant» \hat{h} ,

3° pour tout foncteur G d'une catégorie appartenant à \mathcal{J} vers C_p^{\cdot} tel que $u_K(\bar{h}_p \circ G)$ soit défini, il existe une limite projective naturalisée T_G vérifiant $\bar{h}_p T_G = u_K(\bar{h}_p \circ G)$.

1. Autre formulation du problème.

Nous désignerons par $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}^{\circ}$ la «catégorie des triangles de foncteurs p -structurés au-dessus de \mathbf{K} », i. e. la catégorie définie comme suit:

- Elle a pour classe d'objets l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathbf{K}^{\circ}}$ des foncteurs p -structurés ayant \mathbf{K} pour but.

- Ses morphismes sont les triplets $(\hat{h}', \hat{q}, \hat{h})$, où

$$\hat{h}' = (\mathbf{K}, h', (C'^{\cdot}, s')) \text{ et } \hat{h} = (\mathbf{K}, h, (C^{\cdot}, s))$$

appartiennent à $\mathcal{F}_{\mathbf{K}^{\circ}}$ et où \hat{q} est un foncteur p -structuré de (C^{\cdot}, s) vers (C'^{\cdot}, s') tel que $\hat{h}' \circ \hat{q} = \hat{h}$.

- Un couple $((\hat{h}'_2, \hat{q}_2, \hat{h}_2), (\hat{h}'_1, \hat{q}_1, \hat{h}_1)) \in \mathcal{F}_{\mathbf{K}} \times \mathcal{F}_{\mathbf{K}}$ est composable ssi $\hat{h}_2 = \hat{h}'_1$, le composé étant alors $(\hat{h}'_2, \hat{q}_2 \circ \hat{q}_1, \hat{h}_1)$.

On appellera $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}^{\circ}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}^{\circ}$ ayant pour objets les foncteurs p -structurés \hat{h} dont le foncteur sous-jacent \bar{h} soit fidèle.

Considérons la catégorie $\mathcal{F}_{\bar{\mathbf{K}}}^{\circ}$ (resp. $\mathcal{F}_{\bar{\mathbf{K}}}^{\circ}$) «des triangles de foncteurs p -structurés (resp. structurés fidèles) au-dessus de $\bar{\mathbf{K}}$, compatibles avec un choix de limites», définie de la manière suivante:

- Ses objets sont les couples (\hat{h}, u) , où $\hat{h} = (\mathbf{K}, h, (C^{\cdot}, s))$ appartient à $\mathcal{F}_{\mathbf{K}^{\circ}}$ (resp. à $\mathcal{F}_{\mathbf{K}^{\circ}}^{\circ}$) et où u est une application \mathcal{J} -limite projective naturalisée partielle sur C^{\cdot} telle que $u(G)$ soit défini ssi $u_K(\bar{h} \circ G)$ est défini, lorsque G est un foncteur de $I' \in \mathcal{J}$ vers C^{\cdot} , et que dans ce cas on ait $\bar{h} u(G) = u_K(\bar{h} \circ G)$.

- Ses morphismes sont les triplets $((\hat{h}', u'), \hat{q}, (\hat{h}, u))$, où $(\hat{h}', \hat{q}, \hat{h})$ appartient à $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}$ (resp. à $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}^{\circ}$) et où le foncteur \bar{q} sous-jacent à \hat{q} est

compatible avec (u', u) (i. e. si $u(G)$ est défini, $u'(\bar{q} \circ G)$ est défini et égal à $\bar{q}u(G)$, lorsque G est un foncteur de $I' \in \mathcal{J}$ vers C').

- Un couple

$$(((\hat{h}'_2, u'_2), \hat{q}_2, (\hat{h}_2, u_2)), ((\hat{h}'_1, u'_1), \hat{q}_1, (\hat{h}_1, u_1)))$$

d'éléments de $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}$ (resp. de $\mathcal{F}'_{\mathbf{K}}$) sera composable ssi $(\hat{h}_2, u_2) = (\hat{h}'_1, u'_1)$, le composé étant alors $((\hat{h}'_2, u'_2), \hat{q}_2 \circ \hat{q}_1, (\hat{h}_1, u_1))$.

Soit $p_{\mathcal{J}}$ le foncteur de $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}^{\circ}$ vers $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}^{\circ}$ associant $(\hat{h}', \hat{q}, \hat{h})$ à l'élément $((\hat{h}', u'), \hat{q}, (\hat{h}, u))$; on note $p'_{\mathcal{J}}$ le foncteur de $\mathcal{F}'_{\mathbf{K}}^{\circ}$ vers $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}^{\circ}$ restriction de $p_{\mathcal{J}}$.

Le problème indiqué ci-dessus peut alors s'énoncer sous forme plus précise:

Etant donné un objet \hat{h} de $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}^{\circ}$, existe-t-il une $p_{\mathcal{J}}$ -structure libre engendrée par \hat{h} ?

DEFINITION. Soit C' une catégorie et u une application \mathcal{J} -limite projective naturalisée partielle sur C' ; on dira qu'une sous-catégorie M' de C' est saturée pour u si elle vérifie les conditions:

1° Lorsque G est un foncteur de $I' \in \mathcal{J}$ vers C' tel que $G(I)$ soit contenu dans M et que $u(G) = (G, t, e')$ soit défini, $t(I'_0)$ est une partie de M .

2° L'unique b vérifiant $t(i).b = t'(i)$ pour toute unité i de I' appartient à M , lorsque ϕ est une transformation naturelle (G, t', e') telle que $t'(I'_0)$ soit contenu dans M (on pose alors $b = \varprojlim \phi$).

Remarquons que, si M' est une sous-catégorie de C' saturée pour u , on peut définir sur M' une application \mathcal{J} -limite projective naturalisée partielle u_M , appelée restriction de u à M de la façon suivante:

Soit j le foncteur injection canonique de M' vers C' ; si G est un foncteur de $I' \in \mathcal{J}$ vers M' , on définit $u_M(G)$ ssi $u(j \circ G)$ est défini, et c'est alors l'unique transformation naturelle telle que $ju_M(G) = u(G)$.

Soit w (resp. w') le foncteur de $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}^{\circ}$ (resp. de $\mathcal{F}'_{\mathbf{K}}^{\circ}$) vers \mathcal{M}° associant C à l'objet (\hat{h}, u) , où $\hat{h} = (\mathbf{K}, b, (C', s))$, et associant $(C', q, C$ au morphisme $((\hat{h}', u'), \hat{q}, (\hat{h}, u))$, où $\hat{h}' = (\mathbf{K}, b', (C', s'))$.

Soit X (resp. X') l'ensemble des éléments $((\hat{b}', u'), \hat{q}, (\hat{b}, u))$ de $\mathcal{F}_{\bar{K}}$ (resp. de $\mathcal{F}_{\bar{K}}^1$), où

$$\hat{b}' = (\mathbf{K}, b', (C', s')) \text{ et } \hat{b} = (\mathbf{K}, b, (C', s)),$$

tels que $\hat{q} = ((C', s'), q, (C', s))$ soit un \hat{p} -monomorphisme strict, i. e. qu'il existe une p -sous-structure s'' de s' et un inversible $q' \in s'' \cdot H \cdot s$, dont l'image $\hat{p}(q')$ soit une restriction de q .

PROPOSITION 1. Soit $Q = ((\hat{b}', u'), \hat{q}, (\hat{b}, u))$ un élément de X (resp. de X'), où $\hat{b}' = (\mathbf{K}, b', (C', s'))$ et $\hat{b} = (\mathbf{K}, b, (C', s))$. Alors $\underline{q}(C)$ définit une sous-catégorie de C' saturée pour u' . De plus Q est un w -monomorphisme (resp. un w' -monomorphisme).

PREUVE. Soit $M = \underline{q}(C)$; la bijection \underline{q}' de C sur M restriction de l'injection \underline{q} définit un isomorphisme de C' sur la sous-catégorie M' de C' . Soit G' un foncteur de $I' \in \mathcal{J}$ vers C'' tel que $u'(G') = (G', t', e'^{\wedge})$ soit défini et que $G'(I)$ soit contenu dans M . L'application $\underline{q}'^{-1} \circ \underline{G}'$ définit un foncteur G de I' vers C' . Comme $u'(G')$ est défini,

$$\bar{b}' u'(G') = u_K(\bar{b}' \circ G') = u_K(\bar{b} \circ G)$$

est défini, de sorte que $u(G)$ est défini et $u'(G') = \bar{q}u(G)$. Si on pose $u(G) = (G, t, e^{\wedge})$, d'après l'égalité précédente on a $e' = \underline{q}(e)$ et $t' = \underline{q}'t$. Par suite $t'(I'_0)$ est une partie de M .

Soit $\phi' = (G', t'', e''^{\wedge})$ une autre transformation naturelle d'un foncteur constant sur l'unité e'' de C'_0 vers G' telle que $t''(I'_0)$ soit contenu dans M . On sait qu'il existe un unique $b = \varprojlim \phi'$ vérifiant

$$t'(i).b = t''(i), \text{ pour tout } i \in I'_0.$$

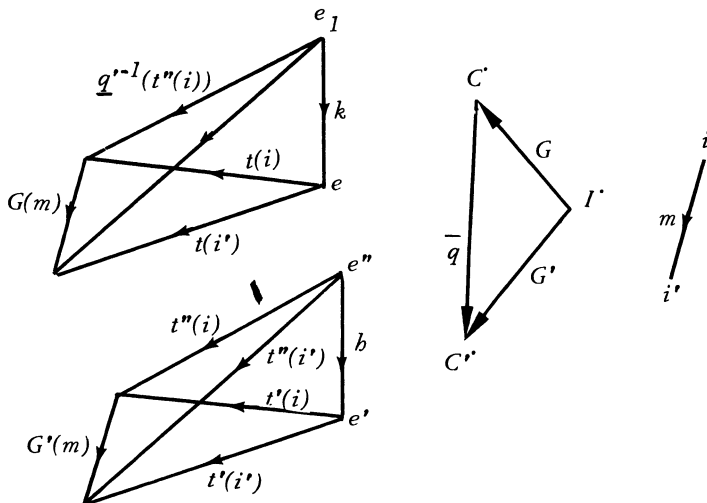
Montrons que b appartient à M . Comme $t''(I'_0)$ est contenu dans M , son image réciproque par q' est une partie de C et $\phi = (G, \underline{q}'^{-1}t'', e_1^{\wedge})$ est une transformation naturelle d'un foncteur constant vers G . Donc il existe un unique $k \in C$ tel que

$$t(i).k = \underline{q}'^{-1}(t''(i)), \text{ pour tout } i \in I'_0.$$

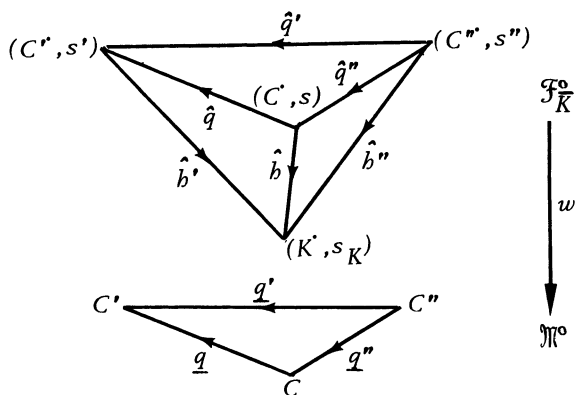
Considérons $\underline{q}(k)$; puisque

$$t'(i). \underline{q}(k) = \underline{q}(t(i)). \underline{q}(k) = \underline{q}(t(i).k) = \underline{q} \underline{q}'^{-1}(t''(i)) = t''(i)$$

et que b est déterminé d'une manière unique, $q(k) = b$ et b appartient à M . On en déduit que M' est saturé pour u' .



Montrons que Q est un w -monomorphisme. \hat{q} étant un \hat{p} -monomorphisme strict, $w(Q)$ est une injection, et par suite un monomorphisme.



Soit $Q' = ((\hat{b}', u'), \hat{q}', (\hat{b}'', u''))$ un élément de \mathcal{F}_K tel que

$$w(Q') = w(Q) \circ q'' , \text{ où } \hat{b}'' = (K, b'', (C'', s'')) .$$

\hat{q} étant un \hat{p} -monomorphisme strict, q'' définit un foncteur p -structuré: $\hat{q}'' = ((C', s), q'', (C'', s''))$. Soit G'' un foncteur de $I' \in \mathcal{J}$ vers C'' tel que $u''(G'') = (G'', t'', e'')$ soit défini. Puisque

$$Q' \in \mathcal{F}_{\bar{K}} \text{ et } q' = q \circ q'' ,$$

la limite $u'(\bar{q}' \circ G'') = u'(\bar{q} \circ \bar{q}'' \circ G'')$ est définie et égale à

$$\bar{q}' u''(G'') = \bar{q} \circ \bar{q}'' u''(G'') ,$$

de sorte que $\bar{q}' \circ G''(I)$ est contenu dans M ; d'après le début de la preuve, $u(\bar{q}'' \circ G'')$ est défini. De plus, \hat{q} étant un \hat{p} -monomorphisme strict, les égalités

$$\bar{q} \circ \bar{q}'' u''(G'') = u'(\bar{q} \circ \bar{q}'' \circ G'') = \bar{q} u(\bar{q}'' \circ G'')$$

entraînent $u(\bar{q}'' \circ G'') = \bar{q}'' u''(G'')$. Par suite,

$$Q'' = ((\hat{b}, u), \hat{q}'', (\hat{b}'', u'')) , \text{ où } \hat{b}'' = \hat{b} \circ \hat{q}'' ,$$

est un élément de $\mathcal{F}_{\bar{K}}$ vérifiant $Q' = Q \circ Q''$ et $w(Q'') = q''$. D'autre part Q'' est évidemment l'unique élément de $\mathcal{F}_{\bar{K}}$ remplissant ces conditions.

Si de plus Q appartient à X' et si Q' est un élément de $\mathcal{F}_{\bar{K}}'$, on voit que Q'' appartient aussi à $\mathcal{F}_{\bar{K}}'$, de sorte que X' est formé de w' -monomorphismes. ■

2. Limites projectives.

Rappelons qu'un foncteur q est dit à l' -limites projectives [1] si sa source et son but sont des catégories à l' -limites projectives et si q est compatible avec les l' -limites projectives.

PROPOSITION 2. Si p est un foncteur à produits fibrés finis et à J -produits, pour tout ensemble J appartenant à l'univers \mathcal{U} , alors $\mathcal{F}_{\bar{K}}^o$ et $\mathcal{F}_{\bar{K}}^{i'o}$ sont des catégories à J -produits. Les foncteurs $p_{\hat{q}}$ et $p_{\hat{q}}'$ sont alors à J -produits.

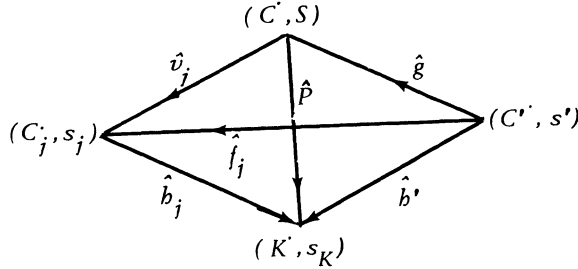
PREUVE. D'après [2], ces hypothèses entraînent que \hat{p} est à J' -limites projectives, pour toute catégorie J' telle que J appartienne à \mathcal{U} . Soit

$$\xi = (\hat{b}_j, u_j)_{j \in J} , \text{ où } \hat{b}_j = (\mathbf{K}, b_j, (C_j', s_j)) \text{ pour } j \in J ,$$

une famille d'objets de $\mathcal{F}_{\bar{K}}$. Considérons la catégorie p -structurée (C', s) produit fibré canonique de $(\hat{b}_j)_{j \in J}$ dans \hat{p} (i. e. dans $\mathcal{F}(p)^o$ et se projetant par \hat{p} sur le produit fibré canonique dans \mathfrak{M}^o). La projection canonique \underline{v}_j de C vers C_j définit un foncteur p -structuré

$$\hat{v}_j = ((C_j', s_j), v_j, (C', s)) .$$

La surjection associant $b_j(x_j)$ à la famille $(x_j)_{j \in J}$ définit un foncteur p -structuré $\hat{P} = ((K', s_K), P, (C', S))$. Par construction, $(\hat{b}_j, \hat{v}_j, \hat{P})$ appartient à \mathcal{F}_K .



Considérons l'ensemble $S(u_C)$ des foncteurs G de $I \in \mathcal{J}$ vers C' tels que $u_j(\bar{v}_j \circ G) = (\bar{v}_j \circ G, t_j, e_j)$ soit défini, pour tout $j \in J$. Soit G un élément de $S(u_C)$; posons

$$t_C(i) = (t_j(i))_{j \in J} \text{ pour tout } i \in I_0 \text{ et } e_C = (e_j)_{j \in J}.$$

Dans ces conditions, $u_C(G) = (G, t_C, e_C)$ est une transformation naturelle, et l'on définit une application \mathcal{J} -limite projective naturalisée partielle u_C sur C' . De plus, comme $\hat{P} = \hat{b}_j \circ \hat{v}_j$ pour tout $j \in J$, on a $\bar{P}u_C(G) = u_K(\bar{P} \circ G)$. Par conséquent, P est compatible avec (u_K, u_C) , de sorte que $((\hat{b}_j, u_j), \hat{v}_j, (\hat{P}, u_C))$ appartient à $\mathcal{F}_{\bar{K}}$.

Supposons que $F_j = ((\hat{b}_j, u_j), \hat{f}_j, (\hat{b}', u'))$ appartienne à $\mathcal{F}_{\bar{K}}$, pour tout $j \in J$, où $\hat{b}' = (K, b', (C', s'))$. L'application g associant $(f_j(x))_{j \in J}$ à x définit un foncteur p -structuré $\hat{g} = ((C', S), g, (C', s'))$ qui est l'unique foncteur p -structuré vérifiant $\hat{v}_j \circ \hat{g} = \hat{f}_j$, pour tout $j \in J$, et

$$((\hat{P}, u_C), \hat{g}, (\hat{b}', u')) \in \mathcal{F}_{\bar{K}}.$$

Donc (\hat{P}, u_C) est un produit de ξ dans $\mathcal{F}_{\bar{K}}^0$ et cette catégorie est à J -produits. Si de plus (\hat{b}_j, u_j) appartient à $\mathcal{F}_{\bar{K}}'$ pour tout $j \in J$, le foncteur p -structuré \hat{P} est fidèle, et (\hat{P}, u_C) est le produit de ξ dans $p\mathcal{J}'$. ■

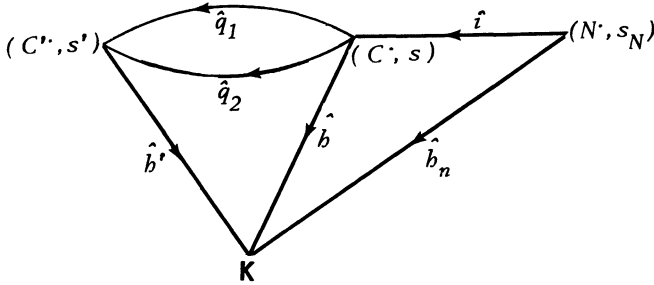
PROPOSITION 3. Si p est un foncteur à produits fibrés et à J -produits pour tout ensemble J appartenant à l'univers \mathcal{U} , alors $\mathcal{F}_{\bar{K}}^0$ et $\mathcal{F}_{\bar{K}}'^0$ sont des catégories à noyaux, $p\mathcal{J}$ et $p\mathcal{J}'$ sont des foncteurs à noyaux.

PREUVE. D'après [2], \hat{p} est à noyaux et tout noyau dans $\mathcal{F}(p)^0$ est un \hat{p} -monomorphisme strict. Soient

$$Q_1 = ((\hat{b}', u'), \hat{q}_1, (\hat{b}, u)) \text{ et } Q_2 = ((\hat{b}', u'), \hat{q}_2, (\hat{b}, u))$$

deux éléments de $\mathcal{F}_{\bar{K}}$ de même source et de même but, où

$$\hat{b}' = (\mathbf{K}, b', (C', s')) \text{ et } \hat{b} = (\mathbf{K}, b, (C', s)).$$



Il existe un noyau canonique $\hat{i} = ((C', s), i, (N', s_N))$ de (\hat{q}_2, \hat{q}_1) dans \hat{p} . Soit $\hat{b}_n = \hat{b} \circ \hat{i}$. Alors $(\hat{b}, \hat{i}, \hat{b}_n)$ est le noyau de (Q_2, Q_1) dans $\mathcal{F}_{\mathbf{K}}$. Soit G un foncteur de $I \in \mathcal{I}$ vers C' tel que $G(I)$ soit contenu dans N et que $u(G) = (G, t, e')$ soit défini. L'égalité $\bar{q}_2 u(\bar{i} \circ G) = \bar{q}_1 u(\bar{i} \circ G)$ entraîne que $t(I_0)$ est contenu dans N . Si de plus on a

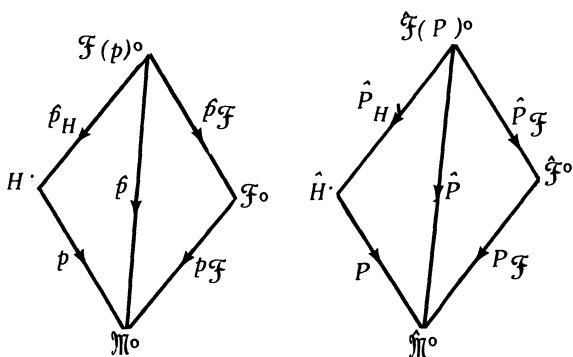
$$b = \lim_{\leftarrow} \phi, \text{ où } \phi = (G, t', e') \text{ et } t'(I_0) \subset N,$$

on obtient $q_1(b) = q_2(b)$, d'où $b \in N$. Par suite, N' est une sous-catégorie de C' saturée pour u et il existe une application \mathcal{I} -limite projective naturalisée partielle u_N sur N' restriction de u à N . Comme $\hat{b}_n = \hat{b} \circ \hat{i}$, et comme \bar{b} est compatible avec (u_K, u) , le foncteur \bar{b}_n est compatible avec (u_K, u_N) . Ainsi $\mathcal{F}_{\bar{K}}^0$ est à noyaux.

Si Q_1 et Q_2 appartiennent à $\mathcal{F}_{\bar{K}}^1$, le foncteur \bar{b}_n est fidèle, de sorte que $((\hat{b}, u), \hat{i}, (\hat{b}_n, u_N))$ est le noyau de (Q_2, Q_1) dans $\hat{p}_{\mathcal{I}}$. ■

3. Sous-structures engendrées.

Supposons que $\hat{\mathcal{U}}$ soit un univers tel que $\mathcal{U} \in \hat{\mathcal{U}}$ et $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{U}}$, que p soit la restriction d'un foncteur d'homomorphismes saturé P de \hat{H} vers la catégorie $\hat{\mathcal{M}}^0$ des applications associée à $\hat{\mathcal{U}}$ et que H' soit la sous-catégorie pleine de \hat{H} image réciproque de \mathcal{M}^0 . Soient $\hat{P}, \hat{P}_H, \hat{P}_{\mathcal{F}}, P_{\mathcal{F}}$ les foncteurs définis de la même manière que $\hat{p}, \hat{p}_H, \hat{p}_{\mathcal{F}}$ et $p_{\mathcal{F}}$, à partir de $\hat{\mathcal{U}}$. Soit $P_{\mathcal{I}}$ et W les foncteurs de $\hat{\mathcal{F}}_{\bar{K}}^0$ vers $\hat{\mathcal{F}}_{\mathbf{K}}^0$ et vers $\hat{\mathcal{M}}^0$ définis comme précédemment à partir de $\hat{\mathcal{U}}$, et soit $P'_{\mathcal{I}}$ et W' leurs restrictions à $\hat{\mathcal{F}}_{\bar{K}}^1$. On



notera $\tilde{\mathcal{U}}$ l'ensemble des éléments de \mathcal{U} équipotents à un élément de \mathcal{U} . Si A est un ensemble, l'ordinal initial équipotent à A est noté \bar{A} . Enfin Δ désigne l'ordinal associé à l'univers \mathcal{U} , c'est-à-dire l'ordinal borne supérieure des ordinaux \bar{A} , où $A \in \mathcal{U}$. On a $\Delta = \sup_{A \in \tilde{\mathcal{U}}} \bar{A}$.

DEFINITION. Soit δ un ordinal tel que $\delta \leq \Delta$. On dit que P est δ -engendrant pour \mathfrak{M} si:

1° P est sous-engendrant pour \mathfrak{M} , i. e. pour toute unité s de \hat{H} et toute partie E de $P(s)$ telle que E appartienne à $\tilde{\mathcal{U}}$, il existe une P -sous-structure \hat{s} de s engendrée par E , et on a $P(\hat{s}) \in \tilde{\mathcal{U}}$.

2° Si s est une unité de \hat{H} et $(s_\xi)_{\xi < \delta}$ une suite transfinie de P -sous-structures de s telles que:

$$P(s_\xi) \subset P(s_\zeta) \text{ et } P(s_\zeta) \in \tilde{\mathcal{U}}, \text{ pour } \xi \leq \zeta < \delta,$$

il existe une P -sous-structure \hat{s} de s vérifiant $P(\hat{s}) = \bigcup_{\xi < \delta} P(s_\xi)$.

Si P est δ -engendrant pour \mathfrak{M} , il est aussi δ' -engendrant pour \mathfrak{M} , si $\delta' < \delta$; en particulier si δ est infini, alors P est dénombrablement sous-engendrant pour \mathfrak{M} .

PROPOSITION 4. Supposons que $\mathcal{I} \in \tilde{\mathcal{U}}$ et que P soit δ -engendrant pour \mathfrak{M} , où δ est un certain ordinal régulier supérieur à \bar{I} , pour tout $I \in \mathcal{I}$. Alors le foncteur W est $(\mathfrak{M}, \hat{X}, \mathcal{F}_{\bar{K}^0})$ -engendrant et W' est $(\mathfrak{M}, \hat{X}', \mathcal{F}_{\bar{K}^0})$ -engendrant, où \hat{X} est l'ensemble des W -monomorphismes stricts et \hat{X}' celui des W' -monomorphismes stricts.

PREUVE. Soit $(\hat{h}, u) = ((K, h, (C, s)), u)$ un objet de $\hat{\mathcal{F}}_{\bar{K}^0}$ et M une partie de C appartenant à $\tilde{\mathcal{U}}$.

A) P étant dénombrablement sous-engendrant pour \mathfrak{M} , on sait [2] qu'il existe une sous-catégorie P -structurée stricte (E', s_E) de (C', s) engendrée par M , construite de la manière suivante:

On définit par récurrence des suites $(C'_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de sous-catégories de C' et $(s_i)_{i \in \mathbf{N}}$ d'objets de \hat{H} telles que:

- 1° C'_1 est la sous-catégorie de C' engendrée par M ,
- 2° C'_{i+1} est la sous-catégorie de C' engendrée par $P(s_i)$,
- 3° s_i est la P -sous-structure de s engendrée par C'_i et $P(s_i) \in \tilde{\mathfrak{U}}$.

Alors E est la réunion des C'_i , pour $i \in \mathbf{N}$, et s_E est la P -sous-structure de s définie par E .

B) Pour obtenir explicitement la W -sous-structure de (\hat{b}, u) engendrée par M , nous utiliserons la construction suivante. Considérons une sous-catégorie P -structurée stricte (V', s_V) de (C', s) telle que V appartienne à $\tilde{\mathfrak{U}}$. Appelons $S(u_V)$ l'ensemble des foncteurs G de $I' \in \mathfrak{J}$ vers C' tels que $u(G) = (G, t, e^\wedge)$ soit défini et que $G(I)$ soit contenu dans V . Soit G un tel foncteur; notons A_G^V la réunion de l'ensemble des $t(i)$, pour $i \in I'_0$, et de l'ensemble des $b = \varprojlim \phi$, pour toute transformation naturelle $\phi = (G, t', e'^\wedge)$ telle que $t'(I'_0)$ soit contenu dans V . Posons $V' = V \cup (\bigcup_{G \in S(u_V)} A_G^V)$ et montrons que V' appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$.

Soit G un foncteur appartenant à $S(u_V)$ et $u(G) = (G, t, e^\wedge)$. Considérons la surjection k associant

$$t(i) \text{ à } i \in I'_0 \text{ et } b = \varprojlim \phi \text{ à } (t'(i))_{i \in I'_0} \in V^{I'_0},$$

si $\phi = (G, t', e'^\wedge)$ vérifie $t'(I'_0) \subset V$.

Cette surjection applique une partie U_G de $I \cup V^{I'_0}$ sur A_G^V . Puisque $\tilde{\mathfrak{U}}$ est un univers auquel appartiennent V et I (par hypothèse), on voit successivement que I'_0 , $V^{I'_0}$, $I \cup V^{I'_0}$ et sa partie U_G appartiennent à $\tilde{\mathfrak{U}}$. k étant une surjection de U_G sur la partie A_G^V de $C \in \mathfrak{U}$, on trouve $A_G^V \in \tilde{\mathfrak{U}}$.

Soit k' l'application associant

$$(G(m))_{m \in I} \in \bigcup_{I' \in \mathfrak{J}} V^{I'} \text{ à } G \in S(u_V);$$

elle définit une bijection de $S(u_V)$ sur une partie A de $\bigcup_{I' \in \mathfrak{J}} V^{I'}$. Comme V , I et \mathfrak{J} appartiennent à $\tilde{\mathfrak{U}}$ par hypothèse, $V^{I'}$ appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$ ainsi que

$\bigcup_{I \in \mathcal{I}} V^I$ et sa partie A ; il s'ensuit que $S(u_V)$ appartient à $\tilde{\mathcal{U}}$. Par suite, V' appartient à $\tilde{\mathcal{U}}$, de même que V'' , si (V'', s'') est la sous-catégorie P -structurée stricte de (C', s) engendrée par V' .

On posera $V'' = \pi(V)$.

C) On sait que l'ordinal Δ associé à \mathcal{U} est inaccessible, de sorte que l'ordinal initial ω_Δ d'indice Δ est égal à Δ . Soit $\mu = \sup_{I \in \mathcal{I}} \bar{I}$. Puisque \mathcal{I} et I , pour tout $I \in \mathcal{I}$, appartiennent à $\tilde{\mathcal{U}}$, on a

$$\bar{\mathcal{I}} < \Delta \text{ et } \bar{I} < \Delta, \text{ d'où } \mu < \Delta \text{ et } \mu + 1 < \Delta,$$

Δ étant régulier; on en déduit que l'ordinal initial régulier $\omega_{\mu+1}$ est aussi strictement inférieur à Δ . Posons $\delta = \omega_{\mu+1}$. Par hypothèse, P est δ -engendrant pour \mathfrak{M} .

Soit (E', s_E) la sous-catégorie P -structurée stricte de (C', s) engendrée par M . Nous savons que E appartient à $\tilde{\mathcal{U}}$.

Soit ζ un ordinal inférieur ou égal à δ et supposons définie une suite transfinie $(E_\xi)_{\xi < \zeta}$ vérifiant la condition (s) suivante:

- a) $E_1 = \pi(E)$;
- b) $E_\xi \in \tilde{\mathcal{U}}$ définit une sous-catégorie P -structurée stricte (E'_ξ, s'_ξ) de (C', s) pour tout $\xi < \zeta$;
- c) $E_{\xi'}$ est une partie de E_ξ , pour $\xi' < \xi < \zeta$;
- d) si $\xi + 1 < \zeta$, alors $E_{\xi+1} = \pi(E_\xi)$;
- e) si $\xi < \zeta$ et si ξ est un ordinal limite, $E_\xi = \bigcup_{\xi' < \xi} E_{\xi'}$.

Montrons que l'on peut définir E_ζ de sorte que la suite transfinie $(E_\xi)_{\xi \leq \zeta}$ vérifie aussi (s). Deux cas se présentent:

a) Si ζ admet un prédécesseur ξ , posons $E_\zeta = \pi(E_\xi)$.

b) Si ζ est un ordinal limite, on pose $E_\zeta = \bigcup_{\xi < \zeta} E_\xi$. Alors E_ζ définit une sous-catégorie P -structurée stricte (E'_ζ, s'_ζ) de (C', s) . D'après la condition (s), l'ensemble E_ξ appartient à $\tilde{\mathcal{U}}$, pour tout $\xi < \zeta$. Comme $\zeta < \Delta$, où Δ est l'ordinal associé à \mathcal{U} , on a $\zeta \in \mathcal{U}$ (un ordinal étant considéré comme l'ensemble des ordinaux strictement inférieurs). Il s'ensuit $E_\zeta \in \tilde{\mathcal{U}}$.

Nous obtenons ainsi une suite transfinie $(E_\xi)_{\xi \leq \zeta}$, vérifiant (s). Par récurrence transfinie, on construit de cette façon une suite transfinie crois-

sante $(E_\xi, s_\xi)_{\xi \leq \delta}$ de sous-catégories P -structurées strictes de (C', s) telles que E_δ appartienne à $\tilde{\mathcal{U}}$.

Désignons par (L', s') la catégorie P -structurée (E_δ, s_δ) et montrons que L est une partie de C saturée pour u .

Soit G un foncteur de $I' \in \mathcal{J}$ vers C' tel que $u(G)$ soit défini et que $G(I)$ soit contenu dans L . Pour tout $m \in I$, on a $G(m) \in L$, de sorte qu'il existe un ordinal $\xi_m < \delta$ tel que $G(m) \in E_{\xi_m}$. On a

$$\xi_m < \delta \text{ pour tout } m \in I \text{ et } \bar{I} \leq \mu < \delta, \text{ d'où } \xi = \sup_{m \in I} \xi_m < \delta,$$

car δ est régulier. Chaque E_{ξ_m} étant contenu dans E_ξ (condition (s)), on en déduit que $G(I)$ est contenu dans E_ξ . Donc

$$G \in \mathcal{S}(u_{E_\xi}) \text{ et } t(I'_0) \subset A_G^{E_\xi} \subset E_{\xi+1} = \pi(E_\xi) \subset L,$$

si $u(G) = (G, t, e^\wedge)$.

Soit $\phi = (G, t', e'^\wedge)$ une transformation naturelle telle que $t'(I'_0)$ soit contenu dans L . Pour toute unité i de I' , il existe un ordinal $\xi_i < \delta$ tel que $t'(i) \in E_{\xi_i}$. Soit $\xi' = \sup_{i \in I'_0} \xi_i$. On voit comme précédemment que l'on a $\xi' < \delta$. Si $\xi'' = \sup(\xi, \xi')$, on obtient

$$t'(I'_0) \subset E_{\xi''}, \text{ d'où } G \in \mathcal{S}(u_{E_{\xi''}}) \text{ et } \lim_{\leftarrow} \phi \in A_G^{E_{\xi''}} \subset L.$$

Il en résulte que L définit une W -sous-structure (\hat{h}', u') de (\hat{h}, u) , où \hat{h}' est le foncteur P -structuré restriction de \hat{h} à (L', s') et u' l'application \mathcal{J} -limite projective naturalisée sur L' restriction de u .

D) Supposons que B soit une partie de C telle que $M \subset B \in \tilde{\mathcal{U}}$ et que B définisse une (\hat{X}, W) -sous-structure de (\hat{h}, u) , de sorte que la partie B de C est saturée pour u . Montrons que B contient L . Or B contient E , car (E', s_E) est la sous-catégorie P -structurée stricte de (C', s) engendrée par M . Soit ξ un ordinal tel que $\xi \leq \delta$ et supposons que E_ξ soit une partie de B , pour tout $\xi < \zeta$.

a) Si ζ est limite, on trouve $E_\zeta = \bigcup_{\xi < \zeta} E_\xi \subset B$.

b) Si $\zeta = \xi + 1$, on a $E_\zeta = \pi(E_\xi)$. Dans la construction de E_ζ , on a considéré

$$E'_\xi = E_\xi \cup \left(\bigcup_{G \in \mathcal{S}(u_{E_\xi})} A_G^{E_\xi} \right), \text{ où } E_\xi \subset B.$$

Soit G un foncteur de $I' \in \mathcal{J}$ vers C' tel que $u(G) = (G, t, e')$ soit défini et $t(I'_0)$ contenu dans E_ξ . Alors $G(I)$ est contenu dans B et, B étant saturé pour u , on trouve $t(I'_0) \subset B$ et $\varprojlim \phi \in B$, pour toute transformation naturelle $\phi = (G, t', e')$ telle que $t'(I'_0) \subset E_\xi$. Il en résulte

$$A_G^{E_\xi} \subset B \quad \text{pour tout } G \in \mathcal{S}(u_{E_\xi}), \text{ d'où } E'_\xi \subset B.$$

Comme B définit une sous-catégorie P -structurée stricte de (C', s) contenant E'_ξ et comme (E'_ξ, s_ξ) est la sous-catégorie P -structurée stricte de (C', s) engendrée par E'_ξ , on voit que E_ξ est contenu dans B .

Par récurrence transfinie, on en déduit $L = E_\delta \subset B$.

Ceci prouve que (\hat{b}', u') est la $(\hat{X} \circ \tilde{\mathcal{F}}_{\bar{K}_0}, W)$ -sous-structure de (\hat{b}, u) engendrée par M , où $\tilde{\mathcal{F}}_{\bar{K}}$ désigne la saturante de $\mathcal{F}_{\bar{K}}$ dans $\hat{\mathcal{F}}_{\bar{K}}^o$.

Si de plus (\hat{b}, u) appartient à $\hat{\mathcal{F}}_{\bar{K}_0}'$, alors \hat{b}' est fidèle, de sorte que (\hat{b}', u') est aussi la W' -sous-structure de (\hat{b}, u) engendrée par M . ■

4. Conclusion.

PROPOSITION 5. $p\mathcal{q}$ et $p'\mathcal{q}$ admettent des adjoints, si $H \in \hat{\mathcal{U}}$.

PREUVE. D'après le théorème d'existence de structures libres de [4], $p\mathcal{q}$ admet un adjoint, les conditions suivantes étant vérifiées:

a) $p\mathcal{q}$ est à noyaux (Proposition 3) et, par construction des noyaux, tout noyau appartient à la sous-catégorie \hat{X} des $P\mathcal{q}$ -monomorphismes.

b) $P\mathcal{q}$ est $(\mathcal{M}, \hat{X} \circ \mathcal{F}_{\bar{K}_0})$ -engendrant, car $W = W'' \circ P\mathcal{q}$ est $(\mathcal{M}, \hat{X} \circ \mathcal{F}_{\bar{K}_0})$ -engendrant, et $P\mathcal{q}(\hat{X})$ est une partie de l'ensemble des W'' -monomorphismes, en notant W'' le foncteur d'oubli de $\hat{\mathcal{F}}_{\bar{K}}^o$ vers \mathcal{M}^o .

c) $P\mathcal{q}$ est à $\mathcal{F}_{\bar{K}}$ -produits. En effet, $P\mathcal{q}$ étant à $\hat{\mathcal{U}}$ -produits, il suffit de montrer que $\mathcal{F}_{\bar{K}} \in \hat{\mathcal{U}}$. Or, si

$$(\hat{b}, u) = (((K', s_K), b, (C', s)), u) \in \mathcal{F}_{\bar{K}_0},$$

alors (K', s_K) et (C', s) appartiennent à $A = ((\mathcal{U} \times \mathcal{M}) \times H)$ et (\hat{b}, u) à $((A \times H \times A) \times \mathcal{M})$. Comme $\hat{\mathcal{U}}$ est un univers auquel appartient \mathcal{U} , les ensembles \mathcal{M} et A appartiennent à $\hat{\mathcal{U}}$. Donc $((A \times H \times A) \times \mathcal{M}) \in \hat{\mathcal{U}}$, et $\mathcal{F}_{\bar{K}_0} \in \hat{\mathcal{U}}$. Enfin, $\mathcal{F}_{\bar{K}} \in \hat{\mathcal{U}}$, car $\mathcal{F}_{\bar{K}} \subset \mathcal{F}_{\bar{K}_0} \times (A \times H \times A) \times \mathcal{F}_{\bar{K}_0} \in \hat{\mathcal{U}}$. ■

EXEMPLE. Si p est le foncteur d'oubli fidèle de la catégorie \mathcal{F}^0 des foncteurs vers \mathcal{M}^0 , on retrouve le théorème de complétion d'un foncteur double de [3]. Celui-ci admet, pour cas particulier, le théorème de complétion d'un foncteur local, lequel intervient dans la construction des structures définies par atlas (variétés topologiques, variétés différentiables ou analytiques,...).

Références.

1. C. EHRESMANN, *Algèbre*, C.D.U. 1968, Paris.
2. A. BASTIANI-C. EHRESMANN, Catégories de foncteurs structurés, *Cahiers Topo. et Géo. diff.* XI-3 (1969), 329 - 384.
3. M. - C. LEBLOND, Complétion de foncteurs ordonnés et de foncteurs doubles, *Esquisses Mathématiques* 15 (1971), Paris (Thèse 3^e cycle).
4. C. EHRESMANN, Construction de structures libres, *Lecture Notes* 92, Springer (1969).
5. C. EHRESMANN, Prolongement universel d'un foncteur par adjonction de limites, *Dissertationes Math.* LXIV (1969), Varsovie.

Département de Mathématiques
 Faculté des Sciences
 33 rue Saint-Leu
 80 - AMIENS.