CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

FRANÇOIS FOLTZ

Complétion des V-catégories

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 14, nº 1 (1973), p. 41-113

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1973__14_1_41_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XIV-1

COMPLETION DES V-CATEGORIES

par François FOLTZ

Introduction.

Le but de ce travail est de compléter une **V**-catégorie à l'aide de limites projectives et de limites inductives, dont les catégories d'indices appartiennent à un petit ensemble de petites catégories ; **V** est ici une catégorie monoïdale symétrique, dont le produit tensoriel partiel commute avec les limites inductives.

Ce problème s'inspire d'une étude analogue faite pour les catégories structurées (C. Ehresmann [S.E.S.L.]) : On cherche une complétion libre, qui trouve son application dans l'étude des réalisations d'esquisses; dans notre cas ce serait des «**V**-réalisations» à valeurs dans une **V**-catégorie. L'idée est donc distincte de la complétion de Dubuc, où il s'agit de plonger une petite **V**-catégorie dans une **V**-catégorie complète (i.e. à petites limites, à co-tenseurs et à petites fins) de manière non libre, mais avec des propriétés de densité [K.E.C.T] .

La première partie du texte adapte des idées exposées dans [S. C.F.D.] à la catégorie des petits **V**-foncteurs ; on y donne des outils nécessaires à la complétion ; en particulier, les trois théorèmes sur les **V**-catégories engendrées, les **V**-catégories libres associées à des **V**-graphes orientés et **V**-foncteurs quasi-surjections. Ce dernier théorème permet de définir des **V**-catégories limites inductives. Ces résultats s'appliquent bien entendu au cas des catégories ayant une seule unité. On obtient alors les **V**-monoïdes libres de Dubuc [F.M.E.D.] .

Le problème de complétion est résolu dans la deuxième partie. On donne dans le n° 1 un théorème d'existence, pour une **V**-catégorie $\mathbf{A}$, d'une complétion libre $\bar{\mathbf{A}}$ de $\mathbf{A}$, munie d'un choix univoque de limites; puis, dans le n° 2, on construit explicitement $\bar{\mathbf{A}}$. En fait, le théorème d'existence de $\bar{\mathbf{A}}$ avait déjà été exposé au Séminaire Ehresmann en 1968, la présentation étant faite dans le cadre un peu plus général des catégories dominées. Au lieu de supposer $\mathbf{V}$ monoïdale, on pourrait d'ailleurs supposer que $\mathbf{V}$ est une catégorie fermée [C.L.C.A.], ce qui serait plus proche du travail primitif.

Notations.

On se donne deux univers $\mathbf{E}_0$ et $\hat{\mathbf{E}}_0$ vérifiant: $\mathbf{E}_0 \in \hat{\mathbf{E}}_0$ et $\mathbf{E}_0 \subset \hat{\mathbf{E}}_0$. (Les ensembles de $\hat{\mathbf{E}}_0$ jouent le rôle d'ensembles et ceux de $\mathbf{E}_0$ le rôle de classes). On désigne par $\mathbf{E}$ et $\hat{\mathbf{E}}$ les catégories pleines associées à $\mathbf{E}_0$ et $\hat{\mathbf{E}}_0$. On considère aussi deux catégories monoïdales symétriques $\mathbf{V} = (\underline{\mathbf{V}}, \otimes, r, l, a, c, I)$ et $\hat{\mathbf{V}} = (\hat{\underline{\mathbf{V}}}, \hat{\otimes}, \hat{r}, \hat{l}, \hat{a}, \hat{c}, I)$ telles que:

- le foncteur de base $\hat{\mathcal{P}} = \hat{\underline{\mathbf{V}}}(-, I)$ de $\hat{\mathbf{V}}$ est à valeurs dans $\hat{\mathbf{E}}$,
- le foncteur partiel $- \hat{\otimes} V$ commute avec les limites inductives, pour tout V,
- $\underline{\mathbf{V}}$ est la sous-catégorie pleine de $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ dont les objets sont les V vérifiant: $\hat{\underline{\mathbf{V}}}(V, I)$ appartient à $\mathbf{E}_0$,
- $\otimes$, l, r, a, c sont des restrictions de $\hat{\otimes}$, $\hat{l}$, $\hat{r}$, $\hat{a}$, $\hat{c}$.

Une $\hat{\mathbf{V}}$-catégorie est notée $\mathbf{A}$, l'ensemble de ses objets $\mathbf{A}_0$ et sa catégorie sous-jacente $\underline{\mathbf{A}}$. Si (A', A) est un couple d'objets de $\mathbf{A}$, on désigne par $\mathbf{A}(A', A)$ la $\hat{\mathbf{V}}$-structure définie sur l'ensemble des flèches de source A et de but A'. Les morphismes de composition sont notés $m_{\mathbf{A}}(A'', A', A)$ ou $m_{(A'', A', A)}$ et les morphismes unités $j_{\mathbf{A}}(A)$ ou $j(A)$. Si $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur, le morphisme de $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ définissant F est noté $F(A', A): \mathbf{A}(A', A) \to \mathbf{B}(B', B)$, le foncteur sous-jacent est désigné par $\underline{F}: \underline{\mathbf{A}} \to \underline{\mathbf{B}}$ et sa restriction aux objets par $F_0: \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$.

La catégorie ayant pour flèches les $\hat{\mathbf{V}}$-foncteurs F tels que F_0 est une application de $\hat{\mathbf{E}}$ est notée $\hat{\mathbf{V}}$-$\mathcal{C}at$. Sa sous-catégorie formée des $\mathbf{V}$-foncteurs est $\mathbf{V}$-$\mathcal{C}at$; celle-ci admet pour sous-catégorie pleine $\mathbf{V}$-cat qui admet pour objets les $\mathbf{V}$-catégories $\mathbf{A}$ telles que $\mathbf{A}_0$ appartient à $\mathbf{E}_0$. On pose :

$$\hat{\mathbf{E}}\text{-}\mathcal{C}at = \hat{\mathcal{C}at}, \quad \mathbf{E}\text{-}\mathcal{C}at = \mathcal{C}at \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\text{-}cat = cat.$$

$\mathcal{P}_{\hat{\mathbf{V}}}: \hat{\mathbf{V}}\text{-}\mathcal{C}at \to \hat{\mathcal{C}at}$ désigne le foncteur qui associe $\underline{F}$ à F.

Il nous arrivera, par abus de notations, d'identifier un objet d'une catégorie et la flèche identique sur cet objet, ceci pour simplifier certaines notations.

I QUELQUES PROPRIETES DE V-CAT

I.1. Limites projectives.

Soit $\underline{\mathbf{K}}$ une catégorie de $\hat{Cat}$ et S un foncteur de $\underline{\mathbf{K}}$ vers $\hat{\mathbf{V}}$-Cat:

PROPOSITION I.1. *Si $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ est à $\{\underline{\mathbf{K}}\}$-limites projectives, il en est de même de $\hat{\mathbf{V}}$-Cat* [K.E.C.T] .

PREUVE. Posons $S(K)=\mathbf{A}_K$, pour toute unité K de $\underline{\mathbf{K}}$, et $F_k=S(k)$, pour toute flèche k de $\underline{\mathbf{K}}$. Soit $\mathbf{A}_0$ l'ensemble des familles $A=(A_K)$ (K parcourt les unités de $\underline{\mathbf{K}}$) vérifiant:

- A_K est une unité de $\mathbf{A}_K$,
- Si $k: K \to K'$, alors $A_{K'}=S(k)(A_K)$.

Désignons par $A=(A_K)$ et $A'=(A'_K)$ deux éléments de $\mathbf{A}_0$ et par $S(A', A)$ le foncteur de $\underline{\mathbf{K}}$ vers $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$, qui à k associe $F_k(A'_K, A_K)$; ce foncteur admet une limite projective $\mathbf{A}(A', A)$, dont les projections correspondantes sont notées $G_K(A', A)$. Soient m_K et j_K respectivement les flèches de composition et les flèches unités de $\mathbf{A}_K$. Si $A''=(A''_K)$ est un troisième élément de $\mathbf{A}_0$, il existe une transformation naturelle de but $S(A'', A)$ de sourcc un foncteur constant sur $\mathbf{A}(A'', A')\hat{\otimes}\mathbf{A}(A', A)$ et définie par la famille :

$$(m_K(A''_K, A'_K, A_K).(G_K(A'', A')\hat{\otimes} G_K(A', A))).$$

Sa limite définit le morphisme de composition $m(A'', A', A)$. De même, il existe une transformation naturelle de but $S(A, A)$, de source un foncteur constant sur I et définie par la famille $(j_K(A_K))$; sa limite $j(A)$ définit le morphisme unité de $\mathbf{A}$ en A. En effet, par définition, on a le diagamme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}(A', A) \arrow[d, "G_K(A', A)"'] & \mathbf{A}(A', A)\hat{\otimes}\mathbf{A}(A, A) \arrow[l, "m"'] \arrow[d, "G_K(A', A)\hat{\otimes} G_K(A, A)"] & \mathbf{A}(A', A)\hat{\otimes} I \arrow[l, "\mathbf{A}(A', A)\hat{\otimes} j(A)"'] \arrow[d, "G_K(A', A)\hat{\otimes} I"] \\
\mathbf{A}_K(A'_K, A_K) & \mathbf{A}_K(A'_K, A_K)\hat{\otimes}\mathbf{A}_K(A_K, A_K) \arrow[l, "m_K"] & \mathbf{A}_K(A'_K, A_K)\hat{\otimes} I \arrow[l, "\mathbf{A}_K(A'_K, A_K)\hat{\otimes} j_K(A_K)"]
\end{tikzcd}$$

La naturalité de $\hat{l}$ assure que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}(A', A) \arrow[d, "G_K(A', A)"'] & \mathbf{A}(A', A) \hat{\otimes} I \arrow[l, "\hat{l}"'] \arrow[d, "G_K(A', A) \hat{\otimes} I"'] \\
\mathbf{A}_K(A'_K, A_K) & \mathbf{A}_K(A'_K, A_K) \hat{\otimes} I \arrow[l, "\hat{l}"]
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathbf{A}(A', A)$ est une limite, la propriété des j_K assure que j est une flèche unité. On montre de même que les flèches de composition sont associatives en utilisant la naturalité de l'associativité du foncteur $\hat{\otimes}$. Ainsi $\mathbf{A}$ est une $\hat{\mathbf{V}}$-catégorie. On a, de plus, des $\hat{\mathbf{V}}$-foncteurs $G_K : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_K$ vérifiant :

$$F_k \cdot G_K = G_{K'}, \quad \text{si} \quad k : K \to K'.$$

Soient $\mathbf{B}$ une autre $\hat{\mathbf{V}}$-catégorie et (G'_K) une famille de $\hat{\mathbf{V}}$-foncteurs de source $\mathbf{B}$ vérifiant :

- le but de G'_K est $\mathbf{A}_K$,
- $F_k \cdot G'_K = G'_{K'}$, si $k : K \to K'$.

Pour tout couple d'unités (B', B) de $\mathbf{B}$, il existe un morphisme bien déterminé $F'(B', B)$ tel que :

$G_K(A', A). F'(B', B) = G'_K(B', B)$, où $A' = (\underline{G}'_K(B'))$ et $A = (\underline{G}'_K(B))$.

Comme les G'_K et les G_K sont compatibles avec les flèches unités et les flèches de composition, on en déduit, par passage à la limite, que l'on a un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur $F' : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tel que :

$$G_K \cdot F' = G'_K, \quad \text{pour toute unité } K \text{ de } \underline{\mathbf{K}}.$$

L'unicité de F' assure que $\mathbf{A}$ est une limite projective de S. ∎

REMARQUE : Si le foncteur injection de $\underline{\mathbf{V}}$ dans $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ est compatible avec les $\{\underline{\mathbf{K}}\}$-limites, il en est de même du foncteur injection de $\mathbf{V}$-*Cat* dans $\hat{\mathbf{V}}$-*Cat*.

I.2. Limites inductives.

Soit S un foncteur de $\underline{\mathbf{K}}$ dans $\mathbf{V}$-*cat*, où $\underline{\mathbf{K}}$ est filtrante.

PROPOSITION I.2. *Si $\underline{\mathbf{V}}$ est à limites inductives filtrantes, il en est de même de $\mathbf{V}$-cat. Si le foncteur de base de $\mathbf{V}$ est compatible avec ces limites (ainsi que l'inclusion de $\underline{\mathbf{V}}$ dans $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$), il en est de même du foncteur d'oubli de $\mathbf{V}$-cat dans cat (et du foncteur de $\mathbf{V}$-cat dans $\hat{\mathbf{V}}$-Cat).*

PREUVE. Posons $S(K) = \mathbf{A}_K$, pour toute unité K de $\underline{\mathbf{K}}$, et $S(K) = F_k$ pour toute flèche k. On a un foncteur S_0 de $\underline{\mathbf{K}}$ dans $\mathbf{E}$ qui à K associe $(\mathbf{A}_K)_0$ et à k associe la restriction $(F_k)_0$ de F_k aux unités. Ce foncteur admet une limite inductive $\mathbf{A}_0$; les co-projections correspondantes seront notées $(G_K)_0$. Pour tout couple (A', A) d'éléments de la limite $\mathbf{A}_0$, désignons par $\phi(A', A)$ le diagramme de la catégorie $\underline{\mathbf{V}}$ ayant pour flèches celles de la forme $F_k(A'_K, A_K)$, où $(G_K)_0(A_K) = A$, $(G_K)_0(A'_K) = A'$ et où k est une flèche de source K. Ce diagramme est filtrant et admet donc une limite inductive $\mathbf{A}(A', A)$, dont les co-projections seront désignées par $G_K(A'_K, A_K)$. Si $j_K(A_K)$ est le morphisme unité associé à A_K dans $\mathbf{A}_K$, on pose:

$$j(A) = G_K(A'_K, A_K) . j_K(A_K).$$

Cette définition ne dépend pas de l'objet K, car les foncteurs F_k sont compatibles avec les morphismes unités; $\underline{\mathbf{K}}$ étant filtrante, elle ne dépend pas non plus de A_K. Considérons un troisième élément A'' de $\mathbf{A}_0$. Il existe un objet K' de $\underline{\mathbf{K}}$ et deux objets $A'_{K'}$ et $A''_{K'}$ de $\mathbf{A}_{K'}$ tels que:

$$(G_{K'})_0(A''_{K'}) = A'' \quad \text{et} \quad (G_{K'})_0(A'_{K'}) = A'.$$

On fixe tout d'abord $\mathbf{A}_{K'}(A'_{K'}, A''_{K'})$. Comme la catégorie $\underline{\mathbf{K}}$ est filtrante, il existe des flèches $k : K \to K''$ et $k' : K' \to K''$ de même but. La flèche

$$\sigma(K) = G_{K''}(A'_{K''}, A_{K''}) . m_{K''}(A'_{K''}, A''_{K''}, A_{K''}) .$$
$$.(F_{k'}(A'_{K'}, A''_{K'}) \otimes F_k(A''_K, A_K))$$

de $\underline{\mathbf{V}}$ est indépendante du choix du couple (k, k'). En effet, les $\mathbf{V}$-foncteurs F_k sont compatibles avec les morphismes de composition. La famille $(\sigma(K))$, quand (A''_K, A_K) parcourt les objets de $\phi(A'', A)$, définit un cône inductif de but $\mathbf{A}(A', A)$ et de source $\mathbf{A}_{K'}(A'_{K'}, A''_{K'}) \otimes \phi(A'', A)$. Cette source admet $\mathbf{A}_{K'}(A'_{K'}, A''_{K'}) \otimes \mathbf{A}(A'', A)$ pour limite inductive, car le foncteur $\mathbf{A}_{K'}(A'_{K'}, A''_{K'}) \otimes -$ est compatible avec les limites inductives. Soit

$$\rho(K'): \mathbf{A}_{K'}(A'_{K'}, A''_{K'}) \otimes \mathbf{A}(A'', A) \to \mathbf{A}(A', A)$$

le co-crochet de la transformation naturelle précédente. Considérons une autre flèche $k_1: K_1 \to K'$ de $\underline{\mathbf{K}}$; à partir de K_1 on définit une famille de flèches $(\sigma_1(K))$ de $\underline{\mathbf{V}}$, analogue à la famille $(\sigma(K))$. On a:

$$\sigma_1(K) = \sigma(K).(F_{k_1}(A'_{K_1}, A''_{K_1}) \otimes \mathbf{A}_K(A''_K, A_K)).$$

On en déduit:

$$\rho(K_1) = \rho(K').(F_{k_1}(A'_{K_1}, A''_{K_1}) \otimes \mathbf{A}(A'', A)).$$

Cette équation est valable pour toute flèche $k_1: K_1 \to K'$ de $\underline{\mathbf{K}}$. Ainsi la famille $(\rho(K))$ détermine une transformation naturelle de but un foncteur constant sur $\mathbf{A}(A', A)$, et dont la source est le diagramme déterminé par $\phi(A', A'') \otimes \mathbf{A}(A'', A)$; or ce foncteur admet $\mathbf{A}(A', A'') \otimes \mathbf{A}(A'', A)$ pour limite inductive, car le foncteur $- \otimes \mathbf{A}(A', A)$ est compatible avec ces limites. On notera $m(A', A'', A)$ le co-crochet de cette transformation naturelle. Montrons que nous avons défini une $\mathbf{V}$-catégorie $\mathbf{A}$ dont l'ensemble des objets est $\mathbf{A}_0$, dont la composition est représentée par m et l'unité par j. On suppose que $A'' = A$; on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}(A', A) & & \mathbf{A}(A', A) \otimes \mathbf{A}(A, A) \arrow[ll, "m(A', A, A)"'] \\
\mathbf{A}_K(A', A) \arrow[u, "G_K(A', A)"] & & \mathbf{A}_K(A', A) \otimes \mathbf{A}_K(A, A) \arrow[ll, "m_K(A', A, A)"] \arrow[u, "G_K(A', A) \otimes G_K(A, A)"']
\end{tikzcd}$$

par construction de m,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}(A',A)\otimes\mathbf{A}(A,A) & & \mathbf{A}(A',A)\otimes I \arrow[ll, "\mathbf{A}(A',A)\otimes j(A)"'] \\
\mathbf{A}_K(A',A)\otimes\mathbf{A}_K(A,A) \arrow[u, "G_K(A',A)\otimes G_K(A,A)"] & & \mathbf{A}_K(A',A)\otimes I \arrow[ll, "\mathbf{A}_K(A',A)\otimes j_K(A)"] \arrow[u, "G_K(A',A)\otimes I"']
\end{tikzcd}$$

par construction de j,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}(A',A) & & \mathbf{A}(A',A)\otimes I \arrow[ll, "l"'] \\
\mathbf{A}_K(A',A) \arrow[u, "G_K(A',A)"] & & \mathbf{A}_K(A',A)\otimes I \arrow[ll, "l"] \arrow[u, "G_K(A',A)\otimes I"]
\end{tikzcd}$$

par naturalité de l. Par suite, $j(A)$ est bien un morphisme unité à droite :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}(A',A) & & \mathbf{A}(A',A)\otimes I \arrow[ll, "l"] \arrow[dll, "\mathbf{A}(A',A)\otimes j(A)"] \\
\mathbf{A}(A',A)\otimes\mathbf{A}(A,A) \arrow[u, "m(A',A,A)"] & &
\end{tikzcd}$$

Les lois de composition m_K sont associatives; en utilisant la naturalité de l'associativité du foncteur $\otimes$, on montre de manière analogue que m est associatif.

Soit **B** une **V**-catégorie; on se donne une famille de **V**-foncteurs G'_K : $\mathbf{A}_K \to \mathbf{B}$ vérifiant : $G'_{K'} . F_k = G'_K$, si $k : K \to K'$. On a une transformation naturelle ayant S_0 pour source et pour but un foncteur constant sur $\mathbf{B}_0$. Il existe une application unique $\underline{H}_0$ telle que $\underline{H}_0 . (G_K)_0 = (G'_K)_0$. Soient (A', A) un couple d'éléments de $\mathbf{A}_0$,

$$B' = \underline{H}_0(A') \quad \text{et} \quad B = \underline{H}_0(A).$$

La famille $(G'_K(A', A))$ détermine une transformation naturelle de source $\phi(A', A)$ et de but un foncteur constant sur $\mathbf{B}(B', B)$. On notera $H(A', A)$ le co-crochet correspondant. Les G'_K sont des **V**-foncteurs; ils sont donc compatibles avec les morphismes unités et les morphismes de composition. Par passage à la limite, on en déduit que H est aussi compatible avec les morphismes de composition et les morphismes unités; donc H est un **V**-foncteur de **A** vers **B** et vérifie :

$$H . G_K = G'_K, \text{ pour toute unité } K \text{ de } \underline{\mathbf{K}}.$$

Ainsi **A** est une limite inductive du foncteur S. La fin de la démonstration est évidente. ■

I.3. $\hat{\mathbf{Y}}$-sous-catégorie engendrée.

On se donne une sous-catégorie $\hat{X}$ de la catégorie des monomorphismes de $\underline{\hat{\mathbf{V}}}$ telle que :

si x appartient à $\hat{X}$, si x' appartient à $\hat{X}$ et si $x . y = x'$, alors y appartient à $\hat{X}$.

On désigne par $\hat{Y}$ l'ensemble des $\hat{\mathbf{V}}$-foncteurs $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ vérifiant :
- la restriction de $\underline{F}$ aux unités de **A** est injective,
- pour tout couple (A', A) de $\mathbf{A}_0$, $F(A', A)$ appartient à $\hat{X}$.

DEFINITION I.1. Sous les conditions précédentes, on dira que **A** est une $\hat{Y}$-*sous-catégorie* de **B**.

On se donne une $\hat{\mathbf{V}}$-catégorie **B**, un sous-ensemble $\mathbf{A}_0$ de $\mathbf{B}_0$, ensemble des unités de $\mathbf{B}$, et des éléments $F(A', A)$ de $\hat{X}$ de but $\mathbf{B}(A', A)$, pour tout couple (A', A) d'éléments de $\mathbf{A}_0$; la source de $F(A', A)$ est notée $\mathbf{A}(A', A)$. On suppose de plus que :

a°) pour tout triplet (A', A'', A) d'éléments de $\mathbf{A}_0$, il existe une flèche $m'(A', A'', A)$ telle que

$$m(A', A'', A).(F(A', A'') \hat{\otimes} F(A'', A)) = F(A', A).m'(A', A'', A),$$

où m représente la composition de $\mathbf{B}$,

b°) pour tout A de $\mathbf{A}$, il existe une flèche $j'(A): I \to \mathbf{A}(A, A)$ telle que $j(A) = F(A, A).j'(A)$.

PROPOSITION I.3. *Avec ces hypothèses, il existe une $\hat{Y}$-sous-catégorie* $\mathbf{A}$ *de* $\mathbf{B}$.

PREUVE. Il suffit de vérifier que les flèches de composition $m'(A', A'', A)$ sont associatives et que $j'(A)$ est une flèche unité de $\mathbf{A}$. On utilise pour cela le fait que les $F(A', A)$ sont des monomorphismes. ■

D'après [S.E.S.L] le foncteur identique sur $\underline{\hat{\mathbf{V}}}$ est $(\hat{\mathbf{V}}, \hat{X})$-engendrant (resp. $(\underline{\hat{\mathbf{V}}}.\underline{\mathbf{V}}_0, \hat{X}.\underline{\mathbf{V}}_0)$-engendrant si, pour tout élément v de $\underline{\hat{\mathbf{V}}}$ (resp. de $\underline{\hat{\mathbf{V}}}$ ayant sa source dans $\underline{\mathbf{V}}$),

a°) v se factorise à travers un élément x de $\hat{X}$ (resp. de $\hat{X}$ ayant sa source dans $\underline{\mathbf{V}}$), de même but que v,

b°) si un autre élément x' de $\hat{X}$ vérifie la même propriété, x se factorise à travers x'.

Soient $\mathbf{B}$ une $\hat{\mathbf{V}}$-catégorie, $\mathbf{A}_0$ un sous-ensemble de l'ensemble des unités de $\mathbf{B}$. Pour tout couple (A', A) de $\mathbf{A}_0$, on se donne un élément $G(A', A)$ de $\underline{\hat{\mathbf{V}}}$ de but $\mathbf{B}(A', A)$.

DEFINITION I.2. On dira qu'un élément $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ de $\hat{Y}$ est *engendré par la famille* $(G(A', A))$ (ou que $\mathbf{A}$ est une *$\hat{Y}$-sous-catégorie de* $\mathbf{B}$ *engendrée par* $(G(A', A))$), si :

a°) $G(A', A)$ se factorise à travers $F(A', A)$,

b°) tout autre élément F' de $\hat{Y}$ de but $\mathbf{B}$ ayant la même propriété a est de la forme $F' = F.F''$.

Si ξ est un ordinal limite, élément de $\hat{\mathbf{E}}_0$, désignons par $\underline{\xi}$ la catégorie associée (i.e. définie par l'ordre usuel sur ξ).

PROPOSITION I.4. *Supposons que* $\underline{\hat{\mathbf{V}}}$ *est à limites inductives et que le foncteur injection de* $\hat{X}$ *dans* $\underline{\hat{\mathbf{V}}}$ *est à* $\{\xi\}$*-limites inductives. Si le foncteur identique sur* $\underline{\hat{\mathbf{V}}}$ *est* $(\underline{\hat{\mathbf{V}}}, \hat{X})$*-engendrant, la famille* $(G(A', A))$ *engendre une* $\hat{Y}$*-sous-catégorie* $\mathbf{A}$ *de* $\mathbf{B}$.

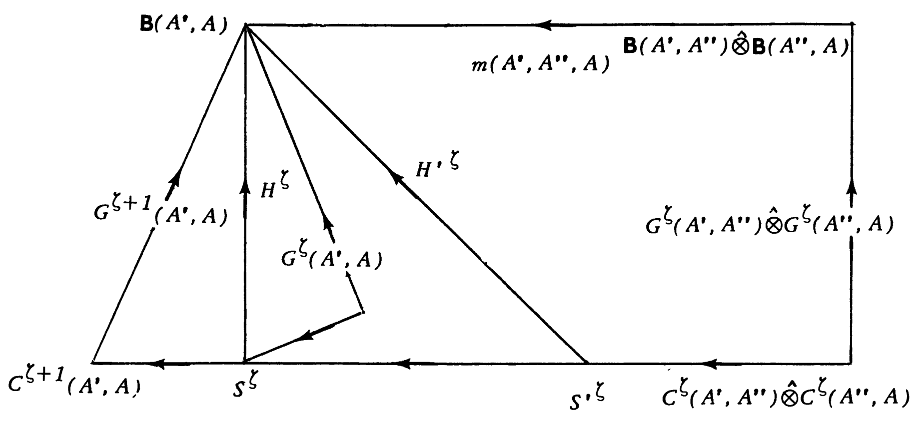
PREUVE. Pour tout couple (A', A) de $\mathbf{A}_0$, on va définir une famille $(G^{\zeta}(A', A))_{\zeta \leqslant \xi}$ d'éléments de $\hat{X}$ ayant tous même but $\mathbf{B}(A', A)$. Notons $C^{\zeta}(A', A)$ la source de $G^{\zeta}(A', A)$.

a°) Si $A \neq A'$, par définition, $G^0(A', A)$ est un $\hat{X}$-morphisme engendré par $G(A', A)$. D'autre part, notons S la somme de la source de $G(A, A)$ et de I. Si $j(A)$ est un morphisme unité de $\mathbf{B}$, notons $H^0 : S \to \mathbf{B}(A, A)$ le co-crochet des flèches $G(A, A)$ et $j(A)$. Par définition, $G^0(A, A)$ est un $\hat{X}$-morphisme engendré par H^0.

b°) Supposons que $G^{\zeta}(A', A)$ est défini, quel que soit (A', A), et notons $m(A', A'', A)$ les morphismes de composition de $\mathbf{B}$. La famille $(C^{\zeta}(A', A'') \hat{\otimes} C^{\zeta}(A'', A))_{A'' \in \mathbf{A}_0}$ admet une somme S'^{ζ}; on notera $H'^{\zeta} : S'^{\zeta} \to \mathbf{B}(A', A)$ le co-crochet correspondant de la famille

$$(m(A', A'', A).(G^{\zeta}(A', A'') \hat{\otimes} G^{\zeta}(A'', A)))_{A'' \in \mathbf{A}_0}.$$

Soit S^{ζ} une somme de $C^{\zeta}(A', A)$ et de S'^{ζ}; si $H^{\zeta} : S^{\zeta} \to \mathbf{B}(A', A)$ est le co-crochet correspondant du couple $(H'^{\zeta}, G^{\zeta}(A', A))$, par définition, $G^{\zeta+1}(A', A)$ est un $\hat{X}$-morphisme engendré par H^{ζ}. Remarquons qu'il



existe un unique élément $G^{(\zeta+1,\,\zeta)}(A',A)$ de $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ tel que

$$G^{\zeta+1}(A',A).\,G^{(\zeta+1,\,\zeta)}=G^{\zeta}(A',A).$$

De plus, si $\zeta' < \zeta$ et si

$$(1) \qquad G^{\zeta}(A',A).\,G^{(\zeta,\,\zeta')}(A',A)=G^{\zeta'}(A',A),$$

l'on a :

$$G^{\zeta+1}(A',A).\,G^{(\zeta+1,\,\zeta')}(A',A)=G^{\zeta'}(A',A),$$

où

$$G^{(\zeta+1,\,\zeta')}(A',A)=G^{(\zeta+1,\,\zeta)}(A',A).\,G^{(\zeta,\,\zeta')}(A',A).$$

c°) On suppose que ζ'' est un ordinal limite et que, pour tout $\zeta' < \zeta''$ et tout couple (A',A), on a défini $G^{\zeta'}(A',A)$. On suppose aussi que si $\zeta' \leqslant \zeta < \zeta''$, on a la formule (1). Comme $\hat{X}$ est formé de monomorphismes, on peut définir un foncteur $\phi^{\zeta''}$ de source $\underline{\zeta}''$, de but $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ en posant :

$$\phi^{\zeta''}(\zeta,\zeta')=G^{(\zeta,\,\zeta')}(A',A).$$

Ce foncteur admet une limite inductive $S^{\zeta''}$. La famille $(G^{\zeta}(A',A))_{\zeta<\zeta''}$ définit une transformation naturelle de source $\phi^{\zeta''}$ de but un foncteur constant sur $\mathbf{B}(A',A)$. On notera $H^{\zeta''}: S^{\zeta''} \to \mathbf{B}(A',A)$ le co-crochet de cette transformation naturelle. Par définition, $G^{\zeta''}(A',A)$ est un $\hat{X}$-morphisme engendré par $H^{\zeta''}$. Pour tout $\zeta < \zeta''$, on a la relation :

$$G^{\zeta''}(A',A).\,G^{(\zeta'',\,\zeta)}(A',A)=G^{\zeta}(A',A).$$

d°) Considérons le cas $\zeta''=\xi$. L'image de ϕ^{ξ} appartient à $\hat{X}$, de telle sorte que l'on peut choisir la limite naturalisée de ce foncteur dans $\hat{X}$. Alors, H^{ξ} appartient à $\hat{X}$ et $G^{\xi}(A',A)=H^{\xi}$.

Montrons que la famille $(G^{\xi}(A',A))$ définit une $\hat{Y}$-sous-catégorie $\mathbf{A}$ de $\mathbf{B}$, où $\mathbf{A}(A',A)=C^{\xi}(A',A)$. Il suffit de vérifier que les conditions de la proposition 3 sont vérifiées. Soit A un élément de $\mathbf{A}_0$; par construction de $G^{0}(A,A)$, il existe un élément bien déterminé $j^{0}(A)$ vérifiant $G^{0}(A,A).\,j^{0}(A)=j(A)$. On pose :

$$\bar{j}(A)=G^{(\xi,\,0)}(A,A).\,j^{0}(A).$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}(A,A) & & I \arrow[ll, "j(A)"'] \arrow[d] \\
& & S \arrow[ull, "H^0"'] \\
& & {} \arrow[u] \arrow[uull, "G(A,A)"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{B}(A,A) & \\
\mathbf{A}(A,A) \arrow[ur, "G^{\xi}(A,A)"] & C^0(A,A) \arrow[l, "G^{(\xi,0)}(A,A)"'] \arrow[u, "G^0(A,A)"'] & S \arrow[l] \arrow[ul, "H^0"']
\end{tikzcd}$$

Considérons un triplet (A', A'', A) d'éléments de $\mathbf{A}_0$ et montrons qu'il existe un morphisme $\overline{m}(A', A'', A)$ vérifiant :

$$G^{\xi}(A', A).\overline{m}(A', A'', A) = m(A', A'', A).(G^{\xi}(A', A'')\hat{\otimes} G^{\xi}(A'', A)).$$

Soit ζ un ordinal strictement inférieur à ξ. Par construction, on a un diagramme commutatif :

(2)

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}(A', A) & & & \mathbf{B}(A', A'')\hat{\otimes}\mathbf{B}(A'', A) \arrow[lll, "m(A', A'', A)"'] \\
& S^{\zeta} \arrow[ul, "H^{\zeta}"] \arrow[dl] & S'^{\zeta} \arrow[l] \arrow[ull, "H'^{\zeta}"'] & \\
C^{\zeta+1}(A', A) \arrow[uu, "G^{\zeta+1}(A', A)"] & & & C^{\zeta}(A', A'')\hat{\otimes}C^{\zeta}(A'', A) \arrow[lll, "n(\zeta)"] \arrow[ul] \arrow[uu, "G^{\zeta}(A', A'')\hat{\otimes}G^{\zeta}(A'', A)"']
\end{tikzcd}$$

Pour tout $\zeta' < \xi$, posons :

$$m(\zeta', \zeta) = G^{(\xi, \zeta'+1)}(A', A).n(\zeta').(G^{\zeta'}(A', A'') \hat{\otimes} G^{(\zeta', \zeta)}(A'', A))$$

si $\zeta \leqslant \zeta' < \xi$,

$$m(\zeta', \zeta) = G^{(\xi, \zeta+1)}(A', A).n(\zeta).(G^{(\zeta, \zeta')}(A', A'') \hat{\otimes} C^{\zeta}(A', A))$$

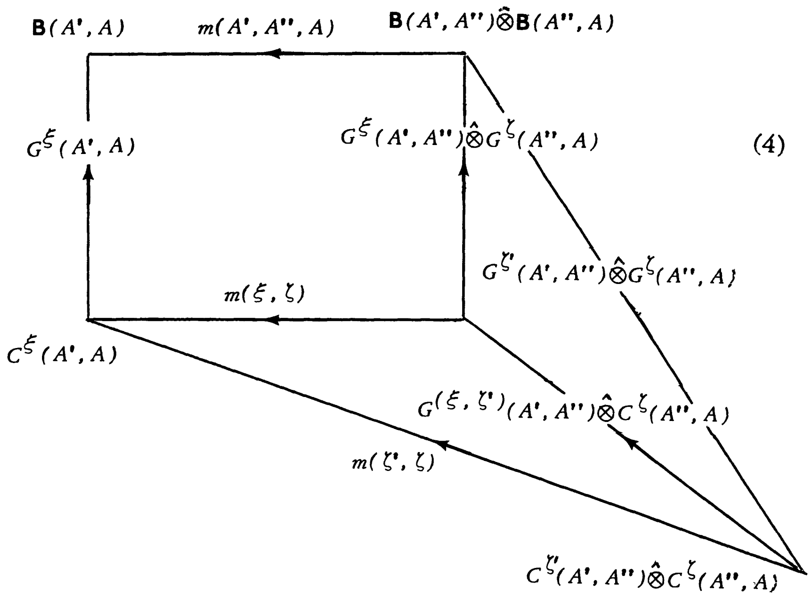
si $\zeta' > \zeta$.

Remarquons que nous avons la relation (3):

$$m(\zeta''', \zeta'').(G^{(\zeta''', \zeta')}(A', A'') \hat{\otimes} G^{(\zeta'', \zeta)}(A'', A)) = m(\zeta', \zeta)$$

si $\zeta' \leqslant \zeta''' < \xi$ et si $\zeta \leqslant \zeta'' < \xi$.

Le foncteur $\phi^{\zeta''}$ a été défini dans le paragraphe c à partir du couple (A', A). Désignons par $\phi'^{\zeta''}$ (resp. $\phi''^{\zeta''}$) le foncteur analogue défini à partir du couple (A', A'') (resp. du couple (A'', A)). Le foncteur $- \otimes C^{\zeta}(A', A)$ est compatible avec les limites inductives et $C^{\xi}(A', A'') \hat{\otimes} C^{\zeta}(A'', A)$ est une limite inductive du foncteur $\phi''^{\xi} \hat{\otimes} C^{\zeta}(A'', A)$. La famille $(m(\zeta', \zeta))_{\zeta' < \xi}$ définit une transformation naturelle de ce même foncteur vers un foncteur constant sur $C^{\xi}(A', A)$. On désigne par $m(\xi, \zeta)$ le co-crochet de cette transformation naturelle. La commutativité du diagramme (2) assure la commutativité du suivant:



(4)

Considérons un autre ordinal ζ'' vérifiant $\zeta \leqslant \zeta'' < \xi$. La relation (3) entraîne :

$$m(\xi, \zeta'').(C^{\xi}(A', A'') \hat{\otimes} G^{(\zeta'', \zeta)}(A'', A)) = m(\xi, \zeta).$$

Or le foncteur $C^{\xi}(A', A'') \hat{\otimes} -$ est aussi compatible avec les limites inductives et $C^{\xi}(A', A'') \hat{\otimes} C^{\xi}(A'', A)$ est une limite du foncteur $C^{\xi}(A', A'') \hat{\otimes} \phi'^{\xi}$. La famille $(m(\xi, \zeta))_{\zeta<\xi}$ définit une transformation naturelle de ce foncteur vers un foncteur constant sur $C^{\xi}(A', A)$. Par définition, $\bar{m}(A', A'', A)$ est le co-crochet correspondant; comme $C^{\xi}(A', A'') \hat{\otimes} C^{\xi}(A'', A)$ est une limite, le diagramme (4) assure la commutativité de :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}(A', A) & & \mathbf{B}(A', A'') \otimes \mathbf{B}(A'', A) \arrow[ll, "m(A', A'', A)"'] & \\
C^{\xi}(A', A) \arrow[u, "G^{\xi}(A', A)"] & & C^{\xi}(A', A'') \hat{\otimes} C^{\xi}(A'', A) \arrow[ll, "\bar{m}(A', A'', A)"] \arrow[u, "G^{\xi}(A', A'') \hat{\otimes} G^{\xi}(A'', A)"'] & \\
& & & C^{\xi}(A', A'') \hat{\otimes} C^{\zeta}(A'', A) \arrow[lllu, "m(\xi, \zeta)"] \arrow[lu, "C^{\xi}(A', A'') \hat{\otimes} G^{(\xi, \zeta)}(A'', A)"'] \arrow[luu, "G^{\xi}(A', A'') \hat{\otimes} G^{\zeta}(A'', A)"']
\end{tikzcd}$$

La proposition I.3 nous assure qu'il existe un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ appartenant à $\hat{Y}$, où $\mathbf{A}(A', A) = C^{\xi}(A', A)$, où la multiplication de $\mathbf{A}$ est notée $\bar{m}$, l'unité $\bar{j}$ et où $F(A', A) = G^{\xi}(A', A)$.

Soit $F' : \mathbf{A}' \to \mathbf{B}$ un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur appartenant à $\hat{Y}$; pour simplifier les notations, on identifie les objets de $\mathbf{A}'$ à ceux de $\mathbf{B}$. On suppose que $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}'_0$ et que, pour tout couple (A', A) de $\mathbf{A}_0$, $F'(A', A)$ se décompose à travers $G(A', A)$:

$$F'(A', A).L(A', A) = G(A', A).$$

Montrons que $F'(A',A)$ se décompose à travers $G^{\zeta}(A',A)$ quel que soit $\zeta \leqslant \xi$,

a°) Si $A \neq A'$, il existe $L^0(A',A)$ tel que $F'(A',A).L^0(A',A) = G^0(A',A)$, car $G^0(A',A)$ est engendré par $G(A',A)$. D'autre part, notons L' le co-crochet du couple $(j'(A), L(A,A))$, où j' désigne l'unité de $\mathbf{A}'$. La commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
C(A,A) \arrow[r, "G(A,A)"] \arrow[dr, "L(A,A)"'] & \mathbf{B}(A,A) & I \arrow[l, "j(A)"'] \arrow[dl, "j'(A)"] \\
 & \mathbf{A}'(A,A) \arrow[u, "F'(A,A)"] &
\end{tikzcd}$$

assure la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}(A,A) & S \arrow[l, "H^0"'] \arrow[dl, "L'"] \\
\mathbf{A}'(A,A) \arrow[u, "F'(A,A)"] &
\end{tikzcd}$$

Par suite, on a la relation

$$F'(A,A).L^0(A,A) = G^0(A,A),$$

car $G^0(A,A)$ est engendré par H^0.

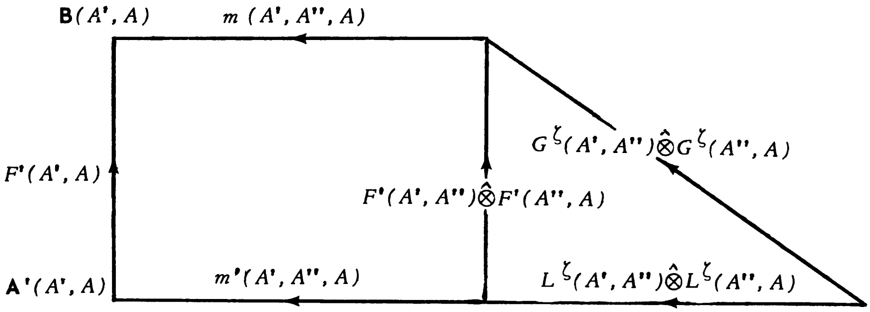
b°) Supposons que $\zeta < \xi$ et que, pour tout couple (A',A) d'éléments de $\mathbf{A}_0$, l'on ait :

$$(5) \qquad F'(A',A).L^{\zeta}(A',A) = G^{\zeta}(A',A).$$

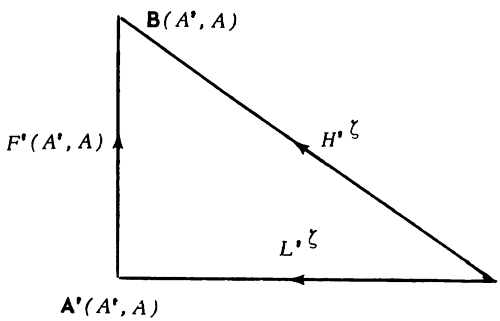
La famille $(m'(A',A'',A).(L^{\zeta}(A',A'')\hat{\otimes} L^{\zeta}(A'',A)))_{A''\in \mathbf{A}_0}$ admet un co-crochet $L'^{\zeta} : S'^{\zeta} \to \mathbf{A}'(A',A)$, où m' est la multiplication de $\mathbf{A}'$. Le couple $(L'^{\zeta}, L^{\zeta}(A',A))$ admet aussi un co-crochet

$$L^{\zeta} : S^{\zeta} \longrightarrow \mathbf{A}'(A',A).$$

On a le diagramme commutatif :



donc aussi



En tenant compte de (5), l'on obtient : $F'(A',A).L^{\zeta} = H^{\zeta}$. Par suite, il existe $L^{\zeta+1}(A',A)$ vérifiant :

$$F'(A',A).L^{\zeta+1}(A',A) = G^{\zeta+1}(A',A).$$

c°) Supposons que ζ'' est un ordinal limite et que la relation (5) est vérifiée pour tout $\zeta < \zeta''$. Comme $F'(A',A)$ est un monomorphisme, la famille $(L^{\zeta}(A',A))_{\zeta<\zeta''}$ définit une transformation naturelle de source

$\phi^{\zeta''}$ de but un foncteur constant sur $\mathbf{A}'(A', A)$. Soit $L^{\zeta''}(A', A) : S^{\zeta''} \to \mathbf{A}'(A', A)$ son co-crochet. La relation (5) étant vérifiée pour tout $\zeta < \zeta''$, elle est aussi vérifiée, par passage à la limite, pour ζ''.

d°) Montrons qu'en posant $M(A', A) = L^{\xi}(A', A)$, on définit un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur $M : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ vérifiant $F' . M = F$. On a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}(A,A) & & I \arrow[ll, "j(A)"'] \arrow[dll, "j'(A)"] \\
\mathbf{A}'(A,A) \arrow[u, "F'(A,A)"] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}(A,A) & & I \arrow[ll, "j(A)"'] \arrow[dl, "\bar{j}(A)"] \\
& \mathbf{A}(A,A) \arrow[ul, "F(A,A)"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathbf{B}(A,A) & \\
\mathbf{A}'(A,A) \arrow[ur, "F'(A,A)"] & & \mathbf{A}(A,A) \arrow[ul, "F(A,A)"'] \arrow[ll, "M(A,A)"]
\end{tikzcd}$$

Comme $F'(A, A)$ est un monomorphisme, il s'ensuit

$$j'(A) = M(A, A) . \bar{j}(A).$$

De même, en utilisant le fait que $F'(A', A)$ est un monomorphisme et que F et F' sont compatibles avec la composition, on en déduit que M l'est également:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge] {} & {} \arrow[l, "m(A',A'',A)"'] \\ {} \arrow[u, "F(A',A)"] & {} \arrow[l, "\bar{m}(A',A'',A)"] \arrow[u, "F(A',A'')\hat{\otimes}F(A'',A)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge] {} & {} \arrow[l, "m(A',A'',A)"'] \\ {} \arrow[u, "F'(A',A)"] & {} \arrow[l, "m'(A',A'',A)"] \arrow[u, "F'(A',A'')\hat{\otimes}F'(A'',A)"'] \end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge] {} & {} \arrow[l, "m'(A',A'',A)"'] \\ {} \arrow[u, "M(A',A)"] & {} \arrow[l, "\bar{m}(A',A'',A)"] \arrow[u, "M(A',A'')\hat{\otimes}M(A'',A)"'] \end{tikzcd}$$

Ainsi F est bien engendré par la famille $(G(A',A))_{(A',A)\in \mathbf{A}_0\times\mathbf{A}_0}$. ■

DEFINITION I.3. On dira qu'un élément $F:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ de $\hat{Y}$ est *engendré par un* $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur $H:\mathbf{C}\to\mathbf{B}$ s'il existe un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur $M:\mathbf{C}\to\mathbf{A}$ tel que $F.M=H$ et si la relation $F'.M'=H$, où F' est élément de $\hat{Y}$, entraîne que $F'.F''=F$, où F'' est un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur.

PROPOSITION I.5. *Avec les hypothèses de la proposition I.4, il existe F engendré par un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur $H:\mathbf{C}\to\mathbf{B}$.*

PREUVE. Notons $\mathbf{A}_0$ l'image par $\underline{H}$ de l'ensemble $\mathbf{C}_0$ des objets de $\mathbf{C}$. Si A est élément de $\mathbf{A}_0$, posons $\Gamma(A)=\underline{H}^{-1}(A)$. Notons $S(A',A)$ une somme de la famille $(\mathbf{C}(C',C))$, où (C',C) parcourt $\Gamma(A')\times\Gamma(A)$. La famille $(H(C',C))$, où (C',C) parcourt $\Gamma(A')\times\Gamma(A)$, admet un co-crochet $G(A',A):S(A',A)\to\mathbf{B}(A',A)$. Il est facile de vérifier que F est engendré par la famille $(G(A',A))$, où (A',A) parcourt $\mathbf{A}_0\times\mathbf{A}_0$. ■

D'après [S.E.S.L] le foncteur de base est $(\hat{\mathbf{E}}, \hat{X})$-engendrant (resp. $(\hat{\mathbf{E}}.\mathbf{E}_0, \hat{X}.\underline{\mathbf{V}}_0)$-engendrant) si, pour tout objet V de $\underline{\hat{\mathbf{V}}}$ et toute application $g: M \to \underline{\hat{\mathbf{V}}}(V, I)$ (resp. telle que $M \in \mathbf{E}_0$):

a°) il existe un élément $x: V' \to V$ de $\hat{X}$ et une application g' telle que $g = \underline{\hat{\mathbf{V}}}(x, I).g'$ (resp. et $V' \in \underline{\mathbf{V}}_0$),

b°) si un élément $x'': V'' \to V$ vérifie $g = \underline{\hat{\mathbf{V}}}(x'', I).g''$, il existe un élément v de $\underline{\hat{\mathbf{V}}}$ tel que $x''.v = x$ (resp. si $V'' \in \underline{\mathbf{V}}_0$).

Soient $\mathbf{B}$ une $\hat{\mathbf{V}}$-catégorie, $\bar{\mathbf{A}}$ un sous-ensemble de $\underline{\mathbf{B}}$, $\mathbf{A}_0$ un sous-ensemble de $\mathbf{B}_0$ et, pour tout couple (A', A) d'éléments de $\mathbf{A}_0$, un élément $G(A', A): C(A', A) \to \mathbf{B}(A', A)$ de $\underline{\hat{\mathbf{V}}}$.

DEFINITION I.4. On dira que $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, élément de $\hat{Y}$, *est engendré par la famille* $(G(A', A))$, où $(A', A) \in \mathbf{A}_0 \times \mathbf{A}_0$, *et par* $\bar{\mathbf{A}}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

a°) pour tout couple (A', A) d'éléments de $\mathbf{A}_0$, $G(A', A)$ se factorise à travers $F(A', A)$ et l'image de $\underline{F}$ contient $\bar{\mathbf{A}}$,

b°) tout autre élément $F': \mathbf{A}' \to \mathbf{B}$ de $\hat{Y}$ vérifiant a est tel que $F = F'.F''$, où F'' est un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur.

PROPOSITION I.6. *Avec les hypothèses de la proposition I.4, supposons que le foncteur de base est* $(\hat{\mathbf{E}}, \hat{X})$*-engendrant. Il existe F engendré par la famille* $(G(A', A))$ *et par* $\bar{\mathbf{A}}$.

PREUVE. Soient $\hat{\mathbf{A}}$ la réunion de $\bar{\mathbf{A}}$ et de l'ensemble des sources et des buts dans $\underline{\mathbf{B}}$ des éléments de $\bar{\mathbf{A}}$. Posons $\mathbf{C}_0^! = \hat{\mathbf{A}} \cap \underline{\mathbf{B}}_0$ et $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_0^! \cup \mathbf{A}_0$. Pour tout couple (C', C) d'éléments de $\mathbf{C}_0$, l'inclusion de $\hat{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}(C', C)$ dans $\mathbf{B}(C', C)$ engendre un élément $G'(C', C)$ de $\hat{X}$ ayant $\mathbf{B}(C', C)$ pour but. Si C' ou C n'appartient pas à $\mathbf{A}_0$, on pose

$$G''(C', C) = G'(C', C);$$

dans le cas contraire, on désigne par S une somme des sources respectives de $G(C', C)$ et de $G'(C', C)$ et par $G''(C', C): S \to \mathbf{B}(C', C)$ le co-crochet de $(G(C', C), G'(C', C))$. Alors F est engendré par la famille $(G''(C', C))$, où (C', C) parcourt $\mathbf{C}_0 \times \mathbf{C}_0$. ■

Considérons une $\hat{\mathbf{V}}$-catégorie $\mathbf{B}$, un sous-ensemble $\mathbf{A}_0$ de $\mathbf{B}_0$ et, pour tout couple (A', A) de $\mathbf{A}_0$, un élément $G(A', A)$ de $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ dont le but est $\mathbf{B}(A', A)$. On suppose que $\mathbf{A}_0$ appartient à $\mathbf{E}_0$ et que la source de $G(A', A)$ appartient à $\underline{\mathbf{V}}$, quel que soit le couple (A', A). On posera $X = \hat{X} \cap \underline{\mathbf{V}}$. On considère un ordinal limite ξ, élément de $\mathbf{E}_0$. Le plus souvent il sera régulier. $\underline{\xi}$ est sa catégorie associée.

THEOREME I.1. *Supposons que le foncteur inclusion de $\underline{\mathbf{V}}$ dans $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ est à petites limites inductives, que les foncteurs inclusion de X dans $\hat{X}$ et de $\hat{X}$ dans $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ sont à $\{\underline{\xi}\}$-limites inductives. Si le foncteur identique sur $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ est $(\hat{\underline{\mathbf{V}}}.\underline{\mathbf{V}}_0, \hat{X}.\underline{\mathbf{V}}_0)$-engendrant, la famille $(G(A', A))$ engendre un élément $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ de $\hat{Y}$ et $\mathbf{A}$ est une petite $\mathbf{V}$-catégorie.*

PREUVE. On construit F de la même manière que dans la démonstration de la proposition I.4, dont on reprend les notations. Il faut toutefois vérifier que, pour tout couple (A', A) de $\mathbf{A}_0$ et tout ordinal $\zeta \leqslant \xi$, l'élément $C^{\zeta}(A', A)$ est une unité de $\underline{\mathbf{V}}$.

a°) Si $A \neq A'$, $C^0(A', A)$ appartient à $\underline{\mathbf{V}}$, vu la propriété du foncteur identique sur $\underline{\mathbf{V}}$. De plus, comme I appartient à $\underline{\mathbf{V}}$, la somme S appartient à $\underline{\mathbf{V}}$ et, par suite, $C^0(A, A)$ aussi.

b°) On suppose que $C^{\zeta}(A', A)$ appartient à $\underline{\mathbf{V}}$, pour tout couple (A', A). Comme $\mathbf{A}_0$ est un petit ensemble, la somme S'^{ζ} appartient à $\underline{\mathbf{V}}$, car le produit tensoriel $C^{\zeta}(A', A) \hat{\otimes} C^{\zeta}(A'', A)$ y appartient aussi. Il en est donc de même de S^{ζ} et, par suite, de $C^{\zeta+1}(A', A)$.

c°) Soit ζ'' un ordinal limite. On suppose que $G^{\zeta}(A', A)$ est défini pour tout $\zeta < \zeta''$ et que $G^{\zeta}(A', A)$ appartient à $\underline{\mathbf{V}}$. Dans la formule (1) du b de la proposition I.4, l'élément $G^{(\zeta, \zeta')}(A', A)$ appartient à X, si $\zeta' \leqslant \zeta < \zeta''$. On peut choisir la limite $S^{\zeta''}$ de $\phi^{\zeta''}$ dans $\underline{\mathbf{V}}$ et, par suite, $C^{\zeta''}(A', A)$ est une unité de $\underline{\mathbf{V}}$.

d°) Le c est valable dans le cas $\zeta'' = \xi$. Autrement dit $\mathbf{A}(A', A)$ appartient à $\underline{\mathbf{V}}$ et $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{V}$-catégorie. ■

On se donne de plus un sous-ensemble $\bar{\mathbf{A}}$ de $\underline{\mathbf{B}}$, que l'on suppose être un petit ensemble (i.e. $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbf{E}_0$).

COROLLAIRE 1. *Avec les hypothèses du théorème I.1, nous supposons que le foncteur de base est $(\hat{\mathbf{E}}.\mathbf{E}_0, \hat{X}.\underline{\mathbf{V}}_0)$-engendrant. Il existe un élé-*

ment $F:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ *de* $\hat{Y}$, *engendré par la famille* $(G(A',A))$ *et par* $\bar{\mathbf{A}}$. *De plus,* $\mathbf{A}$ *est une* $\mathbf{V}$*-catégorie et est petite.*

PREUVE. Reprenons les notations de la démonstration de la proposition I.6. L'ensemble $\hat{\mathbf{A}}$ est petit, car $\bar{\mathbf{A}}$ l'est et, par suite, $\hat{\mathbf{A}}\cap\mathbf{B}(C',C)$ l'est. La propriété du foncteur de base assure que la source de $G'(C',C)$ appartient à $\underline{\mathbf{V}}$. Soient C' et C deux éléments de $\mathbf{C}_0^!\cap\mathbf{A}_0$. Comme $\underline{\mathbf{V}}$ est à petites limites inductives, on peut choisir la somme S des sources de $G(C',C)$ et de $G'(C',C)$ dans $\underline{\mathbf{V}}$. Ainsi on est ramené au théorème I.1, car $\mathbf{C}_0$ est un petit ensemble. ■

De manière analogue, on définit la notion de $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur $F:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$, élément de $\hat{Y}$, engendré par un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur $H:\mathbf{C}\to\mathbf{B}$ et un sous-ensemble $\bar{\mathbf{A}}$ de $\underline{\mathbf{B}}$, où $\mathbf{C}$ est une petite $\mathbf{V}$-catégorie et où $\bar{\mathbf{A}}$ est un petit ensemble.

COROLLAIRE 2. *Avec les hypothèses du corollaire précédent, il existe* $F:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ *engendré par* H *et par* $\bar{\mathbf{A}}$. *De plus,* $\mathbf{A}$ *est une petite* $\mathbf{V}$*-catégorie.*

I.4. V-catégorie libre et V-catégorie quasi-quotient.

DEFINITION 1.5. 1°) Un $\hat{\mathbf{V}}$*-graphe orienté* $\mathbf{A}$ *est la donnée:*

a°) d'un ensemble $\mathbf{A}_0$ appartenant à $\hat{\mathbf{E}}_0$, dit ensemble de sommets de $\mathbf{A}$,

b°) d'une application $\mathbf{A}(-,-)$ de $\mathbf{A}_0\times\mathbf{A}_0$ dans $\hat{\mathbf{V}}$,

c°) d'un morphisme $j_{\mathbf{A}}(A):I\to\mathbf{A}(A,A)$, pour tout élément A de $\mathbf{A}_0$.

2°) Un *homomorphisme* $F:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ entre $\hat{\mathbf{V}}$-graphes orientés est la donnée

a°) d'une application $F_0:\mathbf{A}_0\to\mathbf{B}_0$,

b°) d'une famille $(F(A',A))_{(A',A)\in\mathbf{A}_0\times\mathbf{A}_0}$ de morphismes de $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ où $F(A',A):\mathbf{A}(A',A)\to\mathbf{B}(F_0(A'),F_0(A))$. On exige que le diagramme

$$F(A,A).j_{\mathbf{A}}(A)=j_{\mathbf{B}}(F_0(A)).$$

On notera $[\underline{\mathbf{A}}]$ le graphe orienté ayant $\mathbf{A}_0$ pour ensemble de ses sommets et dont l'ensemble des flèches de A vers A' est $\hat{\underline{\mathbf{V}}}(\mathbf{A}(A',A),I)$. Un homomorphisme $F:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ entre $\hat{\mathbf{V}}$-graphes détermine l'homomorphisme entre graphes orientés $\underline{F}:[\underline{\mathbf{A}}]\to[\underline{\mathbf{B}}]$ tel que:

- $\underline{F}(A)=F_0(A)$ pour tout sommet A,
- $\underline{F}(v)=F(A',A).v$, si $v:I\to\mathbf{A}(A',A)$ est une flèche.

On désigne par $\hat{\mathbf{V}}$-*Gra* la catégorie ayant pour objets les $\hat{\mathbf{V}}$-graphes orientés, pour morphismes les homomorphismes entre $\hat{\mathbf{V}}$-graphes orientés; elle admet pour sous-catégories pleines : la catégorie $\mathbf{V}$-*Gra* ayant pour objets les $\mathbf{V}$-graphes orientés, et la catégorie $\mathbf{V}$-*gra* ayant pour objets les $\mathbf{V}$-graphes orientés $\mathbf{A}$ tels que $\mathbf{A}_0$ appartient à $\mathbf{E}_0$. Toute $\hat{\mathbf{V}}$-catégorie $\mathbf{A}$ définit un $\hat{\mathbf{V}}$-graphe orienté $[\mathbf{A}]$ ayant $\mathbf{A}_0$ pour ensemble de sommets; de plus, $[\mathbf{A}](A', A) = \mathbf{A}(A', A)$. Un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ définit un homomorphisme de $\hat{\mathbf{V}}$-graphes orientés $[F] : [\mathbf{A}] \to [\mathbf{B}]$, avec

$$[F](A', A) = F(A', A).$$

On a donc un foncteur $\mathcal{O}_{\hat{\mathbf{V}}} : \hat{\mathbf{V}}\text{-}Cat \to \hat{\mathbf{V}}\text{-}Gra$. Il admet pour sous-foncteur

$$\mathcal{O}_{\mathbf{V}} : \mathbf{V}\text{-}cat \longrightarrow \mathbf{V}\text{-}gra .$$

On va chercher des conditions pour que $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$ admette un adjoint et soit à quasi-surjections. On aimerait aussi que $\mathbf{V}$-*gra* (resp. $\mathbf{V}$-*cat*) soit à petites limites inductives.

Soit $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur appartenant à $\hat{Y}$ et $G : \mathbf{C} \to [\mathbf{B}]$ un homomorphisme entre $\hat{\mathbf{V}}$-graphes orientés. D'après la définition I.2 , F est $(\hat{Y}, \mathcal{O}_{\hat{\mathbf{V}}})$-engendré par G (resp. est $(\hat{Y}.\mathbf{V}\text{-}cat_0, \mathcal{O}_{\hat{\mathbf{V}}})$-engendré par G , avec $\mathbf{C}_0 \in \mathbf{E}_0$) si et seulement si F est engendré par la famille $(G(C', C))_{(C', C) \in \mathbf{C}_0 \times \mathbf{C}_0}$ (resp. et $\underline{\mathbf{A}} \in \mathbf{E}_0$). Soit $\bar{Q}$ l'ensemble des homomorphismes de $\hat{\mathbf{V}}$-graphes orientés $G : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ tels que $\mathbf{C}$ soit un objet de $\mathbf{V}$-*gra* :

THEOREME I.1'. *Supposons que le foncteur inclusion de* $\underline{\mathbf{V}}$ *dans* $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ *est à petites limites inductives, que les foncteurs inclusion de* X *dans* $\hat{X}$ *et de* $\hat{X}$ *dans* $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ *sont à* $\{\underline{\xi}\}$*-limites inductives. Si le foncteur identique sur* $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ *est* $(\hat{\underline{\mathbf{V}}}.\underline{\mathbf{V}}_0, \hat{X}.\underline{\mathbf{V}}_0)$*-engendrant, le foncteur* $\mathcal{O}_{\hat{\mathbf{V}}}$ *est* $(\bar{Q}, \hat{Y}.\mathbf{V}\text{-}cat_0)$*-engendrant.*

Soit $\underline{\mathbf{K}}$ une catégorie de $\hat{Cat}$ et S un foncteur de $\underline{\mathbf{K}}$ vers $\hat{\mathbf{V}}$-*Cat*. De la démonstration de la proposition I.1 , on déduit:

PROPOSITION I.7. *Si* $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ *est à* $\{\underline{\mathbf{K}}\}$*-limites projectives, le foncteur* $\mathcal{O}_{\hat{\mathbf{V}}}$ *est compatible avec les* $\{\underline{\mathbf{K}}\}$*-limites projectives.*

PREUVE. Utilisons les notations de la démonstration de la proposition I.1 et donnons-nous un $\hat{\mathbf{V}}$-graphe orienté $\mathbf{C}$, ainsi qu'une famille d'homomorphismes entre $\hat{\mathbf{V}}$-graphes orientés (H_K) telle que :

- H_K a $\mathbf{C}$ pour source et $[\mathbf{A}_K]$ pour but,
- $[F_k].H_K = H_{K'}$ si $k : K \to K'$.

Soit (C', C) un couple de $\mathbf{C}_0$, $A' = (\underline{H}_K(C'))$ et $A = (\underline{H}_K(C))$. Il existe un unique morphisme $H'(C', C) : \mathbf{C}(C', C) \to [\mathbf{A}](A', A)$ tel que :

$$[G_K](A', A).H'(C', C) = H_K(C', C).$$

Les H_K et $[G_K]$ sont compatibles avec les morphismes unité $j_{\mathbf{C}}$, j_K et $j_{\mathbf{A}}$; on en déduit l'existence d'un unique homomorphisme entre $\hat{\mathbf{V}}$-graphes orientés $H' : \mathbf{C} \to [\mathbf{A}]$ tel que $[G_K].H' = H_K$, pour toute unité K de $\underline{\mathbf{K}}$. Si $H_K = [G'_K]$ (proposition I.1), on a $H' = [F']$. ∎

Si $\hat{\mathcal{P}} = \hat{\underline{\mathbf{V}}}(-, I)$ et si $\hat{X}$ est formé de $\hat{\mathcal{P}}$-monomorphismes, l'ensemble $\hat{Y}$ est formé de $\mathcal{O}_{\hat{\mathbf{V}}}$-monomorphismes. Nous rappelons que $x : V \to V_1$ est un $\hat{\mathcal{P}}$-monomorphisme si, pour toute flèche $v : V' \to V_1$ et toute application $k : \hat{\underline{\mathbf{V}}}(V', I) \to \hat{\underline{\mathbf{V}}}(V, I)$ vérifiant $\hat{\underline{\mathbf{V}}}(v, I) = \hat{\underline{\mathbf{V}}}(x, I).k$, il existe une unique flèche $w : V' \to V$ telle que $\hat{\underline{\mathbf{V}}}(w, I) = k$ et $x.w = v$:

COROLLAIRE 1. *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème I.1'. Si $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ est à $\hat{\mathbf{E}}_0$-produits et si $\underline{\mathbf{V}}$ est à noyaux, le foncteur $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$ admet un adjoint. Si, de plus, $\hat{X}$ est formé de $\hat{\mathcal{P}}$-monomorphismes, le foncteur $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$ est à quasi-surjections* [S.T.Q.Q].

PREUVE. C'est une conséquence du théorème d'existence des structures libres [S.E.S.L] . ∎

DEFINITION I.6. Une $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$-structure libre $\mathbf{A}$ associée à un graphe orienté $\mathbf{C}$ sera appelée $\mathbf{V}$-*catégorie libre associée à* $\mathbf{C}$.

Le théorème d'existence des structures libres assure la validité du

COROLLAIRE 2. *Si, de plus, le foncteur injection de* $\mathbf{V}$-*gra dans* $\mathbf{V}$-*Gra est à petites limites inductives, la catégorie* $\mathbf{V}$-*cat est à petites limites inductives.*

Ce corollaire suggère de chercher des conditions pour que $\mathbf{V}$-*gra* soit à petites limites inductives.

PROPOSITION I.8. *Si* $\mathbf{V}$ *est à petites limites inductives, il en est de même de* $\mathbf{V}$*-gra.*

PREUVE. Soit $\underline{\mathbf{K}}$ une petite catégorie et S un foncteur de $\underline{\mathbf{K}}$ vers $\mathbf{V}$-*gra*. On pose $\underline{S}(k) = F_k : \mathbf{A}_K \to \mathbf{A}_{K'}$, si $k : K \to K'$. Considérons le foncteur S_o : $\underline{\mathbf{K}} \to \underline{\mathbf{E}}$, qui à k associe $(F_k)_o$, restriction de $\underline{F}_k$ aux sommets de $\mathbf{A}_K$. Ce foncteur admet une limite inductive $\mathbf{A}_0$. On notera $(G_K)_o$ les co-projections correspondantes. A tout couple (A', A) de $\mathbf{A}_0 \times \mathbf{A}_0$, on associe la catégorie $\mathbf{I}_{(A', A)}$ définie comme suit : l'ensemble des sommets est une somme, pour $K \in \underline{\mathbf{K}}_0$, des produits : $(G_K)_o^{-1}(A') \times (G_K)_o^{-1}(A)$. Si, pour $K \in \underline{\mathbf{K}}_0$, le produit précédent n'est pas vide, une flèche $k : K \to K'$ définit une flèche de $\mathbf{I}_{(A', A)}$ de la forme :

$$(A'_K, A_K, k) : (A'_K, A_K) \longrightarrow (A'_{K'}, A_{K'}),$$

où

$$(F_k)_o(A_K) = A_{K'} \quad \text{et où} \quad (F_k)_o(A'_K) = A'_{K'}.$$

Les flèches de $\mathbf{I}_{(A', A)}$ se composent de manière évidente. On désigne par $\mathbf{A}(A', A)$ la limite inductive dans $\underline{\mathbf{V}}$ du foncteur $S_{(A', A)} : \mathbf{I}_{(A', A)} \to \underline{\mathbf{V}}$, qui à (A'_K, A_K, k) associe $F_k(A'_K, A_K)$. Les co-projections correspondantes sont notées $G_K(A'_K, A_K)$. Ce faisant, nous avons défini une famille d'homomorphismes entre $\mathbf{V}$-graphes orientés

$$(G_K)_{K \in \underline{\mathbf{K}}_0}, \quad \text{où} \quad G_K : \mathbf{A}_K \to \mathbf{A}.$$

Vérifions cependant que le $\mathbf{V}$-graphe orienté $\mathbf{A}$ est bien défini, c'est-à-dire que les morphismes unités existent. Il suffit de vérifier la relation :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{A}_K(A_K, A_K) \arrow[dl, "G_K(A_K, A_K)"'] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \\
\mathbf{A}(A, A) & {} \arrow[d, phantom, "\parallel"] & I \arrow[ul, "j_K(A_K)"'] \arrow[ll, dashed, "j(A)"'] \arrow[dl, "j_{K''}(A_{K''})"] \\
 & \mathbf{A}_{K''}(A_{K''}, A_{K''}) \arrow[ul, "G_{K''}(A_{K''}, A_{K''})"] &
\end{tikzcd}$$

si. $(G_K)_o(A_K) = (G_{K''})_o(A_{K''}) = A$ (2).

La relation reliant A_K et $A_{K''}$ assure qu'il existe une suite $(k_i)_{i \leqslant 2n}$ de flèches de $\underline{\mathbf{K}}$ telle que :

$$K_1 = K,\ K_{2n} = K'',\ k_{2i+1} : K_{2i+1} \to K_{2i+2} \text{ et } k_{2i} : K_{2i+1} \to K_{2i},$$

et une suite $(A_{K_i})_{i \leqslant 2n}$ telle que :

$$A_1 = A,\ A_{2n} = A'',\ A_{K_i} \in (\mathbf{A}_{K_i})_0$$

et

$$A_{K_{2i+2}} = F_{k_{2i+1}}(A_{K_{2i+1}}) = F_{k_{2i+2}}(A_{K_{2i+3}}).$$

Par suite, nous avons des diagrammes commutatifs de la forme :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{A}_\alpha(A_\alpha, A_\alpha) \arrow[dl, "G_\alpha(A_\alpha, A_\alpha)"'] \arrow[d, "F_\alpha(A_\alpha, A_\alpha)"] & \\
\mathbf{A}(A, A) & \mathbf{A}_\beta(A_\beta, A_\beta) \arrow[l] & I \arrow[ul, "j_\alpha(A_\alpha)"'] \arrow[l, "j_\beta(A_\beta)"'] \arrow[dl, "j_\gamma(A_\gamma)"] \\
 & \mathbf{A}_\gamma(A_\gamma, A_\gamma) \arrow[ul, "G_\gamma(A_\gamma, A_\gamma)"] \arrow[u, "F_\gamma(A_\gamma, A_\gamma)"'] &
\end{tikzcd}$$

où $\alpha = K_{2i+1}$, $\beta = K_{2i+2}$, $\gamma = K_{2i+3}$.

Ainsi les G_K sont bien des homomorphismes entre **V**-graphes orientés.

Soit **B** un **V**-graphe orienté et $(G'_K)_{K \in \underline{\mathbf{K}}_0}$ une famille d'homomorphismes entre **V**-graphes orientés définissant une transformation naturelle de S vers le foncteur constant sur **B**. Les restrictions $(G'_K)_o$ des G'_K aux ensembles de sommets déterminent une transformation naturelle de S_o

vers le foncteur constant sur $\mathbf{B}_0$. Il existe donc une application unique $H_0 : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ co-crochet de cette transformation naturelle. Soit (A', A) un couple de sommets de $\mathbf{A}$; posons $B = H_0(A)$ et $B' = H_0(A')$. On a une transformation naturelle de source $S_{(A', A)}$, de but un foncteur constant sur $\mathbf{B}(B', B)$ et définie par la famille $(G'_K(A'_K, A_K))$, où (A'_K, A_K) parcourt l'ensemble des objets de $\mathbf{I}_{(A', A)}$. A cette transformation naturelle correspond un unique morphisme $H(A', A) : \mathbf{A}(A', A) \to \mathbf{B}(B', B)$ vérifiant

$$H(A', A) . G_K(A'_K, A_K) = G'_K(A'_K, A_K),$$

pour tout objet de $\mathbf{I}_{(A', A)}$. En particulier, si $A' = A$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}(B,B) & & \\
& \mathbf{A}_K(A_K,A_K) \arrow[ul, "G'_K(A_K,A_K)"'] \arrow[dl, "G_K(A_K,A_K)"] & I \arrow[l, "j_K(A_K)"'] \arrow[ull, "j_{\mathbf{B}}(B)"'] \arrow[dll, "j(A)"] \\
\mathbf{A}(A,A) \arrow[uu, "H(A,A)"] & &
\end{tikzcd}$$

Ainsi H est un homomorphisme entre $\mathbf{V}$-graphes orientés. ∎

Remarquons que, si $\mathbf{V}$ est à petites limites inductives, le foncteur de base est à structures quasi-quotients. En effet, considérons une relation r définie par un ensemble de couples M sur $\mathbf{V}(V, I)$, où V est un objet de $\mathbf{V}$. Pour tout couple $m = (v, v')$, élément de M, considérons un conoyau w_m de (v, v'). Toute somme fibrée W de la famille $(w_m)_{m \in M}$

est une structure quasi-quotient de V par r; la quasi-surjection associée est la co-projection canonique $w : V \to W$.

PROPOSITION I.9. *Si* $\mathbf{V}$ *est à petites limites inductives, le foncteur d'oubli de* $\mathbf{V}$*-gra dans* $\mathbf{E}$*, qui à un homomorphisme entre* $\mathbf{V}$*-graphes orientés associe l'application sous-jacente, est à structures quasi-quotients.*

PREUVE. On se donne une relation r' sur l'ensemble sous-jacent d'un petit $\mathbf{V}$-graphe orienté $\mathbf{A}$. Désignons par r la relation d'équivalence, compatible avec les applications source et but de $[\underline{\mathbf{A}}]$, engendrée par r', et par $\bar{\mathbf{A}}_0$ l'ensemble quotient de $\mathbf{A}_0$ par la restriction de r à $\mathbf{A}_0$. Considérons un couple (A', A) de sommets de $\mathbf{A}$ et notons $\bar{A}'$ et $\bar{A}$ la classe d'équivalence de A' et A respectivement dans $\bar{\mathbf{A}}_0$, La famille $(\mathbf{A}(A', A))_{(A', A) \in (\bar{A}', \bar{A})}$ admet une somme $S(\bar{A}', \bar{A})$, dont les co-projections sont $s(A', A)$. La restriction de r admet une image $r_{(\bar{A}', \bar{A})}$ par l'application canonique de $\bigcup_{(A', A) \in (\bar{A}', \bar{A})} \mathbf{V}(\mathbf{A}(A', A), I)$ dans $\mathbf{V}(S(\bar{A}', \bar{A}), I)$. Désignons par $\bar{\mathbf{A}}(\bar{A}', \bar{A})$ une structure quasi-quotient de $S(\bar{A}', \bar{A})$ par la relation $r_{(\bar{A}', \bar{A})}$. Soit $w_{(\bar{A}', \bar{A})}$ la quasi-surjection associée. Posons :

$$F(A', A) = w_{(\bar{A}', \bar{A})} \cdot s(A', A) \quad \text{et} \quad j_{\bar{\mathbf{A}}}(\bar{A}) = F(A, A) \cdot j_{\mathbf{A}}(A).$$

On définit ainsi un homomorphisme entre $\mathbf{V}$-graphes orientés $F : \mathbf{A} \to \bar{\mathbf{A}}$. Prenons-en un second $G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, dont l'application sous-jacente est compatible avec r'; cette dernière est évidemment aussi compatible avec r. Il existe donc une unique application $H_0 : \bar{\mathbf{A}}_0 \to \mathbf{B}_0$ telle que $H_0 \cdot F_0 = G_0$. La famille $(G(A', A))_{(A', A) \in (\bar{A}', \bar{A})}$ admet un co-crochet $\bar{G}(\bar{A}', \bar{A}) : S(\bar{A}', \bar{A}) \to \mathbf{B}(B', B)$, où $B' = \underline{G}(A')$ et $B = \underline{G}(A)$. Comme $\underline{G}$ est compatible avec r, l'application $\mathbf{V}(\bar{G}(\bar{A}', \bar{A}), I)$ est compatible avec la relation $r_{(\bar{A}', \bar{A})}$. On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}(B', B) & & \mathbf{A}(A', A) \arrow[ll, "G(A', A)"'] \arrow[d, "s(A', A)"] \\
\bar{\mathbf{A}}(\bar{A}', \bar{A}) \arrow[u, "H(\bar{A}', \bar{A})"] & & S(\bar{A}', \bar{A}) \arrow[ll, "w(\bar{A}', \bar{A})"] \arrow[ull, "\bar{G}(\bar{A}', \bar{A})"']
\end{tikzcd}$$

Cette factorisation est unique et vérifie :

$$H(\bar{A}', \bar{A}).F(A', A) = G(A', A), \text{ pour tout } (A', A) \text{ de } (\bar{A}', \bar{A}).$$

De plus,

$$H(A, A).j_{\bar{\mathbf{A}}}(\bar{A}) = H(A, A).F(A, A).j_{\mathbf{A}}(A) = G(A, A).j_{\mathbf{A}}(A)$$
$$= j_{\mathbf{B}}(G_0(A)) = j_{\mathbf{B}}(H_0(\bar{A})).$$

Ainsi $H : \bar{\mathbf{A}} \to \mathbf{B}$ est un homomorphisme entre $\mathbf{V}$-graphes orientés, et c'est le seul qui vérifie : $H.F = G$. ∎

COROLLAIRE. *Si, de plus, le foncteur* $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$ *est à quasi-surjections, le foncteur d'oubli de* $\mathbf{V}$*-cat dans* $\mathbf{E}$*, qui à un* $\mathbf{V}$*-foncteur associe son application sous-jacente, est à structure quasi-quotients.*

PROPOSITION I.10. *Si* $\mathbf{V}$ *admet un objet initial, la catégorie* $\mathbf{V}$*-cat est à sommes.*

PREUVE. Soit $(\mathbf{A}_k)_{k \in K}$ une famille de $\mathbf{V}$-catégories. Pour simplifier les notations, supposons que les ensembles d'objets $(\mathbf{A}_k)_0$ et $(\mathbf{A}_{k'})_0$ n'ont aucun élément commun, pour tout couple (k, k') d'éléments de K. On pose :

$$\mathbf{A}_0 = \bigcup_{k \in K} (\mathbf{A}_k)_0, \quad \mathbf{A}(A'_k, A_k) = \mathbf{A}_k(A'_k, A_k),$$
$$F_k(A'_k, A_k) = Id_{\mathbf{A}_k(A'_k, A_k)} \quad \text{et} \quad j_{\mathbf{A}}(A_k) = j_{\mathbf{A}_k}(A_k).$$

Désignons par J un objet initial de $\mathbf{V}$. Pour $k' \neq k$, posons $\mathbf{A}(A_{k'}, A_k) = J$. On définit ainsi une $\mathbf{V}$-catégorie $\mathbf{A}$, où les morphismes de composition sont

- ceux des $\mathbf{V}$-catégories $\mathbf{A}_k$;
- les isomorphismes canoniques :

$$\mathbf{A}(A'_k, A_k) \otimes J \to J, \quad J \otimes \mathbf{A}(A'_k, A_k) \to J \quad \text{et} \quad J \otimes J \to J,$$

ainsi que les morphismes canoniques : $J \otimes J \to \mathbf{A}(A'_k, A_k)$.
En effet, les foncteurs $- \otimes V$ et $V \otimes -$ sont compatibles avec les objets initiaux de $\mathbf{V}$, pour tout objet V de $\mathbf{V}$. L'associativité provient de la remarque précédente et de l'associativité des morphismes de composition des $\mathbf{V}$-catégories $\mathbf{A}_k$.

On vérifie que $\mathbf{A}$ est une somme de la famille $(\mathbf{A}_k)_{k\in K}$; les coprojections correspondantes sont les $\mathbf{V}$-foncteurs $F_k : \mathbf{A}_k \to \mathbf{A}$. ■

COROLLAIRE. *Si* $\mathbf{V}$ *est à petites limites inductives et si le foncteur* $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$ *est à quasi-surjections, la catégorie* $\mathbf{V}$*-cat est à petites limites inductives.*

PREUVE. C'est une conséquence de la proposition I.10 et du corollaire de la proposition I.9. ■

THEOREME I.2. *Si* $\mathbf{V}$ *est à petites limites inductives, le foncteur* $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$ *admet un adjoint.*

PREUVE. Considérons un petit $\mathbf{V}$-graphe orienté $\mathbf{A}$. A chaque couple (A', A) de sommets de $\mathbf{A}$, associons une catégorie $\underline{\mathbf{S}}_{(A', A)}$. Les objets de cette catégorie sont les suites finies de sommets de $\mathbf{A}$, d'au moins deux éléments de la forme :

$$S = (A_n, A_{n-1}, \ldots, A_2, A_1), \text{ où } A_n = A' \text{ et } A_1 = A.$$

Cette catégorie admet une base formée des flèches du type suivant:

$$\begin{array}{c} \bar{S} = (A_n, \ldots, A_i, A_i, \ldots, A_1) \\ \Big\uparrow s \\ S = (A_n, \ldots, A_i, \ldots, A_1), \end{array}$$

où le sommet A_i est répété.
On définit un foncteur : $L_{(A', A)} : \underline{\mathbf{S}}_{(A', A)} \to \mathbf{V}$ en posant:

$$L_{(A', A)}(S) = \mathbf{A}(A_n, A_{n-1}) \otimes \mathbf{A}(A_{n-1}, A_{n-2}) \otimes \ldots$$
$$\ldots \otimes \mathbf{A}(A_3, A_2) \otimes \mathbf{A}(A_2, A_1);$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}(A_n, A_{n-1}) \otimes \ldots \otimes \mathbf{A}(A_i, A_i) \otimes \ldots \otimes \mathbf{A}(A_2, A_1) & \\
& \mathbf{A}(A_n, A_{n-1}) \otimes \ldots \otimes I \otimes \ldots \otimes \mathbf{A}(A_2, A_1) \arrow[ul, "Id_{\mathbf{A}(A_n, A_{n-1})} \otimes \ldots \otimes j_{\mathbf{A}}(A_i) \otimes \ldots \otimes Id_{\mathbf{A}(A_2, A_1)}"'] \\
\mathbf{A}(A_n, A_{n-1}) \otimes \ldots \otimes \ldots \otimes \mathbf{A}(A_2, A_1) \arrow[uu, "L_{(A', A)}(s)"] \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

le morphisme $L_{(A',A)}(s)$ est le composé précédent.

On pose $\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0$ et on désigne par $\mathbf{B}(A',A)$ une limite inductive du foncteur $L_{(A',A)}$; la co-projection correspondante à la suite $S=(A',A)$ est notée $F(A',A)$, les autres projections sont notées $F(S)$. Si $A'=A$, on pose :

$$j_{\mathbf{B}}(A) = F(A,A).\,j_{\mathbf{A}}(A).$$

Ce faisant, nous avons défini un homomorphisme de $\mathbf{V}$-graphes orientés $F:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$. Montrons que le $\mathbf{V}$-graphe orienté $\mathbf{B}$ est sous-jacent à une structure de $\mathbf{V}$-catégorie. Il s'agit de définir des morphismes de composition. Considérons trois sommets A'', A' et A de $\mathbf{A}$. A un objet $S=(A_n,\dots,A_1)$ de $\underline{\mathbf{S}}_{(A',A)}$ et à un objet $S'=(A'_m,\dots,A'_1)$ de $\underline{\mathbf{S}}_{(A'',A')}$, on associe l'objet $S'\perp S=(A'_m,\dots,A'_2,A_n,\dots,A_1)$ de la catégorie $\underline{\mathbf{S}}_{(A'',A)}$. On a un morphisme d'associativité :

$$a(S',S): L_{(A'',A')}(S')\otimes L_{(A',A)}(S)\to L_{(A'',A)}(S'\perp S).$$

Fixons-nous la suite S. Le foncteur

$$L_{(A'',A')}(-)\otimes L_{(A',A)}(S): \underline{\mathbf{S}}_{(A'',A')}\to\mathbf{V}$$

admet pour limite inductive $\mathbf{B}(A'',A')\otimes L_{(A',A)}(S)$. Les axiomes de cohérence sur $\mathbf{V}$ assurent que ce foncteur est la source d'une transformation naturelle de but $L_{(A'',A)}(-)$, définie par la famille $(a(S',S))$ où S' parcourt $(\underline{\mathbf{S}}_{(A',A)})_0$ et donc aussi d'une transformation naturelle $\theta(A'',A',S)$ de but un foncteur constant sur $\mathbf{B}(A'',A)$ et définie par la famille $(F(S'\perp S).\,a(S',S))_{S'\in(\underline{\mathbf{S}}_{(A',A)})_0}$. On désigne par

$$m_{(A'',A',S)}: \mathbf{B}(A'',A')\otimes L_{(A',A)}(S)\to\mathbf{B}(A'',A)$$

le co-crochet de $\theta(A'',A',S)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}(A'',A) & & \mathbf{B}(A'',A')\otimes L_{(A',A)}(S) \arrow[ll, "{m(A'',A',S)}"'] \arrow[d, "{\mathbf{B}(A'',A')\otimes L_{(A',A)}(s)}"] \\
& & \mathbf{B}(A'',A')\otimes L_{(A',A)}(\bar{S}) \arrow[ull, "{m(A'',A',\bar{S})}"]
\end{tikzcd}$$

Les axiomes de cohérence assurent aussi que le diagramme ci-dessus est commutatif. Par suite, la famille $(m(A'', A', S))$ où S parcourt $(\underline{\mathbf{S}}_{(A', A)})_o$ définit une transformation naturelle de source $\mathbf{B}(A'', A') \otimes L_{(A', A)}(-)$ et de but un foncteur constant sur $\mathbf{B}(A'', A)$. Cette transformation naturelle admet un co-crochet:

$$m(A'', A', A) : \mathbf{B}(A'', A') \otimes \mathbf{B}(A', A) \to \mathbf{B}(A'', A)$$

relatif à la limite $\mathbf{B}(A'', A') \otimes \mathbf{B}(A', A)$ de $\mathbf{B}(A'', A') \otimes L_{(A', A)}(-)$. Le morphisme $m(A'', A', A)$ sera un morphisme de composition de $\mathbf{B}$.

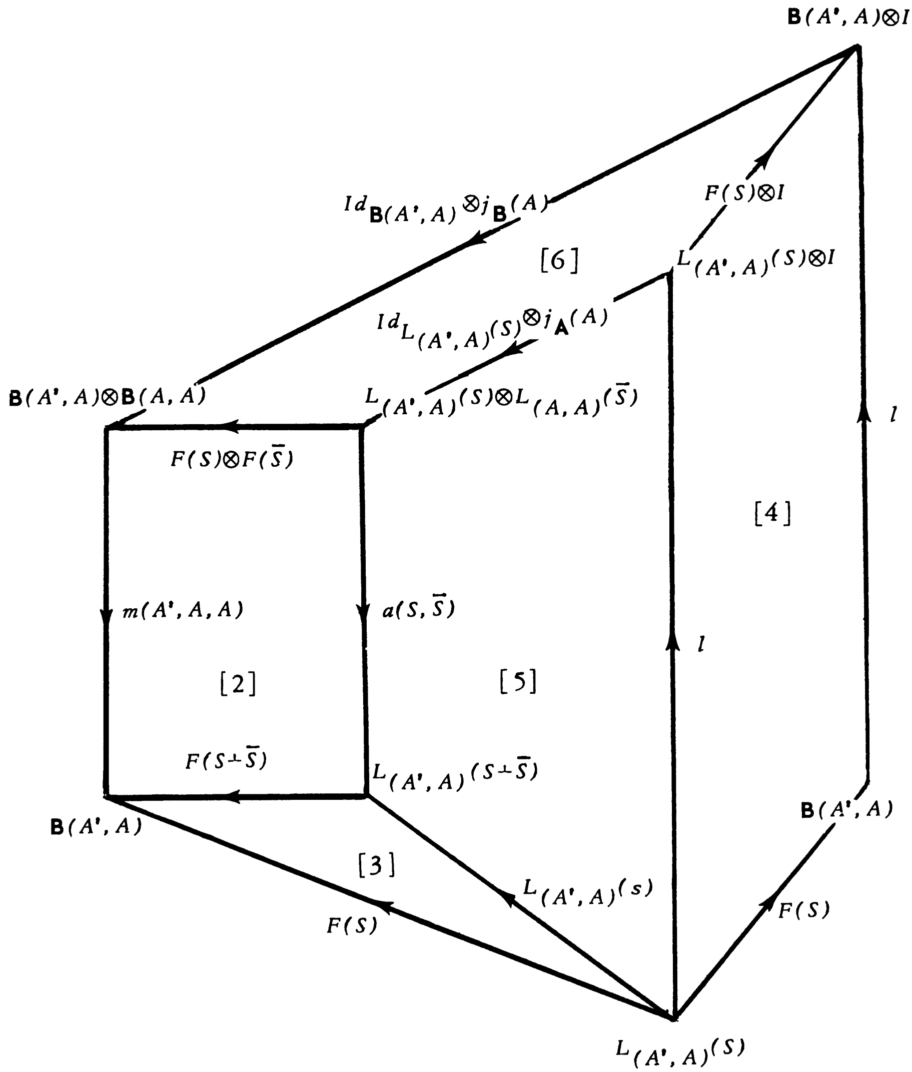
On peut faire une construction analogue en fixant un objet S' de la catégorie $\underline{\mathbf{S}}_{(A'', A')}$; par suite, on a une transformation naturelle $\theta(S', A', A)$ de source le foncteur $L_{(A'', A')} \otimes L_{(A', A)}(-)$, de but un foncteur constant sur $\mathbf{B}(A'', A)$, définie par la famille

$$(F(S' \perp S) . a(S', S))_{S \in \underline{\mathbf{S}}_{(A', A)^o}};$$

soit $m_{(S', A', A)} : L_{(A'', A')}(S') \otimes \mathbf{B}(A', A) \to \mathbf{B}(A'', A)$ son co-crochet. La famille $(m_{(S', A', A)})_{S' \in \mathbf{S}_{(A'', A')_o}}$ définit une nouvelle transformation naturelle dont le co-crochet n'est autre que $m_{(A'', A', A)}$. Pour tout objet S' de $\underline{\mathbf{S}}_{(A'', A')}$ et tout objet S de $\underline{\mathbf{S}}_{(A', A)}$, on a donc un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}(A'', A') \otimes \mathbf{B}(A', A) \arrow[d, "m(A'', A', A)"'] \arrow[dr, phantom, "{[1]}"] & & L_{(A'', A')}(S') \otimes L_{(A', A)}(S) \arrow[ll, "F(S') \otimes F(S)"'] \arrow[d, "a(S', S)"] \\
\mathbf{B}(A'', A) & & L_{(A'', A)}(S', S) \arrow[ll, "F(S' \perp S)"]
\end{tikzcd}$$

Considérons la suite $\bar{S} = (A, A)$, objet de $\underline{\mathbf{S}}_{(A, A)}$, une suite S objet de $\underline{\mathbf{S}}_{(A', A)}$ et l'équivalence $l : Id_{\mathbf{V}} \to Id_{\mathbf{V}} \otimes I$. Nous avons un morphisme $s : S \to S \perp \bar{S}$ de $\underline{\mathbf{S}}_{(A', A)}$. Dans le diagramme suivant les sous-



diagrammes commutent :

[2] en vertu du diagramme [1] ;

[3] car $\mathbf{B}(A', A)$ est une limite inductive du foncteur $L_{(A', A)}$;

[4] en vertu de la naturalité de l'équivalence l ;

[5] par définition de $L_{(A', A)}(s)$;

[6] vu que $\otimes$ est un bifoncteur et que $F(\bar{S}).j_{\mathbf{A}}(A) = j_{\mathbf{B}}(A)$.

Ainsi on en déduit la relation :

$$m(A',A,A).(Id_{\mathbf{B}(A',A)}\otimes j_{\mathbf{B}}(A)).l=Id_{\mathbf{B}(A',A)}.$$

Donc $j_{\mathbf{B}}(A)$ est un morphisme unité à droite. On montre de même que c'est un morphisme unité à gauche.

A l'aide des axiomes de cohérence, on montre l'associativité des morphismes de composition. La démonstration explicite est analogue à la précédente et nécessite de très gros diagrammes. Montrons que **B** est une structure libre associée à **A**. Désignons par **C** une **V**-catégorie et par $G:\mathbf{A}\to[\mathbf{C}]$ un homomorphisme entre **V**-graphes orientés, où $[\mathbf{C}]$ est le **V**-graphe orienté sous-jacent à **C**. Si $S=(A',A_{n-1},\dots,A_2,A)$ est un objet de $\underline{\mathbf{S}}_{(A',A)}$, posons $C_i=\underline{G}(A_i)$, $C'=\underline{G}(A')$, $C=\underline{G}(A)$ et

$$\phi(S)=m_{(C',C_{n-1},\dots,C_2,C)}.(G(A',A_{n-1})\otimes\dots\otimes G(A_2,A)),$$

où $m_{(C',C_{n-1},\dots,C_2,C)}$ est un morphisme de composition de **C**, «produit» de morphismes de composition «simples». Comme $j_{\mathbf{C}}(C_i)$ est un morphisme unité, on a un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(C',C) & & \mathbf{C}(C',C_{n-1})\otimes\dots\otimes\mathbf{C}(C_i,C_i)\otimes\dots\otimes\mathbf{C}(C_2,C) \arrow[ll, "{m(C',\dots,C_i,C_i,\dots,C)}"'] \\
& & \mathbf{C}(C',C_{n-1})\otimes\dots\otimes I\otimes\dots\otimes\mathbf{C}(C_2,C) \arrow[u, "{Id_{\mathbf{C}(C',C_{n-1})}\otimes\dots\otimes j_{\mathbf{C}}(C_i)\otimes\dots\otimes Id_{\mathbf{C}(C_2,C)}}"'] \arrow[ull] \\
& & \mathbf{C}(C',C_{n-1})\otimes\dots\otimes\dots\otimes\mathbf{C}(C_2,C) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[uull, "{m(C',\dots,\dots,C)}"]
\end{tikzcd}$$

La famille $(\phi(S))_{S\in\underline{\mathbf{S}}_{(A',A)^o}}$ définit donc une transformation naturelle de source $L_{(A',A)}$ et de but un foncteur constant sur $\mathbf{C}(C',C)$. On désigne par $H(A',A)$ son co-crochet. Supposons que $A'=A$:

$$H(A,A).j_{\mathbf{B}}(A)=H(A,A).F(A,A).j_{\mathbf{A}}(A)$$
$$=G(A,A).j_{\mathbf{A}}(A)=j_{\mathbf{C}}(C).$$

Ainsi H est compatible avec les morphismes unités. Considérons les trois sommets A'', A' et A de $\mathbf{A}$, les suites S', objet de $\underline{\mathbf{S}}_{(A'',A')}$, et S, objet de $\underline{\mathbf{S}}_{(A',A)}$. Posons $C''=\underline{G}(A'')$ et $C'_i=\underline{G}(A'_i)$. Pour simplifier les notations, posons aussi $m(S)=m_{(C',C_{n-1},\dots,C_2,C)}$. On a la relation :

$$m_{(C'',C',C)}.(m(S')\otimes m(S)).((G(A'',A'_{m-1})\otimes\dots\otimes G(A'_2,A'))\otimes$$
$$\otimes((G(A',A_{n-1})\otimes\dots\otimes G(A_2,A)))=$$
$$=m(S'\perp S).(G(A'',A'_{m-1})\otimes\dots\otimes G(A'_2,A')\otimes G(A',A_{n-1})\otimes\dots$$
$$\dots\otimes G(A_2,A)).a(S',S).$$

Autrement dit on a un diagramme du type suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}(A'',A')\otimes\mathbf{B}(A',A) \arrow[dr, "H(A'',A')\otimes H(A',A)"'] \arrow[dd, "m(A'',A',A)"'] \arrow[r, phantom, "{[1]}"] & & L_{(A'',A')}(S')\otimes L_{(A',A)}(S) \arrow[ll, "F(S')\otimes F(S)"'] \arrow[dl, "\phi(S')\otimes\phi(S)"] \arrow[dd, "a(S',S)"] \\
\arrow[r, phantom, "{[4]}"] & \mathbf{C}(C'',C')\otimes\mathbf{C}(C',C) \arrow[dd, "m(C'',C',C)"] \arrow[r, phantom, "{[3]}"] & \\
\mathbf{B}(A',A) \arrow[dr, "H(A'',A)"'] \arrow[r, phantom, "{[2]}"] & & L_{(A'',A)}(S'\perp S) \arrow[ll, "F(S'\perp S)"'] \arrow[dl, "\phi(S'\perp S)"] \\
& \mathbf{C}(C'',C) &
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, [3] commute d'après la relation précédente ; [1] et [2] commutent par définition de H, et le pourtour par définition des morphismes de composition; [4] commute car la famille $(F(S')\otimes F(S))$ est régulière à droite. Ainsi H est compatible avec les morphismes de composition et est un $\mathbf{V}$-foncteur de $\mathbf{B}$ vers $\mathbf{C}$. L'unicité des $H(A',A)$ assure l'unicité de H. Donc $\mathbf{B}$ définit bien une structure libre associée à $\mathbf{A}$. ■

THEOREME I.3. *Si* $\mathbf{V}$ *est à petites limites inductives, le foncteur* $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$ *est à quasi-surjections* [S.T.Q.Q].

PREUVE. La démonstration présente quelques analogies avec celle du théorème précédent. Soit $\mathbf{A}$ une petite $\mathbf{V}$-catégorie et $K : [\mathbf{A}] \to \mathbf{D}$ un petit homomorphisme entre $\mathbf{V}$-graphes orientés, où $[\mathbf{A}]$ est sous-jacent à $\mathbf{A}$. A chaque couple (D', D) de sommets de $\mathbf{D}$ associons une catégorie $\underline{\mathbf{S}}_{(D', D)}$. Les objets de cette catégorie sont les familles $(S, R_\lambda, \dots, R_\iota, \dots, R_\alpha) = T$, où S est une suite de sommets de $\mathbf{D}$:

$$S = (D', D_{n-1}, \dots, D_i, \dots, D_2, D),$$

où R_ι est une suite d'objets de $\mathbf{A}$ d'au moins trois éléments :

$$R_\iota = (A_{n_\iota}, \dots, A_{i_\iota}, \dots, A_{1_\iota}),$$

vérifiant $\underline{K}(A_{i_\iota}) = D_{i_\iota}$ où $1_{\iota+1} > n_\iota > 1_\iota > n_{\iota-1}$.

Cette catégorie est engendrée par les flèches :

a) s de (S) vers $(\bar{S})$, si $\bar{S} = (D', \dots, D_i, D_i, \dots, D)$, et $S = (D', \dots, D_i, \dots, D)$;

b) t de (S) vers T et $\tilde{t}$ de $(\tilde{S})$ vers T, si $T = (\tilde{S}, R_\lambda, \dots, R_\iota, \dots, R_\alpha)$ et si S se déduit de $\tilde{S}$ en supprimant dans cette suite les sommets $\underline{K}(A_{i_\iota})$, pour A_{i_ι} appartenant à la suite R_ι, pour $n_\iota < i_\iota < 1_\iota$ et pour $\lambda \leq \iota \leq \alpha$,

$$\begin{tikzcd} (\bar{S}) \\ (S) \arrow[u, "s"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (\tilde{S}) \arrow[dl, "\tilde{t}"'] \\ T & \\ & (S) \arrow[ul, "t"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (\bar{S}) \arrow[dl, "\tilde{t}"'] \\ (\bar{S}, R) & \\ & (S) \arrow[ul, "t"] \arrow[uu, "s"'] \end{tikzcd}$$

et par les relations :

$\tilde{t}.s = t$, si $R = (A_{i+1}, A_i, A_i)$ ou $R = (A_i, A_i, A_{i-1})$ et si $D_i = \underline{K}(A_i)$, $D_{i+1} = \underline{K}(A_{i+1})$ ou $D_{i-1} = \underline{K}(A_{i-1})$.

On définit un foncteur $L_{(D', D)} : \underline{\mathbf{S}}_{(D', D)} \to \mathbf{V}$ comme suit :

$$a^o)\ L_{(D', D)}(S) = \mathbf{D}(D', D_{n-1}) \otimes \dots \otimes \mathbf{D}(D_{i+1}, D_i) \otimes$$
$$\otimes\, \mathbf{D}(D_i, D_{i-1}) \otimes \dots \otimes \mathbf{D}(D_2, D).$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
L_{(D',D)}(\tilde{S}) = \mathbf{D}(D', D_{n-1}) \otimes \dots \otimes \mathbf{D}(D_{i+1}, D_i) \otimes \mathbf{D}(D_i, D_i) \otimes \mathbf{D}(D_i, D_{i-1}) \otimes \dots \otimes \mathbf{D}(D_2, D) & \\
 & \mathbf{D}(D', D_{n-1}) \otimes \dots \otimes I \otimes \dots \otimes \mathbf{D}(D_2, D) \arrow[ul, "Id_{\mathbf{D}(D', D_{n-1})} \otimes \dots \otimes j_{\mathbf{D}}(D_i) \otimes \dots \otimes Id_{\mathbf{D}(D_2, D)}"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
L_{(D',D)}(S) = \mathbf{D}(D', D_{n-1}) \otimes \dots \otimes \mathbf{D}(D_{i+1}, D_i) \otimes \mathbf{D}(D_i, D_{i-1}) \otimes \dots \otimes \mathbf{D}(D_2, D) \arrow[uu, "L_{(D',D)}(s)"] &
\end{tikzcd}$$

b°) Supposons que $T = (\tilde{S}, R_\lambda, \dots, R_\iota, \dots, R_\alpha)$ et posons :

$$m_T = Id_{\mathbf{D}(D', D_{n-1})} \otimes \dots \otimes m(A_{n_\lambda}, \dots, A_{i_\lambda}, \dots, A_{1_\lambda}) \otimes Id \dots \otimes m(A_{n_\iota}, \dots, A_{i_\iota}, \dots, A_{1_\iota}) \otimes Id \dots \otimes m(A_{n_\alpha}, \dots, A_{1_\alpha}) \otimes Id_{\mathbf{D}(D_{1_\alpha}, D_{1_\alpha - 1})} \otimes \dots \otimes Id_{\mathbf{D}(D_2, D)},$$

$$k_T = Id_{\mathbf{D}(D', D_{n-1})} \otimes \dots \otimes K(A_{n_\lambda}, A_{1_\lambda}) \otimes Id_{\mathbf{D}(D_{1_\lambda}, D_{1_\lambda - 1})} \otimes \dots \otimes K(A_{n_\iota}, A_{1_\iota}) \otimes Id_{\mathbf{D}(D_{1_\iota}, D_{1_\iota - 1})} \otimes \dots \otimes K(A_{n_\alpha}, A_{1_\alpha}) \otimes Id_{\mathbf{D}(D_{1_\alpha}, D_{1_\alpha - 1})} \otimes \dots \otimes Id_{\mathbf{D}(D_2, D)},$$

$$\tilde{k}_T = Id_{\mathbf{D}(D', D_{n-1})} \otimes \dots \otimes K(A_{n_\lambda}, A_{n_\lambda - 1}) \otimes \dots \otimes K(A_{2_\lambda}, A_{1_\lambda}) \otimes Id_{\mathbf{D}(D_{1_\lambda}, D_{1_\lambda - 1})} \otimes \dots \otimes K(A_{n_\iota}, A_{n_\iota - 1}) \otimes \dots \otimes K(A_{2_\iota}, A_{1_\iota}) \otimes Id_{\mathbf{D}(D_{1_\iota}, D_{1_\iota - 1})} \otimes \dots \otimes K(A_{n_\alpha}, A_{n_\alpha - 1}) \otimes \dots \otimes K(A_{2_\alpha}, A_{1_\alpha}) \otimes Id_{\mathbf{D}(D_{1_\alpha}, D_{1_\alpha - 1})} \otimes \dots \otimes Id_{\mathbf{D}(D_2, D_1)}.$$

Le couple $(k_T . m_T, \tilde{k}_T)$ admet une somme fibrée W_T, dont les co-projections sont notées w_T et $\tilde{w}_T$. On a alors :

$$L_{(D', D)}(T) = W_T, \quad L_{(D', D)}(t) = w_T \quad \text{et} \quad L_{(D', D)}(\tilde{t}) = \tilde{w}_T.$$

c°) Comme $j_{\mathbf{A}}(A_i)$ est un morphisme unité, $L_{(D', D)}(\text{-})$ est compatible avec la relation $\tilde{t}. s = t$, définissant la catégorie $\underline{\mathbf{S}}(D', D)$.

Le foncteur $L_{(D', D)}(\text{-})$ admet une limite inductive $\mathbf{B}(D', D)$; les co-projections correspondantes sont notées $K'(T)$, $K'(S)$ et $K'(D', D)$. On pose :

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{D}_0 \text{ et } j_{\mathbf{B}}(D) = K'(D, D) . j_{\mathbf{D}}(D).$$

Nous avons défini ainsi un homomorphisme entre $\mathbf{V}$-graphes orientés $K' : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$. Montrons, comme dans la démonstration du théorème précédent, que $\mathbf{B}$ est sous-jacent à une $\mathbf{V}$-catégorie. A un objet $T = (S, \dots, R_\iota, \dots, R_\alpha)$ de $\underline{\mathbf{S}}_{(D', D)}$ et un objet $T' = (S', \dots, R'_\iota, \dots, R'_\alpha)$ de $\underline{\mathbf{S}}_{(D'', D')}$ on fait correspondre un objet

$$T' \perp T = (S' \perp S, \dots, R'_\iota, \dots, R'_\alpha, R_\lambda, \dots, R_\iota, \dots, R_\alpha)$$

de $\underline{\mathbf{S}}_{(D'', D)}$. Comme le foncteur $\otimes$ est associatif et que les foncteurs $- \otimes V$ et $V \otimes -$ sont compatibles avec les limites inductives, il existe un morphisme canonique

$$a(T', T) : L_{(D'', D')}(T') \otimes L_{(D', D)}(T) \to L_{(D'', D)}(T' \perp T).$$

Pour les mêmes raisons, il existe un morphisme canonique $m_{(D'', D', D)}$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}(D'', D') \otimes \mathbf{B}(D', D) \arrow[d, "m(D'', D', D)"'] \arrow[r, phantom, "{[1]}"] & L_{(D'', D')}(T') \otimes L_{(D', D)}(T) \arrow[l, "K'(T') \otimes K'(T)"'] \arrow[d, "a(T', T)"] \\
\mathbf{B}(D'', D) & L_{(D'', D)}(T' \perp T) \arrow[l, "K'(T' \perp T)"]
\end{tikzcd}$$

pour tout objet T de $\underline{\mathbf{S}}_{(D', D)}$ et tout objet T' de $\underline{\mathbf{S}}_{(D'', D')}$.

Les morphismes $m_{(D'', D', D)}$ font de $\mathbf{B}$ une $\mathbf{V}$-catégorie; la démonstration est en tous points semblable à celle du théorème I.2.

Posons

$$F(A', A) = K'(D', D) . K(A', A), \text{ où } D' = \underline{K}(A') \text{ et } D = \underline{K}(A).$$

On a :

$$F(A, A) . j_{\mathbf{A}}(A) = K'(D, D) . j_{\mathbf{D}}(D) = j_{\mathbf{B}}(D).$$

Supposons donné un troisième objet A'' de $\mathbf{A}$ et posons :

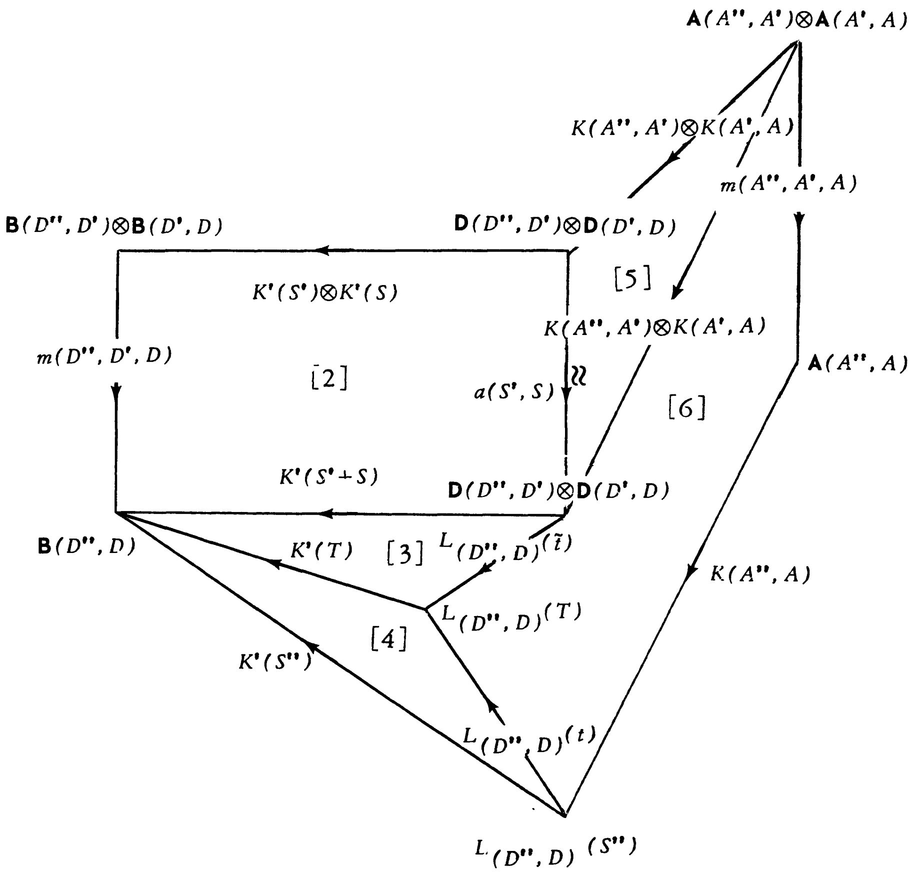
$$D'' = \underline{K}(A''), \ (S'') = ((D'', D)), \ (S') = ((D'', D')), \ (S) = ((D', D))$$

$$\text{et } T = (S' \perp S, (A'', A', A)).$$

Considérons le diagramme suivant où :

[2] commute en vertu de [1],

[3] et [4] commutent, car $\mathbf{B}(D'', D)$ est une limite inductive,



[5] commute car $a(S', S)$ est une unité,

[6] commute par définition du foncteur $L_{(D'', D)}$ (voir b).

Ainsi nous avons la relation :

$$m_{(D'', D', D)} \cdot (F(A'', A') \otimes F(A', A)) = F(A'', A) \cdot m_{(A'', A', A)}$$

et F est un **V**-foncteur de **A** vers **B** qui vérifie : $K'. K = [F]$. Montrons que F est une quasi-surjection. On se donne un **V**-foncteur $H : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ et un homomorphisme entre **V**-graphes orientés $G : \mathbf{D} \to [\mathbf{C}]$ tels que $G. K = [H]$.

a°) Considérons un objet (S) de $\underline{\mathbf{S}}_{(D', D)}$, où $S=(D', D_{n-1}, \dots, D_2, D)$, et posons $C'=\underline{G}(D')$, $C=\underline{G}(D)$ et $C_i=\underline{G}(D_i)$. Si

$$n(S)=m_{(C', C_{n-1}, \dots, C_2, C)}.(G(D', D_{n-1}) \otimes \dots \otimes G(D_2, D)),$$

on a la relation $n(\overline{S}).L_{(D', D)}(s)=n(S)$, car $j_{\mathbf{C}}(C_i)$ est un morphisme unité de $\mathbf{C}$ et $j_{\mathbf{C}}(C_i)=G(D_i, D_i).j_{\mathbf{D}}(D_i)$.

b°) On considère l'objet $T=(\tilde{S}, R_\lambda, \dots, R_\iota, \dots, R_\alpha)$ de $\underline{\mathbf{S}}_{(D', D)}$. Le fait que H est un $\mathbf{V}$-foncteur et que l'on a la relation $[H]=G.K$ assure que :

$$n(\tilde{S}).\tilde{k}_T=n(S).k_T.m_T.$$

On désigne par $n(T)$ le co-crochet de $(n(\tilde{S}), n(S))$. On a donc :

$$n(\tilde{S})=n(T).\tilde{w}_T, \quad n(S)=n(T).w_T.$$

Ainsi la famille $((n(T))_{T\in(\underline{\mathbf{S}}_{(D', D)})_0}$ définit une transformation naturelle de source $L_{(D', D)}$ et de but un foncteur constant sur $\mathbf{C}(C', C)$. On note $\bar{H}(D', D)$ son co-crochet; il vérifie

$$\bar{H}(D', D).K'(D', D)=G(D', D)$$

et, si $D'=\underline{K}(A')$ et $D=\underline{K}(A)$, aussi $\bar{H}(D', D).F(A', A)=H(A', A)$. De plus,

$$\begin{aligned}\bar{H}(D, D).j_{\mathbf{B}}(D)&=\bar{H}(D, D).K'(D, D).j_{\mathbf{D}}(D)\\ &=G(D, D).j_{\mathbf{D}}(D)=j_{\mathbf{C}}(C).\end{aligned}$$

Comme H est compatible avec les morphismes de composition et comme ceux-ci sont associatifs, nous sommes assurés de la relation :

$$m_{(C'', C', C)}.(n(T') \otimes n(T))=n(T'\perp T).a(T', T),$$

qui entraîne :

$$m_{(C'', C', C)}.(\bar{H}(D'', D') \otimes \bar{H}(D', D))=\bar{H}(D'', D).m_{(D'', D', D)}.$$

Ainsi $\bar{H}: \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ est un $\mathbf{V}$-foncteur qui vérifie : $\bar{H}.F=H$ et $[\bar{H}].K'=G$. L'unicité de $\bar{H}$ provient du fait que $\bar{H}(D', D)$ est un co-crochet . ■

COROLLAIRE. *Supposons que* $\underline{\mathbf{V}}$ *est à petites limites inductives :*

a°) Le foncteur d'oubli de $\mathbf{V}$-*cat dans* $\mathbf{E}$, *qui à un* $\mathbf{V}$-*foncteur associe son application sous-jacente, est à structures quasi-quotients ;*

b°) La catégorie **V***-cat est à petites limites inductives ;*

c°) Le foncteur d'oubli de **V***-cat dans* **E***, qui à un* **V***-foncteur associe sa restriction aux objets, est à structures quasi-quotients.*

PREUVE. a et b sont des conséquences des corollaires des propositions I.9 et I.10. c est une conséquence de a ; en effet, soit **A** une petite **V**-catégorie et r_0 une relation sur $\mathbf{A}_0$. La relation r_0 engendre sur $\underline{\mathbf{A}}$ une relation r, où les seules flèches identifiées sont des flèches unités. Une **V**-catégorie quasi-quotient de **A** par r_0 est isomorphe à une **V**-catégorie quasi-quotient de **A** par r. ■

REMARQUE. Dans [S.C.F.D] nous ne supposions pas que la categorie $\underline{\mathbf{V}}$ était monoïdale et l'expression des résultats ci-dessus s'en trouvait compliquée.

CAS PARTICULIER : On peut considérer les sous-catégories pleines de **V**-*cat* et de **V**-*gra*, dont les objets sont les **V**-catégories n'ayant qu'un objet et les **V**-graphes orientés n'ayant qu'un seul sommet. On obtient ainsi les **V**-monoïdes engendrés, les **V**-monoïdes libres, les **V**-monoïdes quasi-surjections et les **V**-monoïdes limites inductives.

Considérons le cas où **V** est la catégorie des R-modules, sur un anneau R. Le **V**-monoïde libre **B** associé au module pointé **A** du théorème I.2 est un quotient de l'algèbre tensorielle $T(\mathbf{A})$. Si A est le point choisi dans **A**, alors **B** est obtenu en faisant de A une unité de $T(\mathbf{A})$ pour la multiplication.

II. COMPLETION $\mathcal{J}$-PROJECTIVE ET $\mathcal{I}$-INDUCTIVE DE PETITES V-CATEGORIES.

On se donne deux ensembles $\mathcal{J}$ et $\mathcal{I}$ de petites catégories. Soit **A** une $\hat{\mathbf{V}}$-catégorie ayant $\underline{\mathbf{A}}$ pour catégorie sous-jacente :

DEFINITION. a°) *Une relation $\mathcal{J}$-cône projectif* μ sur $\underline{\mathbf{A}}$ est une relation qui associe à tout foncteur ϕ de source $\underline{\mathbf{J}} \in \mathcal{J}$ et de but $\underline{\mathbf{A}}$ un ensemble (éventuellement vide) de transformations naturelles de but ϕ et de source un foncteur constant.

b°) *Une relation $\mathcal{J}$-limite projective sur* $\underline{\mathbf{A}}$ est une relation $\mathcal{J}$-cône projectif sur $\underline{\mathbf{A}}$ telle que tout élément ψ de $\mu(\phi)$ soit une $\hat{\mathbf{V}}$-limite projective naturalisée (i.e. $\mathbf{A}(-, A).\psi$ est une limite projective naturalisée dans $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$, pour tout élément A de $\mathbf{A}_0$).

Si μ est une application (partielle), on parlera d'*application (partielle) $\mathcal{J}$-cône projectif* ou *$\mathcal{J}$-limite projective.* On définit dualement les notions de relation, d'application partielle et d'application $\mathcal{J}$-cône inductif et $\mathcal{J}$-limite inductive.

Désignons par $C\hat{o}''_o$ l'ensemble des triplets $U = (\mathbf{A}, \mu, \partial)$ tels que **A** soit une $\hat{\mathbf{V}}$-catégorie, μ une relation $\mathcal{J}$-cône projectif et ∂ une relation $\mathcal{I}$-cône inductif sur $\underline{\mathbf{A}}$. Cet ensemble admet pour sous-ensembles :

a°) $C\hat{o}'_o$ formé des U tels que μ et ∂ soient des applications partielles,

b°) $\hat{Lim}_o$ ($\hat{Lim}'_o$) formé des U tels que μ soit une application (partielle) $\mathcal{J}$-limite projective sur **A** et ∂ une application (partielle) $\mathcal{I}$-limite inductive sur **A** .

On définit une catégorie $C\hat{o}''$ dont les flèches sont les triplets (U', F, U) vérifiant :

$U = (\mathbf{A}, \mu, \partial)$ et $U' = (\mathbf{A}', \mu', \partial')$ sont des éléments de $C\hat{o}''_o$;

F est un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur de **A** vers **A'** tel que, si ψ est un élément de $\mu(\phi)$ (resp. de $\partial(\phi)$), $\underline{F}.\psi$ appartient à $\mu'(F.\phi)$ (resp. à $\partial'(\underline{F}.\phi)$).

Pour simplifier les notations on se permettra d'identifier les unités et les objets de $C\hat{o}''$. Cette catégorie admet pour sous-catégories pleines les catégories :

$\hat{Co}'$ ayant pour ensemble d'objets (unités) $\hat{Co}'_0$,
$\hat{Lim}'$.. $\hat{Lim}'_0$,
$\hat{Lim}$.. $\hat{Lim}_0$,

On note $\hat{\mathcal{C}}''$ le foncteur de $\hat{Co}$ vers $\hat{\mathbf{V}}$-*Cat*, qui à (U', F, U) associe F; ce foncteur admet pour sous-foncteurs les foncteurs $\hat{\mathcal{C}}'$, $\hat{\mathcal{L}}'$, $\hat{\mathcal{L}}$ vers $\hat{\mathbf{V}}$-*Cat* de sources respectives $\hat{Co}'$, $\hat{Lim}'$, $\hat{Lim}$. On définit à partir de $\mathbf{V}$ des catégories et des foncteurs analogues; on remplacera le symbole $\hat{}$ par $\check{}$ pour les distinguer. Si $\check{}$ est supprimé, c'est que l'on aura affaire à des catégories où $\mathbf{A}$ est petite; on a donc une famille de sous-catégories pleines :

$$\begin{array}{ccccccc}
Lim & \subset & Lim' & \subset & Co' & \subset & Co'' \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
\check{Lim} & \subset & \check{Lim}' & \subset & \check{Co}' & \subset & \check{Co}'' \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
\hat{Lim} & \subset & \hat{Lim}' & \subset & \hat{Co}' & \subset & \hat{Co}''
\end{array}$$

Nous nous proposons de trouver des conditions permettant d'associer à une petite $\mathbf{V}$-catégorie $\mathbf{A}$ une petite $\mathbf{V}$-catégorie $\mathbf{A}'$ ayant certaines (resp. toutes les) $\mathbf{V}$-limites projectives ⌈inductives⌉ dont les catégories d'indices appartiennent à $\mathcal{J}$ ⌈$\mathcal{I}$⌉. Plus précisément, c'est chercher des conditions permettant d'affirmer l'existence de (Co', Lim')-projecteurs ou de (Co', Lim)-projecteurs (i.e. de structures libres relatives au foncteur inclusion de Co' dans Lim' et dans Lim). Dans un premier paragraphe, on cherche des conditions permettant d'appliquer le théorème d'existence des structures libres; dans un second paragraphe, on construit plus directement ces projecteurs. $\mathcal{P}_{\hat{\mathbf{V}}}$ désigne le foncteur de $\hat{\mathbf{V}}$-*Cat* dans $\hat{Cat}$.

II.1. Existence de V-catégories $(\mathcal{J}, \mathcal{I})$-complétées.

PROPOSITION 2.1. *Les foncteurs $\hat{\mathcal{C}}''$, $\hat{\mathcal{C}}'$, $\hat{\mathcal{L}}'$ et $\hat{\mathcal{L}}$ sont des foncteurs d'homomorphismes saturés.*

Soit $\underline{\mathbf{K}}$ une catégorie de $\hat{Cat}$ et S un foncteur de $\underline{\mathbf{K}}$ vers $\hat{Co}''$:

PROPOSITION 2.2. *Si $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ est à $\{\underline{\mathbf{K}}\}$-limites projectives, le foncteur S*

admet une limite projective.

PREUVE. Posons $S(K) = U_K = (\mathbf{A}_K, \mu_K, \partial_K)$, pour toute unité K de $\underline{\mathbf{K}}$, et

$$S(k) = (U_{K'}, F_k, U_K) \quad \text{si} \quad k : K \to K' \in \underline{\mathbf{K}}.$$

D'après la proposition I.1 le foncteur $\hat{\mathcal{C}}''.S$ admet une limite projective $\mathbf{A}$ et $\underline{\mathbf{A}}$ est une limite du foncteur $\mathcal{P}_{\hat{\mathbf{V}}}.\hat{\mathcal{C}}''.S$. Désignons par G_K les $\hat{\mathbf{V}}$-foncteurs projections de $\mathbf{A}$ vers $\mathbf{A}_K$. Soient ϕ un foncteur de $\underline{\mathbf{J}} \in \mathcal{J}$ vers $\underline{\mathbf{A}}$ et ψ une transformation naturelle de but ϕ, de source un foncteur constant. Par définition, on dira que $\psi \in \mu(\phi)$ si et seulement si $\underline{G}_K . \psi$ appartient à $\mu_K(\underline{G}_K . \phi)$, pour toute unité K de $\underline{\mathbf{K}}$. On définit de manière analogue ∂. Le triplet $U = (\mathbf{A}, \mu, \partial)$ appartient à $\hat{Co}''_0$ et (U_K, G_K, U) est une flèche de $\hat{Co}''$, par définition de μ et ∂. On considère une famille de flèches $((U_K, G'_K, U'))$ de $\hat{Co}''$, où $U' = (\mathbf{A}', \mu', \partial')$ et où K est une unité de $\underline{\mathbf{K}}$. On suppose que :

$$F_k . G'_K = G'_{K'}, \quad \text{si} \quad k : K \to K'.$$

Il existe un unique $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur $F : \mathbf{A}' \to \mathbf{A}$ tel que $G_K . F = G'_K$ pour toute unité K de $\underline{\mathbf{K}}$. D'après la proposition 2.1, il suffit de vérifier que (U, F, U') est une flèche de $\hat{Co}''$ pour être sûr que U est limite du foncteur S. Soient ϕ' un foncteur de $\underline{\mathbf{J}} \in \mathcal{J}$ vers $\underline{\mathbf{A}}'$ et ψ' un élément de $\mu'(\phi')$. Par hypothèse, $\psi'_K = \underline{G}'_K . \psi'$ appartient à $\mu_K(\underline{G}'_K . \phi')$, pour toute unité K de $\underline{\mathbf{K}}$. De plus, le foncteur de base de $\hat{\mathbf{V}}$ est compatible avec les $\{\underline{\mathbf{K}}\}$-limites projectives : il existe une unique transformation naturelle ψ vérifiant :

$$G_K . \psi = \psi'_K, \quad \text{pour toute unité } K \text{ de } \underline{\mathbf{K}}.$$

En effet, on a la relation $\underline{F}_k . \psi'_K = \psi'_{K'}$, pour toute flèche $k : K \to K'$ de $\underline{\mathbf{K}}$. Par définition de μ, ψ est un élément de $\mu(\underline{F}.\phi')$. On montre la même propriété en ce qui concerne ∂ et la proposition s'en déduit. ∎

PROPOSITION 2.3. *Dans les mêmes conditions les catégories $\hat{Co}'$, $\hat{Lim}'$ et $\hat{Lim}$ sont stables pour les $\{\underline{\mathbf{K}}\}$-limites projectives.*

PREUVE. Il est clair que, si $\mu_K(G_K . \phi)$ a au moins (resp. au plus) un élément, pour toute unité K de $\underline{\mathbf{K}}$, $\mu(\phi)$ a aussi au moins (resp. au plus) un élément. Il reste à montrer que, si $\underline{G}_K . \psi$ est une $\hat{\mathbf{V}}$-limite naturalisée, pour toute unité K de $\underline{\mathbf{K}}$, alors ψ est aussi une $\hat{\mathbf{V}}$-limite naturalisée.

a°) Cas de μ. Soit $A = (A_K)$ une unité de $\underline{\mathbf{A}}$; il faut montrer que la condition

$$\mathbf{A}_K(-, A_K) . \underline{G}_K . \psi \text{ est une limite projective naturalisée pour tout } K$$

assure que $\mathbf{A}(-, A) . \psi$ est une limite projective naturalisée. Soit J une unité de $\underline{\mathbf{J}}$; on sait que $\mathbf{A}(\phi(J), A)$ est une limite projective du foncteur de $\underline{\mathbf{K}}$ dans $\underline{\mathbf{V}}$ qui à $k: K \to K'$ associe $F_k(G_K . \phi(J), A_K)$. De même, si la source de ψ est un foncteur constant sur $\bar{A} = (\bar{A}_K)$, on sait que $\mathbf{A}(\bar{A}, A)$ est une limite projective du foncteur de $\underline{\mathbf{K}}$ dans $\underline{\mathbf{V}}$ qui à k associe $F_k(\bar{A}_K, A_K)$. Le résultat se déduit donc de la commutativité des limites projectives.

b°) Le cas de ∂ est analogue, en remplaçant $\mathbf{A}(-, A)$ par $\mathbf{A}(A, -)$. ∎

On considère la sous-catégorie $\hat{X}$ de la catégorie des monomorphismes de $\hat{\mathbf{V}}$ du paragraphe I.2. On rappelle que $\hat{Y}$ est l'ensemble des $\hat{\mathbf{V}}$-foncteurs $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tels que F_0 soit injectif et que $F(A', A) \in \hat{X}$ pour tout couple (A', A) d'objets de $\mathbf{A}$. On désigne par $\hat{Z}''$ l'ensemble des flèches (U', F, U) de $\hat{Co}''$ vérifiant:

a°) F appartient à $\hat{Y}$,

b°) Si $\underline{\mathbf{J}}$ est un élément de $\mathcal{J}$ et si $\phi: \underline{\mathbf{J}} \to \underline{\mathbf{A}}$ est un foncteur, alors ψ appartient à $\mu(\phi)$ ssi $F . \psi$ appartient à $\mu'(\underline{F} . \phi)$.

c°) Si $\underline{\mathbf{J}}$ appartient à $\mathcal{I}$ et si $\phi: \underline{\mathbf{J}} \to \underline{\mathbf{A}}$ est un foncteur, alors ψ appartient à $\partial(\phi)$ ssi $\underline{F} . \psi$ appartient à $\partial'(\underline{F} . \phi)$.

Il est clair que $\hat{Z}''$ est un ensemble de $\hat{\mathcal{C}}''$-monomorphismes. Les restrictions de $\hat{Z}''$, aux différentes sous-catégories de $\hat{Co}''$ considérées, sont respectivement des ensembles de $\hat{\mathcal{C}}'$-monomorphismes, de $\hat{\mathcal{L}}'$-monomorphismes, de $\hat{\mathcal{L}}$-monomorphismes. On pose, pour la suite,

$$\hat{Z}' = \hat{Z}'' \cap \hat{Co}' \quad \text{et} \quad \hat{Z} = \hat{Z}'' \cap \hat{Lim}'.$$

On suppose que $\mathcal{J} \cup \mathcal{I}$ est un $\mathbf{E}_0$-ensemble. Alors il existe un ordinal régulier ξ vérifiant :

$\sup_{\underline{\mathbf{J}} \in \mathcal{J} \cup \mathcal{I}} ||\underline{\mathbf{J}}|| < \xi < \sup_{M \in \mathbf{E}_0} ||M||$, où $||M||$ est l'ordinal initial associé à M.

On désigne par Q l'ensemble des $\hat{\mathbf{V}}$-foncteurs $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tels que $\mathbf{A}$ soit une petite $\mathbf{V}$-catégorie et par $\underline{\zeta}$ la catégorie associée à l'ordinal ζ. Le foncteur de base $\hat{\mathcal{P}}$ de $\hat{\mathbf{V}}$ *est désormais à limites inductives filtrantes.*

PROPOSITION 2.4. *Supposons que le foncteur inclusion de $\underline{\mathbf{V}}$ dans $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ est à petites limites inductives, que le foncteur de base et les foncteurs inclusion de X dans $\hat{X}$ et de $\hat{X}$ dans $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ sont à $\{\underline{\zeta}\}$-limites inductives, $\zeta \leqslant \xi$. Si le foncteur identique sur $\hat{\mathbf{V}}$ est $(\hat{\underline{\mathbf{V}}}.\underline{\mathbf{V}}_0, \hat{X}.\underline{\mathbf{V}}_0)$-engendrant et si le foncteur de base de $\hat{\mathbf{V}}$ est $(\hat{\mathbf{E}}.\mathbf{E}_0, \hat{X}.\underline{\mathbf{V}}_0)$-engendrant, le foncteur $\hat{\mathcal{C}}'$ est $(Q, \hat{Z}'.\mathcal{C}o_0^{\bullet})$-engendrant.*

PREUVE. Désignons par $U = (\mathbf{B}, \mu, \partial)$ un élément de $\hat{\mathcal{C}o}_0^{\bullet}$ et par G un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur de but $\mathbf{B}$ et de source une petite $\mathbf{V}$-catégorie $\mathbf{C}$. On cherche à déterminer une plus petite $\hat{Y}$-sous-catégorie $\mathbf{A}$ de $\mathbf{B}$ stable pour μ et pour ∂ de manière à ce que G se décompose à travers $\mathbf{A}$. Pour ceci nous allons définir par récurrence une famille $(F_\zeta)_{\zeta \leqslant \xi}$ d'éléments de $\hat{Y}$, où F_ζ est un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur de but $\mathbf{B}$ et de source une petite $\mathbf{V}$-catégorie $\mathbf{A}_\zeta$.

a°) Les conditions du théorème I.1 sont réalisées et il existe un élément $F_1 : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}$ de $\hat{Y}$ engendrée par G. De plus, $\mathbf{A}_1$ est une petite $\mathbf{V}$-catégorie.

b°) On suppose que $F_\zeta : \mathbf{A}_\zeta \to \mathbf{B}$ est défini. Soient $\underline{\mathbf{J}}$ un élément de $\mathcal{J}$ (resp. de $\mathcal{I}$) et ϕ un foncteur de $\underline{\mathbf{J}}$ dans $\underline{\mathbf{B}}$. Si la transformation naturelle $\mu(\phi)$ (resp. $\partial(\phi)$) est définie, on désigne par M_ϕ (resp. par N_ϕ) l'ensemble des flèches de $\underline{\mathbf{B}}$ qui définissent cette transformation naturelle. Si $\mu(\phi)$ (resp. $\partial(\phi)$) n'est pas défini, M_ϕ (resp. N_ϕ) désignera l'ensemble vide. Soit M^ζ (resp. N^ζ) l'ensemble réunion des ensembles M_ϕ (resp. N_ϕ), quand ϕ parcourt l'ensemble des foncteurs ayant $\underline{\mathbf{B}}$ pour but, ayant leur source dans $\mathcal{J}$ (resp. $\mathcal{I}$) et leur image contenue dans celle de $\underline{F}_\zeta$. On pose $\bar{\mathbf{A}}^\zeta = M^\zeta \cup N^\zeta$. On peut appliquer le corollaire 2 du théorème I.1 : par définition, $F_{\zeta+1} : \mathbf{A}_{\zeta+1} \to \mathbf{B}$ est un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur de $\hat{Y}$ engendré par F_ζ et par l'ensemble $\bar{\mathbf{A}}^\zeta$.

c°) On suppose que ζ'' est un ordinal limite, que $F_\zeta : \mathbf{A}_\zeta \to \mathbf{B}$ est défini pour tout ordinal $\zeta < \zeta''$, que $\mathbf{A}_\zeta$ est une petite **V**-catégorie; on suppose aussi que, pour tout $\zeta' \leqslant \zeta < \zeta''$, on a une relation de la forme

$$(1) \quad F_\zeta . F_{(\zeta, \zeta')} = F_{\zeta'} .$$

Alors $F_{(\zeta, \zeta')}$ est un petit **V**-foncteur. D'après la proposition I.2, le foncteur $\psi^{\zeta''}$ de $\underline{\zeta}''$ dans **V**-*cat*, qui à (ζ, ζ') associe $F_{(\zeta, \zeta')}$, admet une limite inductive $\mathbf{A}_{\zeta''}$; les co-projections correspondantes sont notées $F_{(\zeta'', \zeta)}$. Comme le foncteur inclusion de $\underline{\mathbf{V}}$ dans $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ est à $\{\underline{\zeta}''\}$-limites inductives, $\mathbf{A}_{\zeta''}$ est aussi une limite dans $\hat{\mathbf{V}}$-*Cat*; par suite, il existe un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur bien déterminé $F_{\zeta''} : \mathbf{A}_{\zeta''} \to \mathbf{B}$ vérifiant:

$$F_{\zeta''} . F_{(\zeta'', \zeta)} = F_\zeta , \quad \text{pour tout} \quad \zeta < \zeta'' .$$

d°) Il reste à montrer que la **V**-catégorie **A** cherchée est isomorphe à $\mathbf{A}_\xi$. Il faut vérifier que $\bar{\mathbf{A}}_\xi$ est contenu dans l'image de $\underline{F}_\xi$. Soient $\underline{\mathbf{J}}$ une catégorie de $\mathcal{J}$ et ϕ un foncteur de $\underline{\mathbf{J}}$ vers $\underline{\mathbf{B}}$ dont l'image est contenue dans l'image de $\underline{F}_\xi$. Le foncteur de base est compatible avec les $\{\underline{\xi}\}$-limites inductives; la proposition I.2 nous indique que $\underline{\mathbf{A}}_\xi$ est une limite du foncteur $\mathcal{P}_{\hat{\mathbf{V}}} . \psi^\xi$. De plus, le foncteur de base est compatible avec les monomorphismes. Ainsi

$$\underline{\mathbf{A}}_\xi = \bigcup_{\zeta < \xi} \underline{F}_{(\xi, \zeta)}(\underline{\mathbf{A}}_\zeta).$$

Pour toute flèche $j : J \to J'$ de $\underline{\mathbf{J}}$, il existe un ordinal $\zeta(j)$ et une flèche $a(j)$ de $\underline{\mathbf{A}}_{\zeta(j)}$ vérifiant: $\phi(j) = F_{\zeta(j)}(a(j))$. La borne supérieure ζ de la famille $(\zeta(j))_{j \in \underline{\mathbf{J}}}$ est strictement inférieure à ξ, puisque ξ est un ordinal régulier et est strictement supérieur à $\|\underline{\mathbf{J}}\|$. Comme les foncteurs $\underline{F}_{\zeta'}$ sont injectifs, il existe un foncteur ϕ' de $\underline{\mathbf{J}}$ dans $\underline{\mathbf{A}}_\zeta$ vérifiant: $\phi'(j) = \underline{F}_{(\zeta, \zeta(j))}(a(j))$. On en déduit: $\phi = \underline{F}_\zeta . \phi'$. On pose $\phi'' = \underline{F}_{(\zeta+1, \zeta)} . \phi'$. L'image de $\underline{F}_{\zeta+1}$ contient tous les éléments définissant la transformation naturelle $\mu(\phi)$. Comme $\underline{F}_{\zeta+1}$ est injectif, il existe une transformation naturelle $\mu''(\phi'')$ unique, de but ϕ'' de source un foncteur constant, vérifiant $\mu(\phi) = \underline{F}_{\zeta+1} . \mu''(\phi'')$. On posera

$$\bar{\mu}(\bar{\phi}) = \underline{F}_{(\xi, \zeta+1)} . \mu''(\phi''), \quad \text{avec} \quad \bar{\phi} = \underline{F}_{(\xi, \zeta)} . \phi'.$$

Ainsi, pour tout foncteur $\bar{\phi}$ de $\underline{\mathbf{J}}$ vers $\underline{\mathbf{A}}_\xi$, tel que $\mu(\underline{F}_\xi . \bar{\phi})$ est défini, il existe une unique transformation naturelle $\bar{\mu}(\bar{\Phi})$ de but $\bar{\Phi}$ de source un foncteur constant et vérifiant : $\underline{F}_\xi . \bar{\mu}(\bar{\Phi}) = \mu(\underline{F}_\xi . \bar{\Phi})$. On définit de manière analogue une application partielle $\mathcal{J}$-cône inductive ∂; la transformation naturelle $\bar{\partial}(\bar{\Phi})$ est définie ssi $\partial(\underline{F}_\xi . \bar{\Phi})$ l'est et

$$\partial(\underline{F}_\xi . \bar{\Phi}) = \underline{F}_\xi . \bar{\partial}(\bar{\Phi}).$$

Posons

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\xi, \quad F = F_\xi \quad \text{et} \quad \bar{U} = (\mathbf{A}, \bar{\mu}, \bar{\Phi}).$$

Le triplet $u = (U, F, \bar{U})$ appartient à $\hat{Z}'$ et $\mathbf{A}$ est une petite $\mathbf{V}$-catégorie.

Considérons un autre élément $(U, F', \bar{U}')$ de $\hat{Z}'$, où $\bar{U}' = (\mathbf{A}', \bar{\mu}', \bar{\partial}')$. On veut prouver que la relation $F'.G' = G$ assure que: $F'.G'' = F$.

a°) Comme F_1 est engendré par G, il existe G_1 tel que : $F'.G_1 = F_1$.

b°) Supposons que nous ayons la relation :

$$F'.G_\zeta = F_\zeta \quad (2).$$

Soient $\underline{\mathbf{J}}$ un élément de $\mathcal{J}$ (resp. $\mathcal{I}$) et Φ un foncteur de $\underline{\mathbf{J}}$ dans $\underline{\mathbf{B}}$; si l'image de Φ est contenue dans $\underline{\mathbf{A}}_\zeta$, l'image de $\underline{F}'$ contient l'ensemble M^ζ (resp. N^ζ), car $(U, F', \bar{U})$ appartient à $\hat{Z}'$. Par suite, M^ζ (resp. N^ζ) ainsi que l'ensemble $\bar{\mathbf{A}}^\zeta$ appartiennent à l'image de $\underline{F}'$. Par définition de $F_{\zeta+1}$ il existe un élément $G_{\zeta+1}$ forcément unique vérifiant:

$$F'.G_{\zeta+1} = F_{\zeta+1}.$$

Comme F' est un monomorphisme, on a la relation $G_{\zeta+1}.F_{(\zeta+1,\zeta)} = G_\zeta$.

c°) On suppose que ζ'' est un ordinal limite et que, pour tout $\zeta < \zeta''$, l'on a la relation (2). On déduit de la régularité à gauche de F' que:

$$G_\zeta . F_{(\zeta,\zeta')} = G_{\zeta'}, \quad \text{pour tout} \quad \zeta' < \zeta.$$

La famille $(G_\zeta)_{\zeta < \zeta''}$ définit une transformation naturelle de source $\psi^{\zeta''}$ et de but un foncteur constant sur $\mathbf{A}'$. Soit $G_{\zeta''}$ son co-crochet; on a $F'.G_{\zeta''} = F_{\zeta''}$, puisque $F_{\zeta''}$ est aussi défini comme un co-crochet.

En particulier, si $\zeta'' = \xi$, l'on a : $F'.G_\xi = F_\xi$. Ceci achève la démonstration. ■

On suppose que tout couple de flèches de $\underline{\mathbf{V}}$ admet un noyau appartenant à $\hat{X}$. D'après la proposition 2.3 tout couple de flèches admet dans Co' un noyau appartenant à $\hat{Z}'$:

COROLLAIRE. *Avec les hypothèses de la proposition 2.4, supposons que* $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ *est à limites projectives :*

- Le foncteur $\mathcal{C}'$ *est à quasi-surjections,*

- La catégorie Co'' *est à* Co'*-projections.*

- La catégorie Co' *est à petites limites inductives.*

- Le foncteur d'oubli de Co' *dans* $\mathbf{E}$*, qui à une flèche associe son application sous-jacente, est un foncteur à quasi-surjections.*

PREUVE. Le foncteur $\mathcal{C}'$ est compatible avec les noyaux. Les propositions 2.2, 2.3 et 2.4 permettent d'appliquer le théorème d'existence des structures libres [S.E.S.L]. ■

Un problème plus intéressant est de savoir sous quelles conditions le foncteur $\hat{\mathfrak{L}}'$ est $(Q, \hat{Z}. Lim'_0)$-engendrant; en d'autres termes, étant donnée une $\hat{\mathbf{V}}$-catégorie $\mathbf{B}$ munie d'une application partielle $\mathcal{J}$-limite projective $\ulcorner\mathcal{I}$-limite inductive$\urcorner$, on veut montrer qu'une petite «$\hat{Y}$-sous-catégorie de $\mathbf{B}$» engendre une petite «$\hat{Y}$-sous-catégorie de $\mathbf{B}$», stable pour l'application $\mathcal{J}$-limite projective $\ulcorner\mathcal{I}$-limite inductive$\urcorner$ de $\mathbf{B}$.

THEOREME 2.1. *Avec les hypothèses de la proposition 2.4, supposons que* $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ *est à* $(\mathcal{J} \cup \mathcal{I})$*-limites projectives. Si dans* $\underline{\mathbf{V}}$ *les* $\{\underline{\xi}\}$*-limites inductives commutent avec les* $(\mathcal{J} \cup \mathcal{I})$*-limites projectives, le foncteur* $\hat{\mathfrak{L}}'$ *est* $(Q, \hat{Z}. Lim'_0)$*-engendrant et le foncteur* $\hat{\mathfrak{L}}$ *est* $(Q, \hat{Z}. Lim_0)$*-engendrant.*

PREUVE. On se donne un élément $U = (\mathbf{B}, \mu, \partial)$ de Lim'_0 et un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur G de but $\mathbf{B}$, de source une petite $\mathbf{V}$-catégorie. On cherche un élément $(U, F, \bar{U})$ de $\hat{Z}$ engendré par G, où $\bar{U} = (\mathbf{A}, \bar{\mu}, \bar{\partial})$ appartient à Lim'_0. On détermine F par récurrence. On définit deux familles $(F_\zeta)_{\zeta \leq \xi}$ et $(F'_\zeta)_{\zeta \leq \xi}$ d'éléments de $\hat{Y}$, où F_ζ et F'_ζ sont tous des $\hat{\mathbf{V}}$-foncteurs de but $\mathbf{B}$ et de sources respectives de petites $\mathbf{V}$-catégories $\mathbf{A}_\zeta$ et $\mathbf{A}'_\zeta$.

a°) Les conditions du théorème I.1 sont réalisées et il existe un élément $F'_1 : \mathbf{A}'_1 \to \mathbf{B}$ de $\hat{Y}$ engendré par G. De plus, $\mathbf{A}'_1$ est une petite $\mathbf{V}$-catégorie.

b°) On suppose que $F'_\zeta : \mathbf{A}'_\zeta \to \mathbf{B}$ est défini, pour $\zeta < \xi$. Pour simplifier les notations, on identifie les objets de $\underline{\mathbf{A}}'_\zeta$ à des objets de $\underline{\mathbf{B}}$ et on désigne par (A', A) un couple d'objets de $\underline{\mathbf{A}}'_\zeta$. On considère l'ensemble $D_\zeta(A)$ (resp. $E_\zeta(A')$) des foncteurs ϕ vérifiant :

- La source de ϕ appartient à $\mathcal{J}$ (resp. $\mathcal{I}$), le but de ϕ est $\underline{\mathbf{B}}$,
- l'image de ϕ est contenue dans celle de $\underline{F}'_\zeta$,
- $\mu(\phi)$ (resp. $\partial(\phi)$) est défini et les éléments définissant cette limite naturalisée appartiennent à l'image de $\underline{F}'_\zeta$,
- A (resp. A') est le sommet du cône $\mu(\phi)$ (resp. $\partial(\phi)$).

Puisque $\mathcal{J}$ (resp. $\mathcal{I}$) est un petit ensemble et que $\underline{\mathbf{A}}'_\zeta$ est une petite catégorie, l'ensemble $D_\zeta(A)$ (resp. $E_\zeta(A')$) est petit. Soient ϕ un foncteur de cet ensemble et A'' un objet de $\underline{\mathbf{A}}'_\zeta$. Le $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur F'_ζ définit une transformation naturelle, où ϕ_ζ est la restriction de ϕ à $\underline{\mathbf{A}}'_\zeta$:

$$t(\phi, A'', \zeta) : \mathbf{A}'_\zeta(-, A'').\phi_\zeta \Longrightarrow \mathbf{B}(-, A'').\underline{F}'_\zeta.\phi_\zeta$$

$$(\text{resp. } s(\phi, A'', \zeta) : \mathbf{A}'_\zeta(A'', -).\phi^*_\zeta \Longrightarrow \mathbf{B}(A'', -).\underline{F}'_\zeta.\phi^*_\zeta).$$

Soit $\bar{t}(\phi, A'', \zeta)$ (resp. $\bar{s}(\phi, A'', \zeta)$) le produit de cette transformation naturelle par une limite projective naturalisée $\hat{t}(\phi, A'', \zeta)$ (resp. $\hat{s}(\phi, A'', \zeta)$) du foncteur $\mathbf{A}'_\zeta(-, A'').\phi_\zeta$ (resp. $\mathbf{A}'_\zeta(A'', -).\phi^*_\zeta$); une telle limite existe par hypothèse.

La transformation naturelle $\mathbf{B}(-, A'').\mu(\phi)$ (resp. $\mathbf{B}(A'', -).\partial(\phi)^*$) est, par définition de U, une limite projective naturalisée dans $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$.

On notera :

$$v(\phi, A'', \zeta) : V(\phi, A'', \zeta) \longrightarrow \mathbf{B}(A, A'')$$

$$(\text{resp. } w(\phi, A'', \zeta) : W(\phi, A'', \zeta) \longrightarrow \mathbf{B}(A'', A'))$$

le crochet correspondant de $\bar{t}(\phi, A'', \zeta)$ (resp. $\bar{s}(\phi, A'', \zeta)$). La famille $(V(\phi, A'', \zeta))$, où ϕ parcourt $D_\zeta(A)$ (resp. $(W(\phi, A'', \zeta))$, où ϕ parcourt $E_\zeta(A)$), admet une somme $V(A'', \zeta)$ (resp. $W(A'', \zeta)$). On notera

$$v(A'', \zeta) : V(A'', \zeta) \longrightarrow \mathbf{B}(A, A'')$$

$$(\text{resp. } w(A'', \zeta) : W(A'', \zeta) \longrightarrow \mathbf{B}(A'', A'))$$

le co-crochet de la famille $(v(\phi, A'', \zeta))$ (resp. $(w(\phi, A'', \zeta))$), si $D_\zeta(A)$ (resp. $E_\zeta(A')$) est différent du vide; dans le cas inverse $v(A'',$

$\zeta)$ (resp. $w(A'', \zeta)$) désigne l'unique flèche de but $\mathbf{B}(A, A'')$ (resp. $\mathbf{B}(A'', A')$) de source un objet initial de $\underline{\mathbf{V}}$ noté $V(A'', \zeta)$ (resp. $W(A'', \zeta)$). On considère une somme $S(A, A', \zeta)$ de $(\mathbf{A}'_\zeta(A, A'), V(A', \zeta), W(A, \zeta))$; le co-crochet correspondant du triplet $(F'_\zeta(A, A'), v(A', \zeta), w(A, \zeta))$ est désigné par $G^\zeta(A, A')$. Par définition, F_ζ est engendré par la famille $(G^\zeta(A, A'))$ où A et A' parcourent l'ensemble des objets de $\mathbf{A}'_\zeta$.

c°) On suppose que $F_\zeta : \mathbf{A}_\zeta \to \mathbf{B}$ est défini, avec $\zeta < \xi$. Nous définissons $F'_{\zeta+1}$ à partir de F_ζ de la même manière que $F_{\zeta+1}$ a été défini à partir de F_ζ dans la proposition 2.4 : M_ϕ (resp. N_ϕ) désigne l'ensemble des flèches de $\mathbf{B}$ définissant, quand elle existe, la transformation naturelle $\mu(\phi)$ (resp. $\partial(\phi)$). L'ensemble réunion des ensembles M_ϕ (resp. N_ϕ), quand ϕ parcourt l'ensemble des foncteurs ayant $\underline{\mathbf{B}}$ pour but, ayant leur source dans $\mathcal{J}$ (resp. $\mathcal{I}$) et leur image contenue dans celle de $\underline{F}_\zeta$, est noté M^ζ (resp. N^ζ). On pose : $\bar{\mathbf{A}}^\zeta = M^\zeta \cup N^\zeta$. Par définition, $F'_{\zeta+1} : \mathbf{A}'_{\zeta+1} \to \mathbf{B}$ est un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur de $\hat{Y}$ engendré par F_ζ et l'ensemble $\bar{\mathbf{A}}^\zeta$. Remarquons que $\mathbf{A}'_{\zeta+1}$ est une petite $\mathbf{V}$-catégorie, car $\mathbf{A}_\zeta$ en est une et que $\bar{\mathbf{A}}^\zeta$ est un petit ensemble.

d°) On suppose que ζ'' est un ordinal limite et que $F'_\zeta : \mathbf{A}' \to \mathbf{B}$ est défini, pour tout ordinal $\zeta < \zeta''$; on suppose aussi que $\mathbf{A}'_\zeta$ est une petite $\mathbf{V}$-catégorie et que, pour tout ordinal $\zeta' < \zeta < \zeta''$, on a une relation de la forme :

$$(1) \qquad F'_\zeta . F'_{(\zeta, \zeta')} = F'_{\zeta'}.$$

$F'_{(\zeta, \zeta')}$ est un petit $\mathbf{V}$-foncteur. Soit $\psi'^{\zeta''}$ le foncteur de $\underline{\zeta}''$ dans $\mathbf{V}$-*cat*, qui à (ζ, ζ') associe $F'_{(\zeta, \zeta')}$. Ce foncteur admet une limite inductive $\mathbf{A}'_{\zeta''}$; les co-projections correspondantes sont notées $F'_{(\zeta'', \zeta)}$. Comme le foncteur inclusion de $\underline{\mathbf{V}}$ dans $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ est à $\{\underline{\zeta}''\}$-limites inductives, il existe un $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur bien déterminé $F'_{\zeta''} : \mathbf{A}'_{\zeta''} \to \mathbf{B}$ vérifiant :

$$F'_{\zeta''} . F'_{(\zeta'', \zeta)} = F'_\zeta, \text{ pour tout } \zeta < \zeta''.$$

e°) Il reste à montrer que le $\hat{\mathbf{V}}$-foncteur cherché F' est égal à F'_ξ et à F_ξ. On montre comme dans la proposition 2.4 que $\mathbf{A}_\xi$ est stable pour les applications $\mathcal{J}$-cône projectif μ et $\mathcal{I}$-cône inductif ∂ : désignons par

ϕ un foncteur de source $\underline{\mathbf{J}} \in \mathcal{J}$ (resp. $\in \mathcal{I}$), de but $\mathbf{B}$, d'image contenue dans l'image de $\underline{F}'_\xi$. On a les relations :

$$\underline{\mathbf{A}}'_\xi = \bigcup_{\zeta < \xi} \underline{F}'_{(\xi,\,\zeta)}(\underline{\mathbf{A}}'_\zeta) \quad \text{et} \quad \phi(j) = \underline{F}_{\zeta(j)}(a(j)),$$

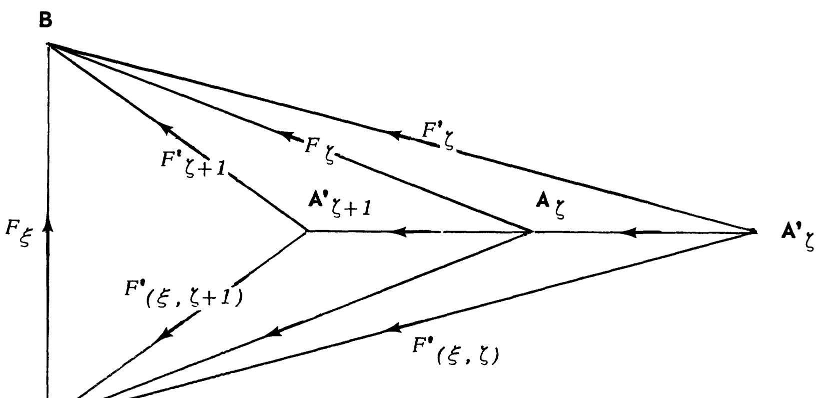
pour toute flèche j de $\underline{\mathbf{J}}$, avec $\zeta(j) < \xi$, où $a(j)$ appartient à $\underline{\mathbf{A}}_{\zeta(j)}$. La borne supérieure ζ de la famille $(\zeta(j))_{j \in \underline{\mathbf{J}}}$ est strictement inférieure à ξ, car ξ est régulier et est strictement supérieur à $\|\underline{\mathbf{J}}\|$. Par suite, il existe un foncteur ϕ' de $\underline{\mathbf{J}}$ dans $\underline{\mathbf{A}}_\zeta$ tel que $\phi = \underline{F}'_\zeta . \phi'$. On pose $\phi'' = \underline{F}'_{(\zeta+1,\,\zeta)} . \phi'$. Tous les éléments définissant la transformation naturelle $\mu(\phi)$ (resp. $\partial(\phi)$) appartiennent à l'image de $\underline{F}'_{\zeta+1}$. L'injectivité de $\underline{F}'_{\zeta+1}$ assure l'existence d'une transformation naturelle $\mu''(\phi'')$ de but ϕ'', de source un foncteur constant et vérifiant $\mu(\phi) = \underline{F}'_{\zeta+1} . \mu''(\phi'')$ (resp. $\partial''(\phi'')$ de source ϕ'', de but un foncteur constant et vérifiant $\partial(\phi) = \underline{F}'_{\zeta+1} . \partial''(\phi'')$). On pose

$$\bar{\mu}(\bar{\phi}) = \underline{F}'_{(\xi,\,\zeta+1)} . \mu''(\phi'') \quad (\text{resp. } \bar{\partial}(\bar{\phi}) = \underline{F}'_{(\xi,\,\zeta+1)} . \partial''(\phi'')),$$

avec $\bar{\phi} = \underline{F}'_{(\xi,\,\zeta)} . \phi'$.

Remarquons que la relation $\mathbf{A}_\zeta = \mathbf{A}'_\zeta$ entraîne la relation $\mathbf{A}_\zeta = \mathbf{A}'_{\zeta+1}$, c'est-à-dire assure la stabilisation de la construction.

Il faut maintenant prouver que $\bar{\mu}(\bar{\phi})$ (resp. $\bar{\partial}(\bar{\phi})$) est une limite projective (resp. inductive) naturalisée dans $\mathbf{A}'_\xi$.

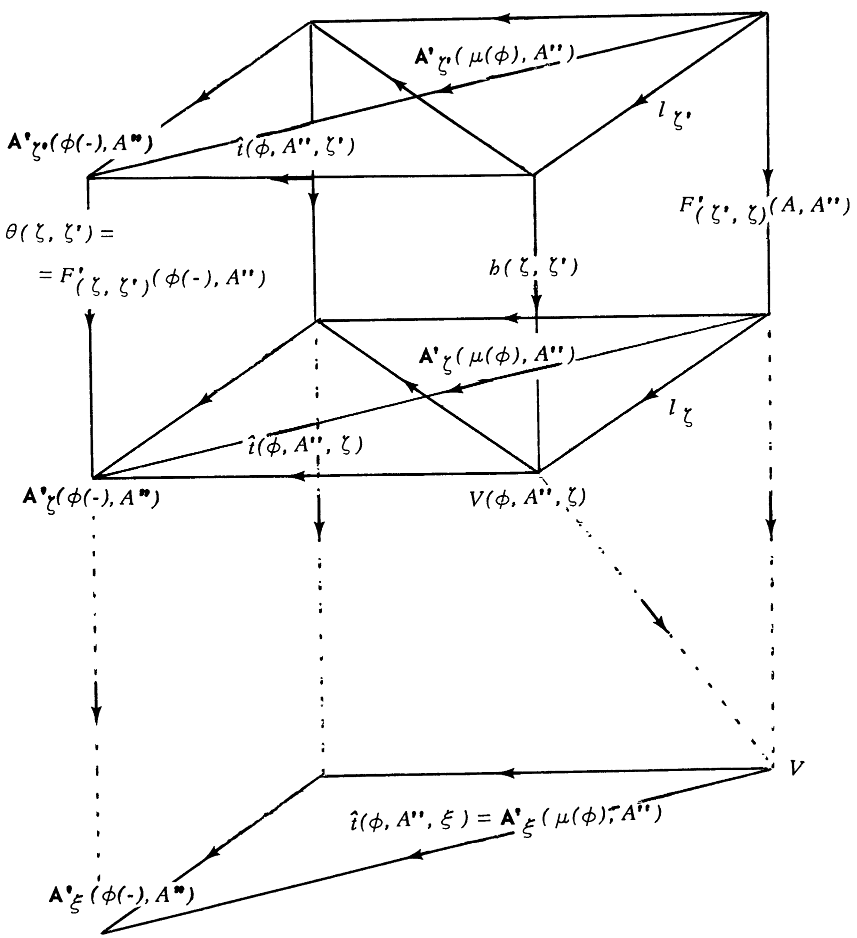


Cas de $\overline{\mu}(\overline{\Phi})$. On se donne une unité A'' de $\mathbf{A}'_\xi$ (unité identifiée à une unité de $\mathbf{B}$) et un foncteur ϕ de source appartenant à $\mathcal{J}$, de but $\underline{\mathbf{B}}$ et d'image contenue dans celle de $\underline{F}'_\xi$. D'après la première partie de ce paragraphe, il existe un ordinal $\tilde{\zeta} < \xi$ tel que :

- A'' est unité de $\mathbf{A}'_{\tilde{\zeta}}$,
- l'image de ϕ est contenue dans celle de $\underline{F}'_{\tilde{\zeta}}$.

On désigne par $/\underline{\xi}/$ la sous-catégorie de $\underline{\xi}$ ayant pour flèches les (ζ, ζ') telles que $\tilde{\zeta} \leqslant \zeta'$. A une telle flèche correspond une transformation naturelle

$$\theta(\zeta, \zeta') = F'_{(\zeta, \zeta')}(\phi(-), A''): \mathbf{A}'_{\zeta'}(\phi(-), A'') \Rightarrow \mathbf{A}'_{\zeta}(\phi(-), A'').$$



Le foncteur $\mathbf{A}'_\xi(\phi(-), A'')$ est aussi une limite inductive du foncteur de source $/\underline{\xi}/$, qui à (ζ, ζ') associe $\theta(\zeta, \zeta')$. Si (ζ, ζ') appartient à $/\underline{\xi}/$, notons $h(\zeta, \zeta')$ le crochet par rapport à la limite projective naturalisée $\hat{t}(\phi, A'', \zeta)$ de la transformation naturelle : $\theta(\zeta, \zeta').\hat{t}(\phi, A'', \zeta')$. Les $h(\zeta, \zeta')$ déterminent un foncteur ε de $/\underline{\xi}/$ dans $\underline{\mathbf{V}}$, qui admet une limite inductive V. Il existe une transformation naturelle $\hat{t}(\phi, A'', \xi)$ limite inductive des transformations naturelles $\hat{t}(\phi, A'', \zeta)$ (relativement aux $\theta(\zeta, \zeta')$ et aux $h(\zeta, \zeta')$), ayant pour but $\mathbf{A}'_\xi(\phi(-), A'')$ et pour source un foncteur constant sur V. Par hypothèse, $\hat{t}(\phi, A'', \xi)$ est aussi une limite projective naturalisée dans $\underline{\mathbf{V}}$. On se propose de montrer que la transformation naturelle $\mathbf{A}'_\xi(\mu(\phi), A'')$ lui est égale à un isomorphisme près.

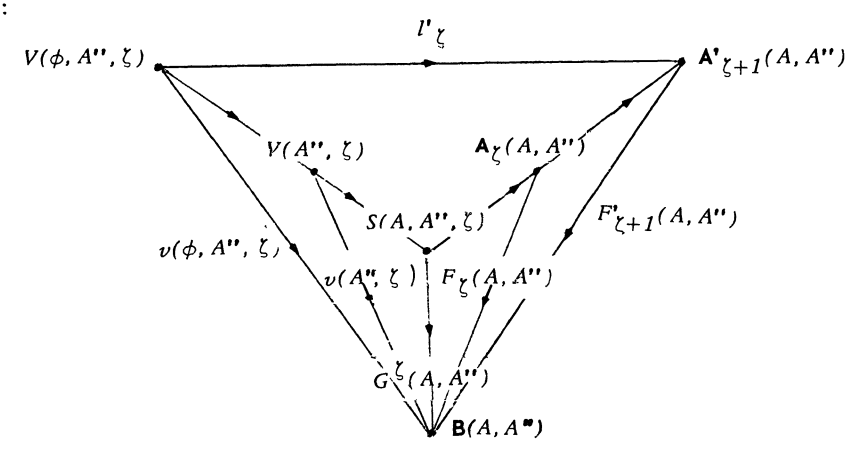
On note A le sommet du cône projectif $\mu(\phi)$ et ε' le foncteur de $/\underline{\xi}/$ dans $\underline{\mathbf{V}}$ qui associe $F'_{(\zeta, \zeta')}(A, A'')$ à (ζ, ζ'). L'objet $\mathbf{A}'_\xi(A, A'')$ est une limite inductive de ce foncteur. Si $\tilde{\zeta} \leqslant \zeta$, désignons par l_ζ le crochet de la transformation naturelle $\mathbf{A}'_\zeta(\mu(\phi), A'')$ relativement à $\hat{t}(\phi, A'', \zeta)$. On a la relation :

$$h(\zeta, \zeta').l_{\zeta'} = l_\zeta . F'_{(\zeta, \zeta')}(A, A''), \quad \text{si } \tilde{\zeta} \leqslant \zeta' .$$

La famille $(l_\zeta)_{\tilde{\zeta} \leqslant \zeta < \xi}$ définit une transformation naturelle de ε' vers ε, qui admet une limite inductive :

$$l_\xi : \mathbf{A}'_\xi(A, A'') \longrightarrow V.$$

Par construction, il existe un morphisme l'_ζ défini comme composé de :



La famille $(F'_{\zeta+1}(A, A''). l'_{\zeta})_{\tilde{\zeta} \leqslant \zeta < \xi}$ définit une transformation naturelle de source ε et de but un foncteur constant sur $\mathbf{A}'_{\xi}(A, A'')$. En effet , on a la relation :

$$F'_{(\zeta+2,\, \zeta+1)}(A, A''). l'_{\zeta} = l'_{\zeta+1} \cdot h_{(\zeta+1,\, \zeta)}.$$

On désigne par $l'_{\xi} : V \to \mathbf{A}'_{\xi}(A, A'')$ le co-crochet de la transformation naturelle ci-dessus; $\hat{t}(\phi, A'', \zeta+1)$ est une limite naturalisée, donc

$$l_{\zeta+1} \cdot l'_{\zeta} = h(\zeta+1, \zeta)$$

et par suite $l_{\xi} \cdot l'_{\xi} = V$. Par construction, l'on a :

$$l'_{\zeta} \cdot l_{\zeta} = F'_{(\zeta+1,\, \zeta)}(A, A''), \quad \text{c'est-à-dire} \quad l'_{\xi} \cdot l_{\xi} = \mathbf{A}'_{\xi}(A, A'').$$

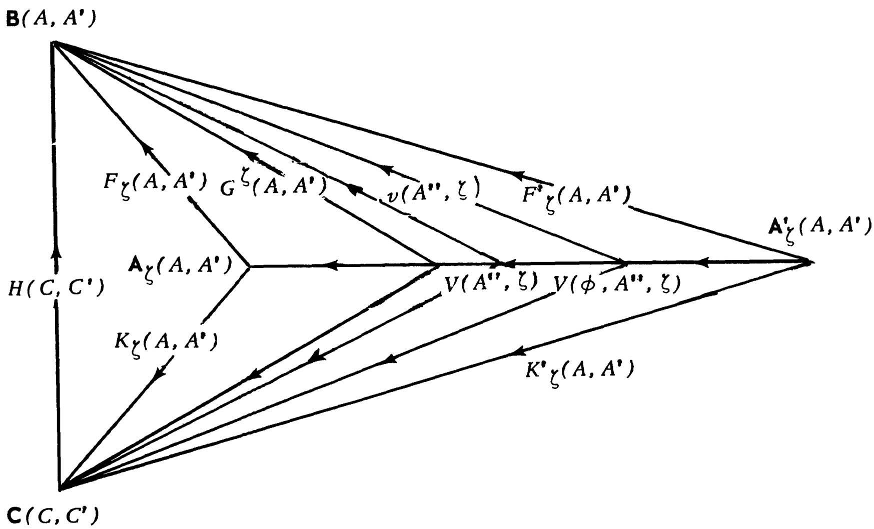
Ainsi l'_{ξ} est l'inverse de l_{ξ}, $\mathbf{A}'_{\xi}(\bar{\mu}(\bar{\phi}), A'')$ est une limite projective naturalisée dans $\underline{\mathbf{V}}$ et $\bar{\mu}(\bar{\phi})$ est une limite projective naturalisée dans $\mathbf{A}'_{\xi}$ et a fortiori dans $\mathbf{A}_{\xi}$.

$$\begin{tikzcd}
V(\phi, A'', \zeta) \arrow[d, "h(\zeta+1,\zeta)"'] \arrow[dr, "l'_{\zeta}"] & \mathbf{A}'_{\zeta}(A, A'') \arrow[l, "l_{\zeta}"'] \arrow[d, "F'_{(\zeta+1,\,\zeta)}(A, A'')"] \\
V(\phi, A'', \zeta+1) \arrow[dr, "l'_{\zeta+1}"] & \mathbf{A}'_{\zeta+1}(A, A'') \arrow[l, "l_{\zeta+1}"'] \arrow[d, "F'_{(\zeta+2,\,\zeta+1)}(A, A'')"] \\
 & \mathbf{A}'_{\zeta+2}(A, A'')
\end{tikzcd}$$

En considérant les foncteurs co-représentables, on montre de même que $\bar{\partial}(\bar{\phi})$ (qui est la transformation naturelle $\partial(\phi)$ restreinte à $\mathbf{A}_{\xi}$) est une limite inductive dans $\mathbf{A}_{\xi}$. On a donc construit un élément $u = (U, F, \bar{U})$ de $\hat{Lim}'$, où $F = F_{\xi}$ et $\bar{U} = (\mathbf{A}_{\xi}, \bar{\mu}, \bar{\partial})$ appartient à $\mathcal{L}'_{0}$; ainsi $\mathbf{A}_{\xi}$ est une $\hat{\mathbf{V}}$-sous-catégorie de $\mathbf{B}$ stable pour les $\mathcal{J}$-limites projectives (resp. les $\mathcal{J}$-limites inductives). Remarquons que, si μ et ∂ sont partout définies (i.e. $U \in \hat{Lim}_0$), il en est de même de $\bar{\mu}$ et $\bar{\partial}$, donc $\bar{U} \in Lim_0$. Il faut encore montrer que $\mathbf{A}_\xi$ est la «plus petite» $\hat{\mathbf{V}}$-sous-catégorie de $\mathbf{B}$ ayant la propriété ci-dessus. Soit $\tilde{u} = (U, H, \tilde{U})$ un élément de $\hat{Z}'$, où $\tilde{U} = (\mathbf{C}, \tilde{\mu}, \tilde{\partial})$ appartient à Lim'_0. On veut montrer que la relation $H.K' = G$, où K' est un $\mathbf{V}$-foncteur de but $\mathbf{C}$, assure l'existence d'un $\mathbf{V}$-foncteur $K: \mathbf{A}_\xi \to \mathbf{C}$ tel que $H.K = F$.

a°) Comme F'_1 est engendré par G, il existe un $\mathbf{V}$-foncteur $K'_1: \mathbf{A}_1 \to \mathbf{C}$ tel que $H.K'_1 = F'_1$.

b°) On suppose que l'on a un $\mathbf{V}$-foncteur $K'_\zeta: \mathbf{A}'_\zeta \to \mathbf{C}$ tel que $H.K'_\zeta = F'_\zeta$, avec $\zeta < \xi$. On considère trois unités A, A', A'' de $\mathbf{A}'_\zeta$ et leurs images C, C', C'' par $\underline{K}'_\zeta$. On suppose que l'on a un élément ϕ de $D_\zeta(A)$ (resp. (resp. de $E_\zeta(A')$). Comme $\tilde{u}$ appartient à $\hat{Z}$ (i.e. $\mathbf{C}$ est stable pour les limites), la $\mathbf{V}$-limite naturalisée $\tilde{\mu}(\underline{K}'_\zeta . \phi_\zeta)$ (resp. $\tilde{\partial}(\underline{K}'_\zeta . \phi_\zeta)$) est définie et par suite, le morphisme $v(\phi, A'', \zeta)$ (resp. $w(\phi, A'', \zeta)$) se factori-



se à travers $K'_\zeta(A, A'')$ (resp. à travers $K'_\zeta(A'', A')$). Il en est donc de même de $v(A'', \zeta)$ (resp. de $w(A'', \zeta)$) et de $G^\zeta(A, A')$, puisque leur source est une somme. La famille $(G^\zeta(A, A'))$ engendre F_ζ; il existe un unique $\mathbf{V}$-foncteur K_ζ tel que: $H.K_\zeta = F_\zeta$.

c°) D'après la proposition 2.4, il existe un unique $K'_{\zeta+1}$ vérifiant $H.K'_{\zeta+1} = F'_{\zeta+1}$.

d°) Soit ζ'' un ordinal limite. On suppose que $H.K'_{\zeta} = F'_{\zeta}$, pour tout $\zeta < \zeta''$. La relation (1) ci-dessus assure que

$$K'_{\zeta}.F'_{(\zeta,\,\zeta')} = F'_{\zeta'}, \text{ pour tout } \zeta' \leqslant \zeta < \zeta'' ;$$

en effet, H est un monomorphisme. Comme $\mathbf{A}'_{\zeta''}$ est une limite inductive, il existe un unique $\mathbf{V}$-foncteur $K'_{\zeta''}$ tel que :

$$K'_{\zeta''}.F'_{(\zeta'',\,\zeta)} = K'_{\zeta} \quad \text{pour tout } \zeta < \zeta''.$$

En particulier, il existe un unique $\mathbf{V}$-foncteur $K = K_{\xi}$ tel que $H.K = F$. Le théorème est ainsi entièrement démontré. ■

COROLLAIRE. *On suppose de plus que* $\hat{\underline{\mathbf{V}}}$ *est à limites projectives :*
a°) Les catégories Co', Lim' et Lim sont à petites limites inductives.
b°) Les foncteurs $\mathcal{C}'$, $\mathcal{L}'$ *et* $\mathcal{L}$ *sont à quasi-surjections et admettent des des adjoints.*
c°) La catégorie Co' est à Lim' -projections et la catégorie Lim' est à Lim - projections (i.e. les foncteurs inclusions admettent des adjoints).

PREUVE. C'est une conséquence du théorème d'existence de structures libres. ■

II.2. Construction d'une V-catégorie ($\mathcal{J}$, $\mathcal{I}$)-complétée.

A. Un adjoint du foncteur inclusion de Co" dans Co'.

Avec les notations précédentes, nous supposerons que le petit ordinal ξ est régulier et vérifie :

$$\sup_{\underline{\mathbf{J}} \in \mathcal{J} \cup \mathcal{I}} \|\underline{\mathbf{J}}\| < \xi < \sup_{E \in \mathbf{E}_0} \|E\|,$$

où $\|E\|$ est l'ordinal associé à l'ensemble E. Désignons encore par $\underline{\xi}$ la catégorie associée à ξ.

PROPOSITION 2.5. *Supposons que* $\underline{\mathbf{V}}$ *est à petites limites inductives et que le foncteur de base de* $\mathbf{V}$ *est compatible avec les* $\{\underline{\xi}\}$*-limites inductives. Le foncteur d'inclusion de Co" dans Co' admet un adjoint.*

PREUVE. Le corollaire du théorème I.3 nous indique que le foncteur d'oubli de la catégorie **V**-*cat* dans la catégorie **E**, qui à un **V**-foncteur associe son application sous-jacente, est un foncteur à structures quasi-quotients.

Considérons un objet $U = (\mathbf{A}, \mu, \partial)$ de Co'', c'est-à-dire une petite **V**-catégorie munie d'une relation $\mathcal{J}$-cône projectif et d'une relation $\mathcal{I}$-cône inductif. Nous allons définir par récurrence une famille de **V**-foncteurs petits $(F_{(\zeta', \zeta)})_{\zeta \leqslant \zeta' \leqslant \xi}$, où

$$F_{(\zeta', \zeta)} : \mathbf{A}_\zeta \to \mathbf{A}_{\zeta'}, \quad F_{(\zeta, \zeta)} = Id_{\mathbf{A}_\zeta} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}.$$

Supposons que $\mathbf{A}_\zeta$ est défini. Désignons par M_ζ (resp. N_ζ) le quotient de l'ensemble des foncteurs dont la source appartient à $\mathcal{J}$ (resp. à $\mathcal{I}$) et dont le but est $\mathbf{A}$, par la relation d'équivalence :

$$\phi_1 \simeq \phi_2 \Longleftrightarrow \underline{F}_{(\zeta, 1)} \cdot \phi_1 = \underline{F}_{(\zeta, 1)} \cdot \phi_2 .$$

Notons $\bar{\phi}$ la classe quotient de ϕ et $D_{\bar{\phi}}$ (resp. $E_{\bar{\phi}}$) l'ensemble, pour $\bar{\phi} \in M_\zeta$ (resp. $\bar{\phi} \in N_\zeta$) de tous les couples de la forme :

$$(\sigma_\zeta(J), \sigma'_\zeta(J)), \text{ où } \sigma_\zeta(J) = \underline{F}_{(\zeta, 1)}(\sigma(J)), \ \sigma'_\zeta(J) = \underline{F}_{(\zeta, 1)}(\sigma'(J)),$$

lorsque $(\sigma(J))$ définit une transformation naturelle appartenant à $\mu(\phi)$ (resp. à $\partial(\phi'))$ et que $\phi : \underline{\mathbf{J}} \to \underline{\mathbf{A}}$ et $\phi' : \underline{\mathbf{J}} \to \underline{\mathbf{A}}$ appartiennent à $\bar{\phi}$.

Posons $D_\zeta = \bigcup_{\bar{\phi} \in M_\zeta} D_{\bar{\phi}}$ et $E_\zeta = \bigcup_{\bar{\phi} \in N_\zeta} E_{\bar{\phi}}$. Le sous-ensemble $D_\zeta \cup E_\zeta$ de $\underline{\mathbf{A}}_\zeta \times \underline{\mathbf{A}}_\zeta$ détermine sur $\underline{\mathbf{A}}_\zeta$ une relation d'équivalence r_ζ. Désignons par $\mathbf{A}_{\zeta+1}$ une **V**-catégorie quasi-quotient de $\mathbf{A}_\zeta$ par r_ζ et par $F_{(\zeta+1, \zeta)}$ la quasi-surjection associée. Si $\zeta' \leqslant \zeta$ et si $F_{(\zeta, \zeta')}$ est défini, on posera :

$$F_{(\zeta+1, \zeta)} \cdot F_{(\zeta, \zeta')} = F_{(\zeta+1, \zeta')} .$$

D'après la proposition I.2, **V**-*cat* est à $\{\zeta''\}$-limites inductives, si ζ'' est un ordinal limite. Supposons que $F_{(\zeta, \zeta')}$ est déterminé, pour tout $\zeta' \leqslant \zeta < \zeta''$. Par définition, $\mathbf{A}_{\zeta''}$ sera une limite inductive du foncteur de source $\underline{\zeta}''$ de but **V**-*cat*, qui à (ζ, ζ') associe $F_{(\zeta, \zeta')}$; et $F_{(\zeta'', \zeta)}$ sera une co-projection correspondante.

Montrons que U détermine sur $\mathbf{A}_\xi$ une application $\mathcal{J}$-cône projective et une application $\mathcal{I}$-cône inductive. On désigne par $\underline{\mathbf{J}}$ une catégorie de $\mathcal{J}$ (resp. de $\mathcal{I}$) et par ψ un foncteur de $\underline{\mathbf{J}}$ vers $\underline{\mathbf{A}}_\xi$. S'il n'existe aucun foncteur $\phi : \underline{\mathbf{J}} \to \underline{\mathbf{A}}$ tel que $\psi = \underline{F}_{(\xi, 1)} \cdot \phi$ et tel que $\mu(\phi)$ (resp. $\partial(\phi)$) soit différent du vide, on posera $\bar{\mu}(\psi) = \emptyset$ (resp. $\bar{\partial}(\psi) = \emptyset$). Considérons le cas inverse et supposons que

$$\psi = \underline{F}_{(\xi, 1)} \cdot \phi_1 = \underline{F}_{(\xi, 1)} \cdot \phi_2 .$$

D'après la proposition I.2, le foncteur de **V**-*cat* dans *cat*, qui associe $\underline{\mathbf{A}}$ à $\mathbf{A}$, est compatible avec les $\{\underline{\xi}\}$-limites inductives. On en déduit que, pour tout élément j de $\underline{\mathbf{J}}$, il existe un ordinal $\zeta_j < \xi$ vérifiant :

$$\underline{F}_{(\zeta_j, 1)} \cdot \phi_1(j) = \underline{F}_{(\zeta_j, 1)} \cdot \phi_2(j).$$

Si ζ est la borne supérieure des ζ_j, pour j appartenant à $\underline{\mathbf{J}}$, on sait que $\zeta < \xi$ et que :

$$\underline{F}_{(\zeta, 1)} \cdot \phi_1 = \underline{F}_{(\zeta, 1)} \cdot \phi_2 .$$

D'après ce qui précède, si t_1 est un élément de $\mu(\phi_1)$ (resp. de $\partial(\phi_1)$) et t_2 un élément de $\mu(\phi_2)$ (resp. de $\partial(\phi_2)$), nous sommes assurés que :

$$\underline{F}_{(\zeta+1, 1)} \cdot t_1 = \underline{F}_{(\zeta+1, 1)} \cdot t_2 ,$$

donc que : $\underline{F}_{(\xi, 1)} \cdot t_1 = \underline{F}_{(\xi, 1)} \cdot t_2$. On posera :

$$\bar{\mu}(\psi) = \{ \underline{F}_{(\xi, 1)} \cdot t_1 \} \text{ (resp. } \bar{\partial}(\psi) = \{ \underline{F}_{(\xi, 1)} \cdot t_1 \});$$

$\bar{U} = (\mathbf{A}_\xi, \bar{\mu}, \bar{\partial})$ est un objet de Co' et $(\bar{U}, F_\xi, U)$ est une flèche de Co'. Montrons que $\bar{U}$ est une structure libre associée à U :

Considérons une flèche $(\bar{U}', G, U)$ de Co'', où $\bar{U}' = (\mathbf{B}, \bar{\mu}', \bar{\nu}')$ est un objet de Co'. Supposons que G s'écrive de manière unique sous la forme : $G_\zeta . F_{(\zeta, 1)} = G$. L'application sous-jacente à G_ζ est compatible avec la relation définie par $D_{\bar{\Phi}}$ (resp. $E_{\bar{\Phi}}$), car :

$$\underline{G}(\sigma(J)) = \underline{G}(\sigma'(J)) \Longrightarrow \underline{G}_\zeta(\sigma_\zeta(J)) = \underline{G}_\zeta(\sigma'_\zeta(J)).$$

Par suite, cette application est aussi compatible avec la relation définie par D_ζ (resp. E_ζ), donc aussi avec r_ζ. Ainsi G_ζ s'écrit de manière unique sous la forme : $G_\zeta = G_{\zeta+1} \cdot F_{(\zeta+1, \zeta)}$. Supposons que ζ'' est un ordinal limite et que G s'écrive, pour tout ordinal $\zeta < \zeta''$, d'une seule manière sous la forme : $G_\zeta . F_{(\zeta, 1)} = G$. On a donc une transformation naturelle définie par la famille $(G_\zeta)_{\zeta < \zeta''}$, de but un foncteur constant sur **B** et de source le foncteur déterminé par les $F_{(\zeta, \zeta')}$, où $\zeta' \leqslant \zeta < \zeta''$. Le **V**-foncteur $G_{\zeta''}$ sera le co-crochet de cette transformation naturelle. Le triplet $(\bar{U}', G_\xi, \bar{U})$ est bien une flèche de Co'':

$$\underline{G}_\xi . \bar{\mu}(\psi) = \underline{G} . \mu(\phi_1) = \bar{\mu}'(\underline{G} . \phi_1) = \bar{\mu}'(\underline{G}_\xi . \psi)$$

$$(\text{resp. } \underline{G}_\xi . \bar{\partial}(\psi) = \underline{G} . \partial(\phi_1) = \bar{\partial}'(\underline{G} . \phi_1) = \bar{\partial}'(\underline{G}_\xi . \psi)).$$

On a la relation :

$$(\bar{U}', G_\xi, \bar{U}).(\bar{U}, F_{(\xi, 1)}, U) = (\bar{U}', G, U),$$

et cette décomposition est unique. ∎

PROPOSITION 2.6. *Si* $\underline{\mathbf{V}}$ *est à* $\{\underline{\zeta}''\}$*-limites inductives, il en est de même de la catégorie* Co''*, où* ζ'' *est un ordinal limite.*

PREUVE. Soit $\theta : \underline{\mathbf{K}} \to Co''$ un foncteur, où $\underline{\mathbf{K}}$ est la catégorie $\underline{\zeta}''$ associée à un ordinal limite ζ''. Posons $\theta(k) = (U_{K'}, F_k, U_K)$, où $k : K \to K'$ et où $U_K = (\mathbf{A}_K, \mu_K, \partial_K)$. D'après la proposition I.2, le foncteur de $\underline{\mathbf{K}}$ dans **V**-*cat*, qui à k associe F_k, admet une limite inductive $\mathbf{A}$. Notons G_K les co-projections associées. Soit $\psi : \underline{\mathbf{J}} \to \underline{\mathbf{A}}$ un foncteur, où $\underline{\mathbf{J}} \in \mathcal{J}$ (resp. $\underline{\mathbf{J}} \in \mathcal{I}$), et D l'ensemble des foncteurs $\phi : \underline{\mathbf{J}} \to \underline{\mathbf{A}}_K$, pour K parcourant $\underline{\mathbf{K}}_0$, tels que : $\psi = \underline{G}_K . \phi$.

On posera

$$\mu(\psi) = \bigcup_{\phi \in D} \underline{G}_K(\mu_K(\phi)) \quad (\text{resp. } \partial(\psi) = \bigcup_{\phi \in D} \underline{G}_K(\partial_K(\phi))),$$

où par abus de notations $\underline{G}_K$ est considéré comme une relation qui associe à des transformations naturelles t_α les transformations naturelles $\underline{G}_K . t_\alpha$.

Si $U = (\mathbf{A}, \mu, \partial)$, il est clair que les triplets (U, G_K, U_K) sont des flèches de Co''. Supposons que l'on ait un objet $U' = (\mathbf{B}, \mu', \partial')$ de Co'' et une transformation naturelle de source θ, de but un foncteur constant sur U' et définie par la famille $((U', G'_K, U_K))_{K \in \underline{\mathbf{K}}_0}$. Il existe un unique **V**-foncteur $H : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tel que $H . G_K = G'_K$, pour tout K. Soit t un un élément de $\mu(\psi)$ (resp. de $\partial(\psi)$). Il existe un objet K de $\underline{\mathbf{K}}$, un foncteur $\phi : \underline{\mathbf{J}} \to \underline{\mathbf{A}}_K$ et une transformation naturelle t_K tels que:

$$\psi = \underline{G}_K . \phi, \; t = \underline{G}_K . t_K \; \text{ et } \; t_K \in \mu_K(\phi) \; (\text{resp. } t_K \in \partial_K(\phi)).$$

On a: $\underline{H} . t = \underline{H} . \underline{G}_K . t_K = \underline{G}'_K . t_K$, qui est un élément de $\mu'(\underline{G}'_K . \phi) = \mu'(\underline{H} . \psi)$ (resp. de $\partial'(\underline{G}'_K . \phi) = \nu'(\underline{H} . \psi)$). Donc le triplet (U', H, U) appartient à Co'' et la proposition s'en déduit. ■

COROLLAIRE 1. *Avec les hypothèses de la proposition 2.5, la catégorie* Co' *est à* $\{\underline{\zeta}''\}$*-limites inductives.*

PREUVE. En effet, le foncteur injection de Co' dans Co'' admet un adjoint. ■

COROLLAIRE 2. *Avec les hypothèses de proposition 2-5 le foncteur de* Co'' *dans* **V**-*cat, qui à* (U', F, U) *associe* F *est compatible avec les* $\{\underline{\xi}\}$*-limites inductives.*

PREUVE. En effet, le foncteur de **V**-*cat* dans *cat*, qui à $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ associe $\underline{F}: \underline{\mathbf{A}} \to \underline{\mathbf{B}}$, est compatible avec ces mêmes limites d'après la proposition I.2. ■

COROLLAIRE 3. *Toujours dans les mêmes conditions, la catégorie* Co' *est stable dans* Co'' *pour les* $\{\underline{\xi}\}$*-limites inductives.*

PREUVE. Reprenons les notations de la démonstration de la proposition 2.6, où $\underline{\mathbf{K}} = \underline{\xi}$. Il suffit de vérifier que $\mu(\phi)$ contient au plus un élément, s'il en est ainsi de tous les $\mu_K(\phi)$. Considérons deux foncteurs $\phi: \underline{\mathbf{J}} \to \underline{\mathbf{A}}_K$ et $\phi': \underline{\mathbf{J}} \to \underline{\mathbf{A}}_{K'}$, vérifiant: $\psi = \underline{G}_K . \phi = \underline{G}_{K'} . \phi'$. Pour toute flèche j de $\underline{\mathbf{J}}$, il existe un ordinal $\zeta_j < \xi$ tel que :

$$\underline{F}_{(\zeta_j, K)} . \phi(j) = \underline{F}_{(\zeta_j, K')} . \phi'(j).$$

Posons $\zeta = \sup_{j \in \underline{\mathbf{J}}} \zeta_j$. On a : $F_{(\zeta, K)} . \phi = F_{(\zeta, K')} . \phi'$. Si t est un élément de $\mu_K(\phi)$ et t' un élément de $\mu_{K'}(\phi')$ (resp. t est un élément de $\partial_K(\phi)$ et t' un élément de $\partial_{K'}(\phi')$), l'on a :

$$G_\zeta . (F_{(\zeta, K)} . t) = G_\zeta . (F_{(\zeta, K')} . t').$$

Ceci achève la démonstration, car la même équation est vraie en remplaçant ζ par ξ. ■

B. Un adjoint au foncteur inclusion de Co' *dans* Lim'.

THEOREME 2.2. *Supposons que* $\underline{\mathbf{V}}$ *est à petites limites inductives et pro-*

jectives, que le foncteur de base de $\mathbf{V}$ *est compatible avec les* $\{\underline{\xi}\}$*-limites inductives. Si les* $\mathcal{J} \cup \mathcal{I}$*-limites projectives commutent avec les* $\{\underline{\xi}\}$*-limites inductives dans* $\mathbf{V}$*, le foncteur inclusion de Co' dans Lim' admet un adjoint.*

PREUVE. A partir d'un objet $U = (\mathbf{A}, \mu, \partial)$ de Co', nous allons définir une famille $((U_\zeta, F_{(\zeta, \zeta')}, U_{\zeta'}))_{\zeta' \leq \zeta \leq \xi}$ de flèches de Co', où

$$U_\zeta = (\mathbf{A}_\zeta, \mu_\zeta, \partial_\zeta), \quad F_{(\zeta, \zeta)} = Id_{\mathbf{A}_\zeta} \quad \text{et} \quad U_1 = U.$$

Puis nous montrerons que U_ξ est un objet de Lim', c'est-à-dire que μ_ξ est une application $\mathcal{J}$-cône projectif partielle et ∂_ξ est une application $\mathcal{I}$-cône inductif partielle.

1°) Supposons que U_ζ et $F_{(\zeta, 1)}$ sont déterminés. Définissons un homomorphisme de $\mathbf{V}$-graphes orientés $G_\zeta : [\mathbf{A}_\zeta] \to \mathbf{B}_\zeta$, où $[\mathbf{A}_\zeta] = \mathcal{O}_{\mathbf{V}}(\mathbf{A}_\zeta)$, susceptible de transformer les applications cône en des applications cône «plus proches d'applications limite» :

a°) L'ensemble des sommets de $\mathbf{B}_\zeta$ est l'ensemble $(\mathbf{A}_\zeta)_0$.

b°) Soit A_ζ un tel sommet. On désigne par $M(A_\zeta)$ (resp. $N(A_\zeta)$) l'ensemble des foncteurs ϕ de source appartenant à $\mathcal{J}$ (resp. à $\mathcal{I}$), de but $\underline{\mathbf{A}}$ et vérifiant :

$\mu(\phi)$ (resp. $\partial(\phi)$) est défini et, si la source de $\mu(\phi)$ (resp. le but de $\partial(\phi)$) est un foncteur constant sur A, on a : $A_\zeta = \underline{F}_{(\zeta, 1)}(A)$.

Supposons donnés un élément ϕ de $M(A_\zeta)$ (resp. de $N(A_\zeta)$) et un autre objet A'_ζ de $\mathbf{A}_\zeta$. Le foncteur $\mathbf{A}_\zeta(-, A'_\zeta) . F_{(\zeta, 1)} . \phi$ (resp. $\mathbf{A}_\zeta(A'_\zeta, -) . F_{(\zeta, 1)} . \phi^*$) admet une limite projective V^ϕ_ζ (resp. V'^ϕ_ζ) et la transformation naturelle $\mathbf{A}_\zeta(-, A'_\zeta) . F_{(\zeta, 1)} . \mu(\phi)$ (resp. $\mathbf{A}_\zeta(A'_\zeta, -) . F_{(\zeta, 1)} . \partial(\phi)^*$) admet un crochet

$$v^\phi_\zeta : \mathbf{A}_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta) \to V^\phi_\zeta \quad (\text{resp. } v'^\phi_\zeta : \mathbf{A}_\zeta(A'_\zeta, A_\zeta) \to V'^\phi_\zeta).$$

D'autre part, la famille $(v^\phi_\zeta)_{\phi \in M(A_\zeta)}$ (resp. $(v'^\phi_\zeta)_{\phi \in N(A_\zeta)}$) admet une somme fibrée V_ζ (resp. V'_ζ) dans $\mathbf{V}$. Notons $w(A_\zeta)$ (resp. $w'(A_\zeta)$) la co-projection canonique

$$w(A_\zeta) : \mathbf{A}_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta) \to V_\zeta \quad (\text{resp. } w'(A_\zeta) : \mathbf{A}_\zeta(A'_\zeta, A_\zeta) \to V'_\zeta).$$

Si $M(A_\zeta)$ (resp. $N(A_\zeta)$) est vide, on posera :

$$w(A_\zeta)=Id_{\mathbf{A}_\zeta(A_\zeta,A'_\zeta)}, \text{ (resp. } w'(A_\zeta)=Id_{\mathbf{A}_\zeta(A'_\zeta,A_\zeta)}).$$

Pour tout couple (A'_ζ, A_ζ) d'objets de $\mathbf{A}_\zeta$, le couple $(w'(A_\zeta), w(A'_\zeta))$ admet une somme fibrée $\mathbf{B}_\zeta(A'_\zeta, A_\zeta)$. On notera $G_\zeta(A'_\zeta, A_\zeta)$ la co-projection canonique $G_\zeta(A'_\zeta, A_\zeta): \mathbf{A}_\zeta(A'_\zeta, A_\zeta) \to \mathbf{B}_\zeta(A'_\zeta, A_\zeta)$.

c°) Si $A'_\zeta = A_\zeta$, nous poserons $j_{\mathbf{B}_\zeta}(A_\zeta) = G_\zeta(A_\zeta, A_\zeta).j_{\mathbf{A}_\zeta}(A_\zeta)$. Ainsi l'homomorphisme de $\mathbf{V}$-graphes orientés $G_\zeta: [\mathbf{A}_\zeta] \to \mathbf{B}_\zeta$ est bien défini. On désignera par $H_\zeta: \mathbf{A}_\zeta \to \mathbf{C}_\zeta$ une $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$-quasi-surjection associée à G_ζ.

U_ζ induit sur $\mathbf{C}_\zeta$ une relation $\mathcal{J}$-cône projectif μ'_ζ et une relation $\mathcal{J}$-cône inductif ∂'_ζ comme suit: $\mu'_\zeta(\psi)$ (resp. $\partial'_\zeta(\psi)$) est l'ensemble pour ϕ vérifiant $\psi = \underline{H}_\zeta.\phi$, des transformations naturelles $\underline{H}_\zeta.\mu_\zeta(\phi)$ (resp. $\underline{H}_\zeta.\partial_\zeta(\phi)$). Si $U'_\zeta = (\mathbf{C}_\zeta, \mu'_\zeta, \partial'_\zeta)$, le triplet $(U'_\zeta, H_\zeta, U_\zeta)$ est une flèche de Co''. Par définition, $U_{\zeta+1}$ est une structure libre associée à U'_ζ et relative au foncteur inclusion de Co' dans Co''. Le projecteur correspondant est noté $(U_{\zeta+1}, H'_\zeta, U'_\zeta)$. On posera :

$$F_{(\zeta+1,\,\zeta)} = H'_\zeta.H_\zeta \quad \text{et} \quad F_{(\zeta+1,\,\zeta')} = H'_\zeta.H_\zeta.F_{(\zeta,\,\zeta')},$$

si $F_{(\zeta,\,\zeta')}$ est défini.

2°) Supposons que ζ'' est un ordinal limite et que $(U_\zeta, F_{(\zeta,\,\zeta')}, U_{\zeta'})$ est défini, pour tout $\zeta' \leqslant \zeta < \zeta''$. D'après le corollaire 3 de la proposition 2.6, la famille ci-dessus admet une limite inductive dans Co'. On note $U_{\zeta''}$ cette limite et $((U_{\zeta''}, F_{(\zeta,\,\zeta')}, U_{\zeta'}))$ est entièrement définie. Notons que la limite U_ξ se projette dans *cat* et dans $\mathbf{V}$-*cat* en une limite d'après le corollaire 2 de la proposition 2.6 .

3°) Montrons que U_ξ est un objet de Lim'. Soit $\psi: \underline{\mathbf{J}} \to \underline{\mathbf{A}}_\xi$ un foncteur, où $\underline{\mathbf{J}} \in \mathcal{J}$ (resp. $\underline{\mathbf{J}} \in \mathcal{J}$). La transformation naturelle $\mu_\xi(\psi)$ (resp. $\partial_\xi(\psi)$) est définie si, et seulement si, il existe un foncteur $\phi: \underline{\mathbf{J}} \to \underline{\mathbf{A}}$ tel que $\psi = \underline{F}_{(\xi,\,1)}.\phi$ et que $\mu(\phi)$ (resp. $\partial(\phi)$) soit défini. On suppose que tel est le cas. On considère un objet A'_ξ de $\mathbf{A}_\xi$. Comme $\underline{\mathbf{A}}_\xi$ est est une limite inductive des foncteurs $\underline{F}_{(\zeta,\,\zeta')}$ on a: $\underline{\mathbf{A}}_\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} \underline{\mathbf{A}}_\zeta$. Il existe un ordinal $\tilde{\zeta} < \xi$ et un objet $A'_{\tilde{\zeta}}$ de $\mathbf{A}_{\tilde{\zeta}}$ tel que $A'_\xi = \underline{F}_{(\xi,\,\tilde{\zeta})}(A'_{\tilde{\zeta}})$; posons $A'_\zeta = \underline{F}_{(\zeta,\,\tilde{\zeta})}(A'_{\tilde{\zeta}})$ et $\phi_\zeta = \underline{F}_{(\zeta,\,1)}.\phi$, pour tout $\tilde{\zeta} \leqslant \zeta < \xi$. La transformation naturelle

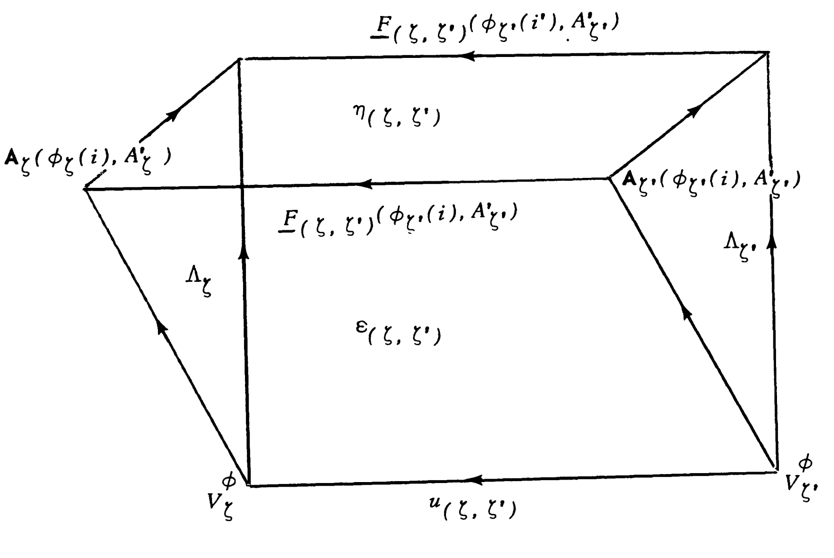
$$\eta_{(\zeta,\,\zeta')} : \mathbf{A}_{\zeta'}(-, A'_{\zeta'}).\phi_{\zeta'} \Rightarrow \mathbf{A}_{\zeta}(-, A'_{\zeta}).\phi_{\zeta}$$

$$(\text{resp. } \eta'_{(\zeta,\,\zeta')} : \mathbf{A}_{\zeta'}(A'_{\zeta'}, -).\phi^*_{\zeta'} \Rightarrow \mathbf{A}_{\zeta}(A'_{\zeta}, -).\phi^*_{\zeta})$$

définie par la famille $(\underline{F}_{(\zeta,\,\zeta')}(\phi_{\zeta'}(i), A'_{\zeta'})_{i \in \underline{\mathbf{J}}_0})$ (resp. $(\underline{F}_{(\zeta,\,\zeta')}(A'_{\zeta'}, \phi_{\zeta'}(i))_{i \in \underline{\mathbf{J}}_0})$ admet une limite projective dans $\mathbf{V}$:

$$u_{(\zeta,\,\zeta')} : V^{\phi}_{\zeta'} \longrightarrow V^{\phi}_{\zeta} \ (\text{resp. } u'_{(\zeta,\,\zeta')} : V'^{\phi}_{\zeta'} \longrightarrow V'^{\phi}_{\zeta}).$$

Cette limite est relative à la limite naturalisée Λ_ζ (resp. Λ'_ζ) du foncteur $\mathbf{A}_\zeta(-, A'_\zeta).\phi_\zeta$ (resp. $\mathbf{A}_\zeta(A'_\zeta, -).\phi^*_\zeta$) définissant V^{ϕ}_{ζ} (resp. V'^{ϕ}_{ζ}):



Notons $/\underline{\xi}/$ la sous-catégorie de $\underline{\xi}$ formée des couples (ζ, ζ') tels que : $\tilde{\zeta} \leqslant \zeta' \leqslant \zeta < \xi$. A toute flèche (ζ, ζ') de $/\underline{\xi}/$ est associée une transformation naturelle

$$\varepsilon_{(\zeta,\,\zeta')} : \Lambda_{\zeta'} \Rightarrow \Lambda_\zeta \ (\text{resp. } \varepsilon'_{(\zeta,\,\zeta')} : \Lambda'_{\zeta'} \Rightarrow \Lambda'_\zeta)$$

déterminée par $\eta_{(\zeta,\,\zeta')}$ et $u_{(\zeta,\,\zeta')}$ (resp. par $\eta'_{(\zeta,\,\zeta')}$ et $u'_{(\zeta,\,\zeta')}$).

Le foncteur de source $/\underline{\xi}/$ qui à (ζ, ζ') associe cette transformation naturelle admet une limite inductive $\bar{\Lambda}_\xi$ (resp. $\bar{\Lambda}'_\xi$); cette limite est, par hypothèse de commutation de limites, une limite projective naturalisée dans $\mathbf{V}$. La source de Λ_ξ (resp. le but de Λ'_ξ) est un foncteur constant sur un objet de $\mathbf{A}_\xi$ noté V^ϕ_ξ. On désigne par :

$$\bar\varepsilon_{(\zeta,\zeta')} : \mathbf{A}_{\zeta'}(\mu_{\zeta'}(\phi_{\zeta'}), A'_{\zeta'}) \Longrightarrow \mathbf{A}_\zeta(\mu_\zeta(\phi_\zeta), A'_\zeta)$$

$$(\text{resp. } \bar\varepsilon'_{(\zeta,\zeta')} : \mathbf{A}_{\zeta'}(A'_{\zeta'}, \partial_{\zeta'}(\phi_{\zeta'})) \Longrightarrow \mathbf{A}_\zeta(A'_\zeta, \partial_\zeta(\phi_\zeta)))$$

la transformation naturelle déterminée par $\eta_{(\zeta,\zeta')}$ et par $\underline{F}_{(\zeta,\zeta')}(A'_{\zeta'}, A'_{\zeta'})$ (resp. par $\eta'_{(\zeta,\zeta')}$ et par $\underline{F}_{(\zeta,\zeta')}(A'_{\zeta'}, A_{\zeta'})$). Le foncteur de source $/\underline{\xi}/$ qui à (ζ,ζ') associe $\bar\varepsilon_{(\zeta,\zeta')}$ (resp. $\bar\varepsilon'_{(\zeta,\zeta')}$) admet pour limite inductive $\mathbf{A}_\xi(\mu_\xi(\phi_\xi), A'_\xi)$ (resp. $\mathbf{A}_\xi(A'_\xi, \partial_\xi(\phi_\xi))$). Il s'agit de montrer que cette dernière limite est isomorphe à Λ_ξ (resp. à Λ'_ξ)(*), c'est-à-dire que :

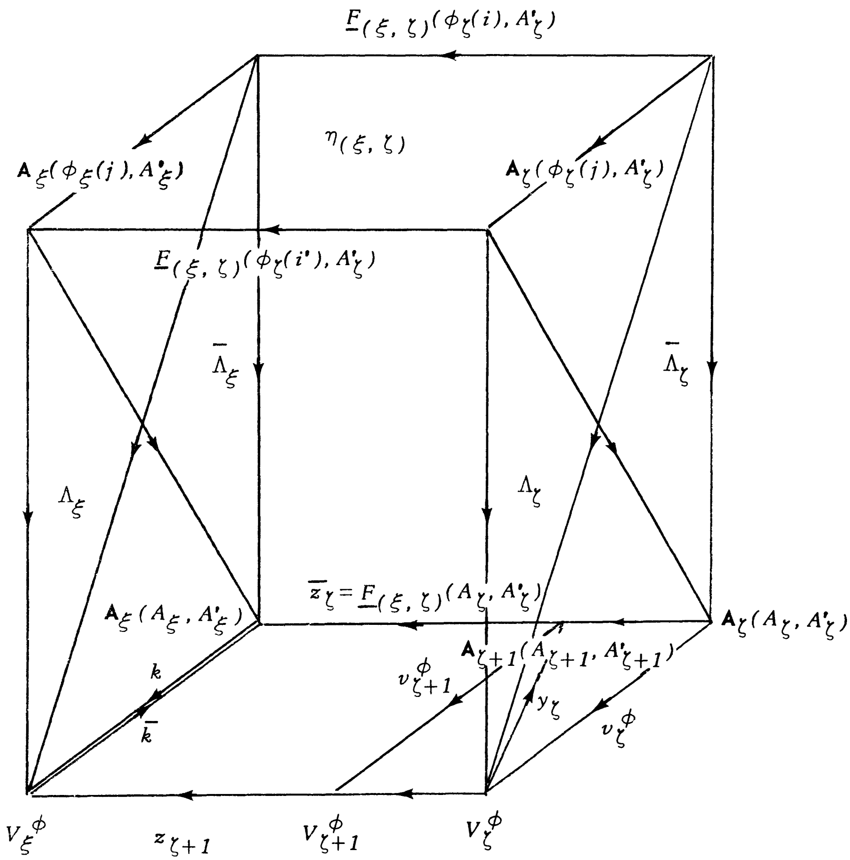
$$\mathbf{A}_\xi(A_\xi, A'_\xi) \simeq V^\phi_\xi \quad (\text{resp. } \mathbf{A}_\xi(A'_\xi, A_\xi) \simeq V'^\phi_\xi).$$

Montrons-le dans le cas de V^ϕ_ξ (le cas de V'^ϕ_ξ est semblable). Soit θ (resp. $\bar\theta$) le foncteur de $/\underline{\xi}/$ vers $\underline{\mathbf{V}}$ qui à (ζ, ζ') associe $u_{(\zeta,\zeta')}$ (resp. $\underline{F}_{(\zeta,\zeta')}(A_{\zeta'}, A'_{\zeta'})$) et $(z_\zeta)_{\tilde\zeta \leq \zeta < \xi}$ (resp. $(\bar z_\zeta)_{\tilde\zeta \leq \zeta < \xi}$) la famille définissant la limite inductive naturalisée déterminant V^ϕ_ξ (resp. $\mathbf{A}_\xi(A_\xi, A'_\xi)$). Il existe une transformation naturelle $\bar\sigma$ de source $\bar\theta$ et de but un foncteur constant sur V^ϕ_ξ définie par la famille $(z_\zeta . v^\phi_\zeta)$. On désigne par k le co-crochet de $\bar\sigma$. Il existe aussi une transformation naturelle σ de source θ et de but un foncteur constant sur $\mathbf{A}_\xi(A_\xi, A'_\xi)$, définie par la famille $(\bar z_{\zeta+1} . y_\zeta)_{\tilde\zeta \leq \zeta < \xi}$, si y_ζ est le composé canonique :

$$\begin{tikzcd}
V^\phi_\zeta \arrow[r, "1"] & V_\zeta \arrow[r, "2"] & \mathbf{B}_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta) \arrow[r, "K(A_\zeta, A'_\zeta)"] & \mathbf{C}_\zeta(C_\zeta, C'_\zeta) \arrow[d, "H'_\zeta(C_\zeta, C'_\zeta)"'] \\
 & & & \mathbf{A}_{\zeta+1}(A_{\zeta+1}, A'_{\zeta+1})
\end{tikzcd}$$

où 1 et 2 sont des co-projections de sommes fibrées, où $(\mathbf{C}_\zeta, K_\zeta, G_\zeta, H_\zeta)$ définit la quasi-surjection H_ζ, et où $C_\zeta = \underline{K}_\zeta(A_\zeta)$, $C'_\zeta = \underline{K}_\zeta(A'_\zeta)$.

(*) Cette démonstration présente une certaine analogie avec la démonstration du théorème 4 de [S.C.F.D.].



La relation $y_\zeta . v_\zeta^\phi = \underline{F}_{(\zeta+1,\,\zeta)}(A_\zeta, A'_\zeta)$ assure que le co-crochet $\bar{k}$ de σ est un inverse à gauche de k. La relation $v_{\zeta+1}^\phi . y_\zeta = u_{(\zeta+1,\,\zeta)}$ assure que $\bar{k}$ est un inverse à droite de k. Il est clair que :

$$\Lambda_\xi = k . \mathbf{A}_\xi(\mu_\xi(\psi), A'_\xi) = k . \bar\Lambda_\xi \quad \text{et} \quad \bar\Lambda_\xi = \bar k . \Lambda_\xi .$$

Ainsi $\mathbf{A}_\xi(\mu_\xi(\psi), A'_\xi)$ est une limite projective naturalisée et U_ξ est un objet de *Lim'*.

Considérons un élément (U', R_ζ, U_ζ) de *Co'*, où $U' = (\mathbf{D}, \mu', \partial')$ est un objet de *Lim'*, et un foncteur ϕ de $M(A_\zeta)$. Posons

$$\phi_\zeta = \underline{F}_{(\zeta,\,1)} . \phi, \quad D' = \underline{R}_\zeta(A'_\zeta) \quad \text{et} \quad D = \underline{R}_\zeta(A_\zeta).$$

Puisque $\mu'(\underline{R}_\zeta . \phi_\zeta)$ est une **V**-limite projective naturalisée dans $\mathbf{D}$, la transformation naturelle $\underline{R}_\zeta(-, A'_\zeta).\phi_\zeta$ admet une limite projective :

$$\overline{R}^{\phi}_{\zeta}(A_\zeta, A'_\zeta) : V^{\phi}_{\zeta} \longrightarrow \mathbf{D}(D, D').$$

On en déduit la relation : $R_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta) = \overline{R}^{\phi}_{\zeta}(A_\zeta, A'_\zeta).v^{\phi}_{\zeta}$. Cette décomposition est unique. La famille $(\overline{R}^{\phi}_{\zeta}(A_\zeta, A'_\zeta))_{\phi \in M(A_\zeta)}$ admet un crochet $\overline{R}_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta) : V_\zeta \to \mathbf{D}(D, D')$. Donc :

$$\overline{R}_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta).w(A_\zeta) = R_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta).$$

On montre de même que $R_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta)$ s'écrit de manière unique sous la forme :

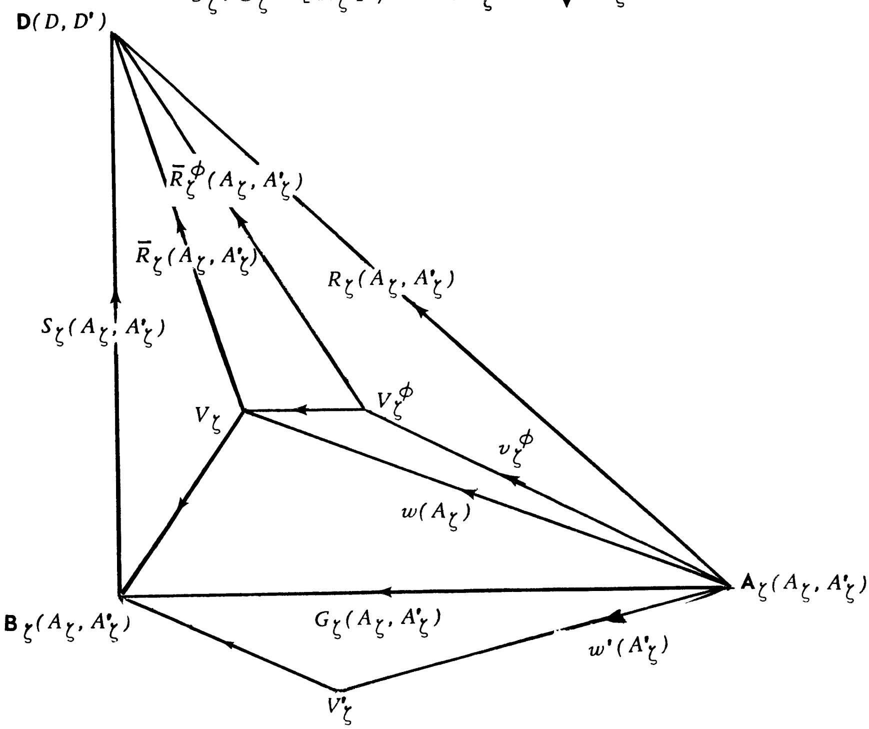
$$R_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta) = \overline{R}'_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta).w'(A'_\zeta).$$

Il s'ensuit qu'il existe un unique élément $S_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta)$ vérifiant :

$$S_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta).G_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta) = R_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta).$$

La famille $(S_\zeta(A_\zeta, A'_\zeta))$ définit un homomorphisme de $\mathbf{V}$-graphes orientés $S_\zeta : \mathbf{B}_\zeta \to [\mathbf{D}]$, où $[\mathbf{D}] = \mathcal{O}_{\mathbf{V}}(\mathbf{D})$, tel que :

$$S_\zeta.G_\zeta = [R_\zeta], \text{ où } [R_\zeta] = \mathcal{O}_{\mathbf{V}}(R_\zeta).$$



Il existe donc un unique **V**-foncteur $T_\zeta : \mathbf{C}_\zeta \to \mathbf{D}$ vérifiant $T_\zeta . H_\zeta = R_\zeta$. Comme U' est un objet de Co' et que (U', T_ζ, U'_ζ) est une flèche de Co'', on a une décomposition unique :

$$(U', R_{\zeta+1}, U_{\zeta+1}).(U_{\zeta+1}, F_{(\zeta+1,\,\zeta)}, U_\zeta) = (U', R_\zeta, U_\zeta).$$

Soit ζ'' un ordinal limite. A une famille $((U', R_\zeta, U_\zeta))_{\zeta<\zeta''}$ de flèches de Co', vérifiant $R_{\zeta'} = R_\zeta . F_{(\zeta,\,\zeta')}$ pour tout $\zeta' \leqslant \zeta < \zeta''$, correspond une transformation naturelle et, donc, un co-crochet $(U', R_{\zeta''}, U_{\zeta''})$. On en déduit qu'une flèche (U', R_1, U_1) de Co' s'écrit d'une seule manière sous la forme : $(U', R_\xi, U_\xi).(U_\xi, F_{(\xi,\,1)}, U_1)$. Ainsi U_ξ est bien une structure libre associée à $U = U_1$. ∎

COROLLAIRE. *Avec les hypothèses du théorème précédent, la catégorie Lim' est à* $\{\underline{\zeta}''\}$*-limites inductives et le foncteur d'oubli de Lim' dans* **V**-*cat est compatible avec les* $\{\underline{\xi}\}$*-limites inductives.*

PREUVE. En effet, avec ces conditions, la catégorie Co' a les propriétés indiquées. ∎

C. Un adjoint au foncteur inclusion de Lim' dans Lim.

Considérons un objet $U = (\mathbf{A}, \mu, \partial)$ de Co' et les triplets (u'', u', u) de flèches de Co' vérifiant :

U est la source de u' et u, $u''.u' = u$.

Ces triplets forment une catégorie de triangles. Nous considèrerons sa sous-catégorie pleine Δ'_U dont les objets sont les triplets (U', F, U) tels que :

si $\underline{\mathbf{J}} \in \mathcal{J}$ (resp. $\underline{\mathbf{J}} \in \mathcal{I}$) et si $\phi : \underline{\mathbf{J}} \to \underline{\mathbf{A}}$ est un foncteur, $\mu'(F.\phi)$ (resp. $\partial'(F.\phi)$) est défini, où $U' = (A', \mu', \partial')$.

PROPOSITION 2.7. *Avec les hypothèses de la proposition 2.5, la catégorie* Δ'_U *admet un objet initial.*

PREUVE. Associons à U un homomorphisme de **V**-graphes orientés $G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. On pose $\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0 \coprod \mathbf{B}'_0 \coprod \mathbf{B}''_0$, où $\mathbf{B}'_0$ (resp. $\mathbf{B}''_0$) désigne l'ensemble des foncteurs ϕ dont la source appartient à $\mathcal{J}$ (resp. à $\mathcal{I}$), dont le but est $\underline{\mathbf{A}}$ et tels que $\mu(\phi)$ (resp. $\partial(\phi)$) n'est pas défini. Pour tout couple d'objets (A, A') de $\underline{\mathbf{A}}$, posons

$$G(A, A') = Id_{\mathbf{A}(A, A')} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(A, A') = \mathbf{A}(A, A').$$

Soit ϕ un élément de $\mathbf{B}_0'$ (resp. de $\mathbf{B}_0''$), A un objet de $\mathbf{A}$ et N_A l'ensemble des objets J de $\underline{\mathbf{J}}$ vérifiant: $\phi(J) = A$. Par définition:

$$\mathbf{B}(\phi, \phi) = I \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(A, \phi) = \coprod_{J \in N_A} I \quad (\text{resp.} \quad \mathbf{B}(\phi, A) = \coprod_{J \in N_A} I).$$

Si (B, B') est un couple de $\mathbf{B}_0$ et si $\mathbf{B}(B, B')$ n'est pas encore défini, $\mathbf{B}(B, B')$ désignera une structure initiale de $\underline{\mathbf{V}}$. Ainsi G est entièrement défini.

Considérons une $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$-quasi-surjection $H: \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ associée à G et définie par le quadruplet $(K, [\mathbf{C}], G, H)$. Définissons sur la catégorie $\underline{\mathbf{C}}$ une relation d'équivalence r. Remarquons qu'à tout objet J de $\underline{\mathbf{J}}$ est associée une flèche canonique

$$\tau(J): I \to \mathbf{B}(\phi(J), \phi) \quad (\text{resp.} \quad \sigma(J): I \to \mathbf{B}(\phi, \phi(J)))$$

dans $[\underline{\mathbf{B}}]$ et que, si $j: J \to J'$ (resp. $j: J' \to J$) est une flèche de $\underline{\mathbf{J}}$, le compose $\underline{K}(\phi(j)) . \underline{K}(\tau(J))$ (resp. $\underline{K}(\sigma(J)) . \underline{K}(\phi(j))$) est défini. On note M_ϕ (resp. N_ϕ) tous les couples de la forme:

$$(\underline{K}(\tau(J')), \underline{K}(\phi(j)) . \underline{K}(\tau(J)))$$
$$(\text{resp.} \quad (\underline{K}(\sigma(J')), \underline{K}(\sigma(J)) . \underline{K}(\phi(j)))),$$

pour j parcourant la catégorie $\underline{\mathbf{J}}$. On désigne par r la relation d'équivalence engendrée par l'ensemble:

$$\Big(\bigcup_{\phi \in \mathbf{B}_0'} M_\phi\Big) \cup \Big(\bigcup_{\phi \in \mathbf{B}_0''} N_\phi\Big).$$

D'après le corollaire du théorème I.3, il existe une $\mathbf{V}$-catégorie quasi-quotient $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$ par r. Soit H' la quasi-surjection associée, $H': \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.

La construction précédente induit sur $\mathbf{D}$ une structure $U'' = (\mathbf{D}, \mu'', \partial'')$, objet de Co'': Soit ϕ un foncteur de source $\underline{\mathbf{J}}$ et de but $\underline{\mathbf{A}}$; si $\mu(\phi)$ (resp. $\partial(\phi)$) est défini, alors $\underline{H}' . \underline{H} . \mu(\phi)$ (resp. $\underline{H}' . \underline{H} . \partial(\phi)$) est une transformation naturelle appartenant à $\mu''(\underline{H}' . \underline{H} . \phi)$ (resp. à $\partial''(\underline{H}' . \underline{H} . \phi)$); si ϕ est un élément de $\mathbf{B}_0'$ (resp. de $\mathbf{B}_0''$), la famille $(\underline{H}' . \underline{K}(\tau(J)))_{J \in \underline{\mathbf{J}}_0}$ (resp. $(\underline{H}' . \underline{K}(\sigma(J)))_{J \in \underline{\mathbf{J}}_0}$) définit une transformation naturelle de source $\underline{H}'.\underline{H}.\phi$ (resp. de but $\underline{H}'.\underline{H}.\phi$) et de but (resp. de source) un foncteur constant sur $\underline{H}'.\underline{K}(\phi)$. Nous supposerons que cette transformation naturelle est un élément de $\mu''(\underline{H}'.\underline{H}.\phi)$ (resp. de $\partial''(\underline{H}'.\underline{H}.\phi)$). Aucune autre transformation naturelle n'est considérée. Comme les conditions de la proposition 2.5 sont vérifiées, U'' admet une structure libre $U'=(\mathbf{A}', \mu', \partial')$ dans Co'. Si H'' est le projecteur associé, posons $F=H''.H'.H$.

Montrons que (U', F, U) est un objet initial de la catégorie Δ'_U. Considérons un objet quelconque $(\bar{U}, \bar{F}, U)$ de Δ'_U, où $\bar{U}=(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mu}, \bar{\partial})$. Il existe un homomorphisme entre $\mathbf{V}$-graphes orientés $\bar{K}: \mathbf{B} \to \bar{\mathbf{A}}$, défini par :

a°) $\underline{\bar{K}}(A)=\underline{\bar{F}}(A)$ et $\bar{K}(A', A)=\bar{F}(A', A)$, pour tout couple d'objets (A', A) de $\mathbf{A}$.

b°) Si ϕ est un foncteur de $\mathbf{B}_0^{\mathbf{!}}$ (resp. de $\mathbf{B}_0^{\mathrm{m}}$), $\underline{\bar{K}}(\phi)=\bar{A}$, si la source (resp. le but) de la transformation naturelle $\bar{\mu}(\underline{\bar{F}}.\phi)$ (resp. $\bar{\partial}(\underline{\bar{F}}.\phi)$) est un foncteur constant sur $\bar{A}$. De plus

$$\bar{K}(\phi, \phi)=j_{\bar{\mathbf{A}}}(\bar{A}): I \to \bar{\mathbf{A}}(\bar{A}, \bar{A}).$$

c°) Si J est une unité de $\underline{\mathbf{J}}$ et si $\bar{\mu}(\underline{\bar{F}}.\phi)$ (resp. $\bar{\partial}(\underline{\bar{F}}.\phi)$) est défini par la famille $(\bar{\tau}(J))$ (resp. $(\bar{\sigma}(J))$), il existe une flèche de $\mathbf{V}$:

$$\rho(J): I \to \bar{\mathbf{A}}(\underline{\bar{F}}.\phi(J), \bar{A}) \text{ déterminée par } \bar{\tau}(J)$$
$$(\text{resp. } \rho'(J): I \to \bar{\mathbf{A}}(\bar{A}, \underline{\bar{F}}.\phi(J)) \text{ déterminée par } \bar{\sigma}(J)).$$

$\bar{K}(A, \phi)$ (resp. $\bar{K}(\phi, A)$) est alors le co-crochet de la famille $(\rho(J))$ (resp. $(\rho'(J))$), où J parcourt N_A et $A=\phi(J)$.

d°) Si $\bar{K}(B', B)$ n'est pas encore défini, ce sera l'unique flèche de la structure initiale $\mathbf{B}(B', B)$ vers $\bar{\mathbf{A}}(\underline{\bar{K}}(B'), \underline{\bar{K}}(B))$.

D'après le a , on a la relation : $\bar{K}.G=\bar{F}$. Par suite, il existe un unique $\mathbf{V}$-foncteur $\bar{H}$ rendant commutatifs les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} \bar{\mathbf{A}} & & \mathbf{C} \arrow[ll, "\bar{H}"'] \\ & & \mathbf{A} \arrow[u, "H"'] \arrow[ull, "\bar{F}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {[\bar{\mathbf{A}}]} & & {[\mathbf{C}]} \arrow[ll, "{[\bar{H}]}"'] \\ \mathbf{B} \arrow[u, "\bar{K}"] \arrow[urr, "K"'] & & \end{tikzcd}$$

L'application sous-jacente à $\bar{H}$ est compatible avec la relation d'équivalence r. En effet, $\bar{\mu}(\bar{F}.\phi)$ (resp. $\bar{\partial}(\bar{F}.\phi)$) est une transformation naturelle pour tout ϕ de $\mathbf{B}'_0$ (resp. $\mathbf{B}''_0$). Il existe un unique $\mathbf{V}$-foncteur $\bar{H}'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} & & \mathbf{D} \arrow[ll, "\bar{H}'"'] \\
& & \mathbf{C} \arrow[u, "H'"'] \arrow[ull, "\bar{H}"]
\end{tikzcd}$$

Par suite, $\bar{H}'$ est l'unique $\mathbf{V}$-foncteur tel que l'on ait la relation :

$$(\bar{U}, \bar{H}', U'').(U'', H'.H, U) = (\bar{U}, \bar{F}, U)$$

dans Co''. La fin de la démonstration se déduit du fait que U' est une structure libre associée à U''. ∎

Supposons que U soit un objet de Lim' et désignons par Δ_U la sous-catégorie pleine de Δ'_U dont les objets sont les triplets (U', F, U) tels que U' soit aussi un objet de Lim' :

COROLLAIRE. *Avec les hypothèses du théorème 2.2, la catégorie* Δ_U *admet un objet initial.*

THEOREME 2.3. *Avec les hypothèses du théorème 2.2, le foncteur inclusion de Lim dans Lim' admet un adjoint.*

PREUVE. A partir d'un objet $U = (\mathbf{A}, \mu, \partial)$ de Co', construisons une famille $(u_{(\zeta, \zeta')})_{\zeta' \leq \zeta \leq \xi}$ de flèches de Co' telle que :

$$U_\zeta = (\mathbf{A}_\zeta, \mu_\zeta, \partial_\zeta), \quad U_1 = U, \quad u_{(\zeta, \zeta')} = (U_\zeta, F_{(\zeta, \zeta')}, U_{\zeta'})$$

$$\text{et} \quad u_{(\zeta, \zeta')} . u_{(\zeta', \zeta'')} = u_{(\zeta, \zeta'')} .$$

a°) Supposons que U_ζ est déterminé; par définition, $u_{(\zeta+1, \zeta)}$ est un objet initial de la catégorie Δ_{U_ζ} définie dans le corollaire de la proposition précédente.

b°) Supposons que $u_{(\zeta, \zeta')}$ est défini, pour tout ordinal $\zeta < \zeta''$, où ζ'' est un ordinal limite. Par définition $U_{\zeta''}$ sera la limite des $u_{(\zeta, \zeta')}$ quand

(ζ, ζ') parcourt la catégorie $\underline{\zeta}''$, et $u_{(\zeta'', \zeta)}$ sera une co-projection.

Il s'agit de montrer que U_ξ est une structure libre associée à $U = U_1$. D'après le corollaire du théorème 2.2, le foncteur d'oubli de Lim' vers cat est compatible avec les $\{\underline{\xi}\}$-limites inductives, de sorte que :

$$\underline{\mathbf{A}}_\xi = \bigcup_{\zeta < \xi} \underline{\mathbf{A}}_\zeta .$$

Soit ϕ un foncteur de source $\underline{\mathbf{J}}$, catégorie de $\mathfrak{J}$ (resp. de $\mathfrak{I}$), vers $\underline{\mathbf{A}}_\xi$. Pour tout élément j de $\underline{\mathbf{J}}$, il existe un ordinal $\zeta_j < \xi$ et une flèche $a^j_{\zeta_j}$ de $\underline{\mathbf{A}}_{\zeta_j}$ tels que : $\phi(j) = F_{(\xi, \zeta_j)}(a^j_{\zeta_j})$. Désignons par ζ' le sup des ζ_j, pour j parcourant la catégorie $\underline{\mathbf{J}}$. Puisque ξ est un ordinal régulier et que l'ordinal associé à $\underline{\mathbf{J}}$ est strictement inférieur à ξ, on en déduit : $\zeta' < \xi$. Posons $b^j = \underline{F}_{(\zeta', \zeta_j)}(a^j_{\zeta_j})$. Pour tout couple composable $k = (j', j)$ de la catégorie $\underline{\mathbf{J}}$, il existe un ordinal ζ_k tel que $\zeta' \leqslant \zeta_k < \xi$ et que $\underline{F}_{(\zeta_k, \zeta')}(b^{j'}) . \underline{F}_{(\zeta_k, \zeta')}(b^j)$ soit composable et égal à $\underline{F}_{(\zeta_k, \zeta')}(b^{j'.j})$.

Désignons par ζ le sup des ζ_k, quand k parcourt l'ensemble des couples composables de $\underline{\mathbf{J}}$, et par c^j l'image de b^j par le foncteur $\underline{F}_{(\zeta, \zeta')}$. En posant $\phi_\zeta(j) = c^j$, on définit un foncteur $\phi_\zeta : \underline{\mathbf{J}} \to \underline{\mathbf{A}}_\zeta$ qui vérifie : $\phi = F_{(\xi, \zeta)} \cdot \phi_\zeta$. Posons

$$\phi_{\zeta+1} = \underline{F}_{(\zeta+1, \zeta)} \cdot \phi_\zeta .$$

Par construction, $\mu_{\zeta+1}(\phi_{\zeta+1})$ (resp. $\partial_{\zeta+1}(\phi_{\zeta+1})$) est définie et

$$\mu_\xi(\phi) = \underline{F}_{(\xi, \zeta+1)} \cdot \mu_{\zeta+1}(\phi_{\zeta+1})$$

$$(\text{resp. } \partial_\xi(\phi) = \underline{F}_{(\xi, \zeta+1)} \cdot \partial_{\zeta+1}(\phi_{\zeta+1})).$$

Par suite, U_ξ est un objet de Lim.

On considère une flèche (U', G_ζ, U_ζ) de Lim', où $U' = (\mathbf{A}', \mu', \partial')$ est un objet de Lim. C'est aussi un objet de Δ_{U_ζ} : on a une décomposition unique

$$(U', G_{\zeta+1}, U_{\zeta+1}) . (U_{\zeta+1}, F_{(\zeta+1, \zeta)}, U_\zeta) = (U', G_\zeta, U_\zeta).$$

Supposons que ζ'' est un ordinal limite et que l'on ait une famille de flèches $((U', G_\zeta, U_\zeta))_{\zeta < \zeta''}$ telle qu'il existe une décomposition unique :

$$(U', G_\zeta, U_\zeta).(U_\zeta, F_{(\zeta, \zeta')}, U_{\zeta'}) = (U', G_{\zeta'}, U_{\zeta'}).$$

Cette famille définit une transformation naturelle dont nous notons $(U', G_{\zeta''}, U_{\zeta''})$ le co-crochet. La décomposition précédente reste donc valable pour l'ordinal ζ'', en particulier pour ξ. Le théorème en résulte. ■

REMARQUE. Nous allons montrer que le foncteur $F_{(\xi, 1)}$ est **V**-fidèle. En effet, d'après le théorème IV.2.1 de [K.E.C.T.] on sait que l'on peut plonger, par un **V**-foncteur **V**-pleinement fidèle compatible avec les petites **V**-limites projectives et inductives, une petite **V**-catégorie **A** dans une **V**-catégorie **B** à petites **V**-limites inductives et projectives, ceci pourvu que **V** soit localement petite. Supposons donc donnés un objet $U = (\mathbf{A}, \mu, \partial)$ de Lim', et de «bons» choix $\hat{\mu}$ et $\hat{\partial}$ de **V**-limites projectives et inductives définissant un objet $\hat{U} = (\mathbf{B}, \hat{\mu}, \hat{\partial})$ de $\hat{Lim}$ et une flèche $(\hat{U}, H, U)$ de $\hat{Lim}'$. Construisons, par récurrence, une famille de petites **V**-sous-catégories $(\bar{\mathbf{A}}_\zeta)_{\zeta \leqslant \xi}$ de **B** : Supposons que $\bar{\mathbf{A}}_\zeta$ est définie et que c'est une petite **V**-catégorie. Notons M_ζ (resp. N_ζ) l'ensemble des foncteurs ayant leur source dans $\mathcal{J}$ (resp. dans $\mathcal{I}$), ayant **B** pour but et dont l'image est contenue dans $\underline{\bar{\mathbf{A}}}_\zeta$. On note $(\mathbf{C}_\zeta)_0$ l'ensemble des objets de **B** qui sont les sommets des cônes $\hat{\mu}(\phi)$ (resp. $\hat{\partial}(\phi)$), quand ϕ parcourt M_ζ (resp. N_ζ). C'est un petit ensemble ; en effet, $\underline{\bar{\mathbf{A}}}_\zeta$ est une petite catégorie, donc M_ζ et N_ζ sont petits. $\bar{\mathbf{A}}_{\zeta+1}$ est la sous-**V**-catégorie pleine de **B** ayant l'ensemble d'objets $(\bar{\mathbf{A}}_\zeta)_0 \cup (\mathbf{C}_\zeta)_0$. Si ζ'' est un ordinal limite, on désigne par $\bar{\mathbf{A}}_{\zeta''}$ la sous-**V**-catégorie pleine de **B** ayant pour ensemble d'objets $\bigcup_{\zeta < \zeta''} (\bar{\mathbf{A}}_\zeta)_0$.

Supposons que ψ est un foncteur de source $\underline{\mathbf{J}} \in \mathcal{J}$ (resp. $\in \mathcal{I}$), de but **B** et dont l'image est contenue dans $\underline{\bar{\mathbf{A}}}_\zeta$. Pour toute flèche j de $\underline{\mathbf{J}}$ il existe un ordinal $\zeta_j < \xi$ tel que $\psi(j)$ soit une flèche de $\underline{\bar{\mathbf{A}}}_{\zeta_j}$. Par suite, si ζ est le sup des ζ_j, quand j parcourt $\underline{\mathbf{J}}$, l'image de ψ est contenue dans $\underline{\bar{\mathbf{A}}}_\zeta$, et le cône définissant $\hat{\mu}(\psi)$ (resp. $\hat{\partial}(\psi)$) est contenu dans $\underline{\bar{\mathbf{A}}}_{\zeta+1}$, donc dans $\underline{\bar{\mathbf{A}}}_\xi$. On a ainsi défini un objet $\bar{U} = (\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mu}, \bar{\partial})$ de Lim, où $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_\xi$, où $\bar{\mu}$ et $\bar{\partial}$ sont des restrictions de $\hat{\mu}$ et $\hat{\partial}$. De plus, si G est une restriction de H, $(\bar{U}, G, U)$ est une flèche de Lim'. Par suite, le **V**-foncteur G se décompose à travers $F_{(\xi, 1)}$; comme il est **V**-pleinement fidèle, $F_{(\xi, 1)}$ est **V**-fidèle. De plus, pour tout couple d'objets (A', A) de **A**, le morphisme $F_{(\xi, 1)}(A', A)$ admet un inverse à gauche. La restriction de $\underline{F}_{(\xi, 1)}$ aux unités est injective, car ceci résulte de la construction de ce foncteur. Ainsi **A** s'identifie à une **V**-sous-catégorie de sa $(\mathcal{J}, \mathcal{I})$-complétion.

BIBLIOGRAPHIE

[C.L.C.A.] S. EILENBERG, G.M. KELLY, Closed categories, *Proc. conf. categorical Algebra (La Jolla,* 1965*)*, Springer 1966.

[F.M.E.D.] E.J. DUBUC, *Free monoids*, texte multigraphié, Rochester 1972.

[K.E.C.T.] E.J. DUBUC, Kan Extensions in Enriched categories, *Lecture Notes in Math.* 145, Springer 1970.

[S.E.S.L.] C. EHRESMANN, Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, *Cahiers de Topo. et Géom. Diff.* IX, 1-2, Dunod 1967.

[S.C.F.D] F. FOLTZ, Sur la catégorie des foncteurs dominés, *Cahiers de Topo. et Géom. Diff.* XI, 2, Dunod 1970.

[S.T.Q.Q] C. EHRESMANN, Structures quasi-quotients, *Math. Ann.*, 171 (1967), pp. 293-363.

Département de Mathématiques
Université de Tananarive
MADAGASCAR