CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

FRANÇOIS CONDUCHE

Un moyen d'extension aux catégories internes dans *A* des propriétés de la catégorie *A*

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 15, nº 1 (1974), p. 47-59

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1974__15_1_47_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XV-1*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

UN MOYEN D'EXTENSION AUX CATEGORIES INTERNES DANS A DES PROPRIETES DE LA CATEGORIE A

par François CONDUCHE

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$ des catégories à limites projectives finies, éventuellement cartésiennes fermées, $Cat_{\mathbf{A}}, \ldots$ les catégories des catégories internes associées. On construit dans ces catégories différents foncteurs : pour $f: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ commutant avec les produits fibrés, le foncteur Cat_f ; le foncteur $Fl: Cat_{\mathbf{A}} \to Cat_{\mathbf{A}}$; les bifoncteurs

$$Fonct: Cat_{\mathbf{A}}^{*} \times Cat_{\mathbf{A}} \to Cat \quad \text{et} \quad Fonct_{\mathbf{A}}: Cat_{\mathbf{A}}^{*} \times Cat_{\mathbf{A}} \to Cat_{\mathbf{A}}.$$

Tous ces foncteurs sont construits de la même façon. De plus, on remarque qu'ils satisfont certaines propriétés universelles, et, pour le vérifier directement, on refait encore des constructions analogues. Ici il en est rendu compte de la manière suivante :

- A tout bifoncteur $\phi: \mathbf{A}^{*} \times \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ vérifiant des conditions de compatibilité avec les limites de $\mathbf{B}$ est associé un foncteur $D(\phi): Cat_{\mathbf{A}}^{*} \times Cat_{\mathbf{B}} \to Cat_{\mathbf{C}}$, de manière universelle.
- Cette construction commute avec la substitution, plus précisément :

(a) $D(\phi(f-,-)) \simeq D(\phi)(Cat_f -,-)$ et

(b) $D(\phi(-,\psi(-,-)) \simeq D(\phi)(-,D(\psi)(-,-))$,

où f est un foncteur simple, ϕ, ψ des bifoncteurs vérifiant des conditions de commutation avec les limites simples. A ce moment-là les propriétés universelles des objets considérés apparaissent comme conséquence de ce résultat, appliqué aux équivalences déjà connues pour ϕ, ψ, f, etc. Une généralisation immédiate aurait pu être obtenue en affaiblissant les conditions sur f dans (a), ou bien en considérant des polyfoncteurs au lieu de bifoncteurs; le manque d'exemples réellement intéressants amène à considérer le cadre présent comme le plus raisonnable.

0. Notations générales.

0.1. Si $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ sont des catégories, *Fonct*$(\mathbf{C},\mathbf{C}')$ sera la catégorie des foncteurs de source $\mathbf{C}$, de but $\mathbf{C}'$; on notera $(\mathbf{C},\mathbf{C}')$ et $(\mathbf{C},\mathbf{C}')_f$ les sous-catégories pleines de la catégorie précédente dont les objets sont respectivement les foncteurs commutant avec toutes les limites projectives finies ou seulement avec les produits fibrés finis. Soit $\mathcal{S}_o$ la famille des catégories à limites projectives finies; les données, pour tout $(\mathbf{C},\mathbf{C}')\in\mathcal{S}_o^2$ de *Fonct*$(\mathbf{C},\mathbf{C}')$, $(\mathbf{C},\mathbf{C}')$, $(\mathbf{C},\mathbf{C}')_f$ définissent trois 2-catégories, respectivement Cat, Cat_p , Cat_f. Posons encore, pour trois catégories $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, *Fonct*$(\mathbf{A}^*,(\mathbf{B},\mathbf{C}))=\{\mathbf{B},\mathbf{C}\}_{\mathbf{A}}$ (intuitivement, on considère que $\mathbf{A}$ joue le rôle d'index).

0.2. *Intégrales de foncteurs* [6] .

- Soit Σ une catégorie; on note $\Sigma^{\S}$ la plus petite catégorie qui vérifie les deux conditions :

(1) $ob(\Sigma^{\S})$ est formé des flèches de Σ,

(2) pour toute flèche α de Σ, α n'étant pas une identité, il y a deux flèches dans $\Sigma^{\S}$ suivant le diagramme

$$S(\alpha)\xleftarrow{\hat{\alpha}}\alpha\xrightarrow{\bar{\alpha}}B(\alpha).$$

Si $F:\Sigma^*\times\Sigma\to\mathbf{C}$ est un foncteur, il détermine un autre foncteur

$$F^{\S}:\Sigma^{\S}\to\mathbf{C} \text{ par}$$

$$F^{\S}(\hat{\alpha})=F(\alpha,S(\alpha)),\quad F^{\S}(\bar{\alpha})=F(B(\alpha),\alpha),$$

et on pose $\int_\Sigma F=\varprojlim F^{\S}$.

- Cette construction est fonctorielle, i.e. $\int_\Sigma(-)$ est un foncteur:

$$Fonct(\Sigma^*\times\Sigma,\mathbf{C})\to\mathbf{C}.$$

EXEMPLE. Si f et g sont deux foncteurs $\Sigma\to\mathbf{C}$,

$$\int_\Sigma hom(f-,g-)\simeq\mathcal{N}at(f,g)\ .$$

0.3. *Catégories internes.*

Soit $\mathbf{U}$ la sous-catégorie pleine de la duale Δ^* de la catégorie simpliciale dont les objets sont $1,2,3,4$; le diagramme ci-dessus sert à nommer les principales flèches :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "i"] & 2 \arrow[l, shift right=3, "\partial_0"'] \arrow[l, shift left=3, "\partial_1"] & 3 \arrow[l, "\mu"'] \arrow[l, shift right=3, "p_0"'] \arrow[l, shift left=3, "p_1"] \end{tikzcd}$$

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie; une catégorie interne R dans $\mathbf{C}$ est un foncteur $R : \mathbf{U} \to \mathbf{C}$ qui envoie «certains» cônes de $\mathbf{U}$ sur des produits fibrés, et la catégorie $Cat_{\mathbf{C}}$ des catégories internes à $\mathbf{C}$ est la sous-catégorie pleine de $Fonct(\mathbf{U}, \mathbf{C})$ dont les objets sont les catégories internes à $\mathbf{C}$. On supposera désormais que les catégories (usuelles) considérées sont à limites projectives finies.

1. Le foncteur F_{ϕ}.

1.1. *Le foncteur* $D_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$.

Soient trois catégories $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$; ϕ un bifoncteur: $\mathbf{A}^* \times \mathbf{B} \to \mathbf{C}$; R_1, R_2 des catégories dans respectivement $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Ces trois données définissent un bifoncteur

$$\mathbf{U}^* \times \mathbf{U} \to \mathbf{C} : \phi(R_1 -, R_2 -)$$

auquel on associe l'objet $\int_{\mathbf{U}} \phi(R_1 -, R_2 -)$.
Cette construction est fonctorielle, c'est-à-dire que l'on a un foncteur

1.1.1. $D_o^1(\phi) : Fonct(\mathbf{U}, \mathbf{A})^* \times Fonct(\mathbf{U}, \mathbf{B}) \to \mathbf{C}$,

dont on considère la restriction

$$D_o(\phi) : Cat^*_{\mathbf{A}} \times Cat_{\mathbf{B}} \to \mathbf{C};$$

ces données sont fonctorielles en ϕ, d'où un foncteur

1.1.2. $D_o^1(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) : Fonct(\mathbf{A}^* \times \mathbf{B}, \mathbf{C}) \to Fonct(Cat^*_{\mathbf{A}} \times Cat_{\mathbf{B}}, \mathbf{C})$.

Par restriction, on en déduit $D_o^1(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ défini sur $\{\mathbf{B}, \mathbf{C}\}_{\mathbf{A}}$. Le calcul par limites projectives permet d'affirmer que l'on a alors un foncteur

1.1.3. $D_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) : \{\mathbf{B}, \mathbf{C}\}_{\mathbf{A}} \to \{Cat_{\mathbf{B}}, \mathbf{C}\}_{Cat_{\mathbf{A}}}$.

1.2. *Quelques exemples.*

1.2.1. *Exemple 1.* Soit $\mathbf{A}$ une catégorie; appliquons $D_o(\mathbf{A}, \mathbf{A}, Ens)$ au foncteur $hom : \mathbf{A}^* \times \mathbf{A} \to Ens$; on a

$$D_0(hom) = Fonct.$$

1.2.2. *Exemple 2.* Soit $\mathbf{A}$ une catégorie cartésienne fermée de fermeture $hom_{\mathbf{A}}(-,-)$. Alors

$$D_0(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A})(hom_{\mathbf{A}}) = Fonct_{\mathbf{A}}(-,-),$$

où $Fonct_{\mathbf{A}}(R_1, R_2)$ est l'objet des foncteurs de R_1 dans R_2.

1.2.3. *Exemple 3.* Posons $\mathbf{A} = Ens_f$ (la catégorie des ensembles finis). Soit $P : Ens_f^* \times \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ le foncteur défini par : $P(E,a) = a^E$. On pose :

$$D_0(Ens_f, \mathbf{A}, \mathbf{A})(P) = Diag_{\mathbf{A}}.$$

On obtient :

$$Diag_{\mathbf{A}}(\mathbf{1}, R) = R(1), \; Diag_{\mathbf{A}}(\mathbf{2}, R) = R(2), \; Diag_{\mathbf{A}}(\mathbf{3}, R) = R(3),$$

où $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ sont les ordinaux.

1.3. *Représentabilité.*

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ trois catégories, $\phi : \mathbf{A}^* \times \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ un foncteur, R_1, R_2 des catégories respectivement dans $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$; à tout objet c de $\mathbf{C}$ on associe le bifoncteur $\mathbf{U}^* \times \mathbf{U} \to Ens : hom(c, \phi(R_1 -, R_2 -))$ et on pose

$$F_\phi(c) = \int_{\mathbf{U}} hom(c, \phi(R_1 -, R_2 -)).$$

1.3.1. PROPOSITION. *F_ϕ est un foncteur : $\mathbf{C}^* \to Ens$ qui est représentable et a pour représentant $D_0(\phi)(R_1, R_2)$.*

En effet, on sait que $\int$ commute avec $hom(c, -)$. ∎

1.3.2. *Autre définition de $F_\phi(R_1, R_2)$.*

Soit $\phi : \mathbf{A}^* \times \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ comme ci-dessus et soit c un objet de $\mathbf{C}$. Puisque $hom(c, \phi(-,-))$ est un distributeur de source $\mathbf{A}$ et de but $\mathbf{B}$, on sait lui associer une catégorie $J_c(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, sous $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, et deux inclusions

$$\mathbf{A} \xhookrightarrow{\tau_{\mathbf{A}}} J_c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \xhookleftarrow{\tau_{\mathbf{B}}} \mathbf{B}$$

1.3.2.1. PROPOSITION. *$\tau_{\mathbf{A}}$ et $\tau_{\mathbf{B}}$ commutent avec les limites projectives finies si ϕ est un objet de $\{\mathbf{B}, \mathbf{C}\}_{\mathbf{A}}$.*

$\tau_{\mathbf{A}}$ et $\tau_{\mathbf{B}}$ sont pleins et fidèles; si Γ est un diagramme projectif dans $\mathbf{A}$ et Γ' le diagramme associé dans $J_c(\mathbf{A},\mathbf{B})$, un cône projectif sur Γ' est forcément dans $\tau_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$, d'où la proposition pour $\tau_{\mathbf{A}}$. Soit maintenant Γ un diagramme dans $\mathbf{B}$ et un cône à sommet $\tau_{\mathbf{A}}(a)$ sur $\tau_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$ sur Γ'; comme ϕ commute avec les limites projectives de $\mathbf{B}$, on a :

$$hom(\tau_{\mathbf{A}}(a),\Gamma') \simeq \varprojlim hom(\tau_{\mathbf{A}}(a),\Gamma'\cdot) \simeq$$
$$hom(\tau_{\mathbf{A}}(a),\tau_{\mathbf{B}}(\varprojlim \Gamma)).$$

1.3.2.2. COROLLAIRE. *Si R_1 et R_2 sont des catégories respectivement dans $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, alors $\tau_{\mathbf{A}}\circ R_1$ et $\tau_{\mathbf{B}}\circ R_2$ sont des catégories dans $J_c(\mathbf{A},\mathbf{B})$.*

1.3.3. PROPOSITION. $F_\phi(c) = Fonct(\tau_{\mathbf{A}}R_1, \tau_{\mathbf{B}}R_2)$.

Il suffit de juxtaposer les définitions.

$$Fonct(\tau_{\mathbf{A}}R_1,\tau_{\mathbf{B}}R_2) = \int_{\mathbf{U}} hom(\tau_{\mathbf{A}}R_1\cdot,\tau_{\mathbf{B}}R_2\cdot) =$$

$$= \int_{\mathbf{U}} hom(c,\phi(R_1\cdot,R_2\cdot)) = hom(c,\int_{\mathbf{U}}\phi(R_1\cdot,R_2\cdot)).$$

1.4.1. Considérons $\hat{\phi} = \phi(R_1\cdot,R_2\cdot)$,

$N_1 = Ker(\hat{\phi}(2,i\partial_0),\hat{\phi}(i\partial_0,2))$,
$N_2 = Ker(\hat{\phi}(2,i\partial_1),\hat{\phi}(i\partial_1,2))$,
$N = N_1 \cap N_2$ et $c : N \to \hat{\phi}(2,2)$.

Comme ϕ commute avec les limites de $\mathbf{B}$, on a :

$$\hat{\phi}(3,3) = \hat{\phi}(3,2) \underset{\hat{\phi}(3,1)}{\times} \hat{\phi}(3,2).$$

On dispose de deux flèches :

$$\hat{\phi}(p_0,2).c,\ \hat{\phi}(p_1,2).c \text{ de } N \text{ dans } \hat{\phi}(3,2).$$

qui commutent avec les projections, d'où une flèche unique $\gamma : N \to \hat{\phi}(3,3)$.
Posons

$$H = Ker(\hat{\phi}(3,\mu).\gamma,\hat{\phi}(\mu,2).c).$$

1.4.2. PROPOSITION *(Réduction des diagrammes).*

$$H \simeq (D_0(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})\phi)(R_1,R_2).$$

En effet, tous deux sont représentants du foncteur $Fonct(\tau_{\mathbf{A}}R_1, \tau_{\mathbf{B}}R_2)$.

COROLLAIRE. $D_0(\phi)$ *est un sous-foncteur de* $\phi \circ (Fl^* \times Fl)$.

2. Extension aux flèches.

2.1. On dispose, pour toute catégorie $\mathbf{A}$, d'un foncteur canonique $Cat_{\mathbf{A}} \to Cat_{Cat_{\mathbf{A}}}$ défini par limites projectives, et noté $Fl_{\mathbf{A}}$; les deux structures canoniques de catégories de $Fl_{\mathbf{A}}(R)$ seront désignées par:

$$(R(2), Q(R), i, s, b, \mu) \quad \text{et} \quad (R(2), Q(R), I, S, B, M)$$

où

$$Q(R) = (R(2) \underset{R(1)}{\times} R(2)) \underset{R(\mu)}{\times} (R(2) \underset{R(1)}{\times} R(2)).$$

La définition de cette structure la fait commuter avec les limites projectives finies, d'où un foncteur

$$P : \{Cat_{\mathbf{B}}, \mathbf{C}\}_{Cat_{\mathbf{A}}} \longrightarrow \{Cat_{\mathbf{B}}, Cat_{\mathbf{C}}\}_{Cat_{\mathbf{A}}},$$

par la structure $Fl_{\mathbf{B}}$. On pose:

$$D(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = P \circ D_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}).$$

2.2. REMARQUE 1. La définition par limites projectives fait que P commute avec les intégrales, donc on peut définir directement

$$D(\phi(R_1, R_2)) = \int_{\mathbf{U}} \phi(R_1, Fl(R_2)),$$

ce qui fait de $D(\phi)(R_1, R_2)$ le représentant du foncteur

$$\int_{\mathbf{U}} Fonct(-, \phi(R_1, Fl(R_2))),$$

à valeurs dans Cat, et on peut écrire

$$D(\phi)(R_1, R_2)(2) \simeq \mathfrak{Nat}(\tau_{\mathbf{A}} R_1, \tau_{\mathbf{B}} R_2),$$

ce qui justifie la notation Fl.

2.3. REMARQUE 2. EXEMPLES.

2.3.1. 1° Soit $\mathbf{A}$ une catégorie; appliquons $D(\mathbf{A}, \mathbf{A}, Ens)$ au foncteur *hom*; on obtient le foncteur $Fonct(-,-)$ des foncteurs et transformations naturelles internes.

2.3.2. 2° Comme précédemment $D(hom_{\mathbf{A}})$ dans une catégorie cartésienne fermée est le bifoncteur

$$Fonct_{\mathbf{A}} : Cat^*_{\mathbf{A}} \times Cat_{\mathbf{A}} \longrightarrow Cat_{\mathbf{A}}.$$

2.3.3. 3° (cf. l'exemple 1.2.3.) L'extension du foncteur $Diag_{\mathbf{A}}$ défini en 1.2.3 sera notée $\bar{D}iag_{\mathbf{A}}$; c'est un bifoncteur de $Cat^*_f \times Cat_{\mathbf{A}}$ vers $Cat_{\mathbf{A}}$ qui vérifie :

i) $\bar{D}iag_{Ens} = Fonct$,

ii) $\bar{D}iag_{\mathbf{A}}(\mathbf{1}, R) \simeq R$, $\bar{D}iag_{\mathbf{A}}(\mathbf{2}, R) \simeq Fl(R)$, $\bar{D}iag_{\mathbf{A}}(\mathbf{3}, R) \simeq Comp(R)$ (catégorie des «couples de flèches composables» de R) : on a :

$$\bar{D}iag_{\mathbf{A}}(\mathbf{3}, R) \simeq \bar{D}iag_{\mathbf{A}}(\mathbf{2}, R) \underset{\bar{D}iag(\mathbf{1}, R)}{\times} \bar{D}iag_{\mathbf{A}}(\mathbf{2}, R).$$

2.3.4. Si $\mathbf{A} = \mathbf{1}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ quelconques, on a $\{\mathbf{B}, \mathbf{C}\}_{\mathbf{A}} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ et de plus $D(f) \sim Cat_f(f)$: si f est un foncteur commutant avec les limites finies, $D(f)$ est son extension aux catégories: $Cat_{\mathbf{B}} \to Cat_{\mathbf{C}}$.

3. La bicatégorie $\mathcal{S}$.

3.0. Dans les exemples qui précèdent on dispose de plus de relations entre ces différents bifoncteurs : dans le cas 2.3.2, on dispose des relations

3.0.1.
$$hom(A, hom_{\mathbf{A}}(B, C)) \simeq hom(A \times B, C),$$
$$hom_{\mathbf{A}}(A, hom_{\mathbf{A}}(B, C)) \simeq hom_{\mathbf{A}}(A \times B, C),$$

d'où l'on déduit

$$Fonct(R_3, Fonct_{\mathbf{A}}(R_1, R_2)) \simeq Fonct(R_3 \times R_1, R_2),$$
$$Fonct_{\mathbf{A}}(R_3, Fonct_{\mathbf{A}}(R_1, R_2)) \simeq Fonct_{\mathbf{A}}(R_3 \times R_1, R_2),$$

toutes relations dues à la fermeture cartésienne de $Cat_{\mathbf{A}}$.

3.0.2. Dans l'exemple 2.3.3 de la relation

$$hom_{Ens}(E, hom_{\mathbf{A}}(A, B)) \simeq hom(A, P(E, B))$$

on pourrait déduire directement

$$Fonct(\mathbf{X}, Fonct(R_1, R_2)) \simeq Fonct(R_1, Diag(\mathbf{X}, R_2)).$$

3.0.3. En fait, ces résultats sont des cas particuliers d'un résultat bien plus général : Si $\mathbf{A'}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ sont des catégories et si ϕ est un foncteur : $\mathbf{A}^* \times \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, ψ un foncteur $\mathbf{D}^* \times \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ et F un foncteur $\mathbf{A}' \to \mathbf{A}$ commutant avec les produits fibrés, on a

(i) $D(\psi(-, \phi(-,-))) \simeq D(\psi)(-, D(\phi(-,-)))$,

(ii) $D(\phi(F-,-)) \simeq D(\phi)(Cat_F -,-)$,

ce que l'on peut exprimer de manière plus catégorique.

3.1.1. Le produit direct étant choisi dans *Cat* de la manière classique, pour tout quintuplet $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{C}', \mathbf{C}'')$ de catégories on définit un bifoncteur $c_{\mathbf{AB}}(\mathbf{C}'', \mathbf{C}', \mathbf{C})$ par le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\{\mathbf{C}', \mathbf{C}''\}_{\mathbf{B}} \times \{\mathbf{C}, \mathbf{C}'\}_{\mathbf{A}} \arrow[d] \arrow[dr, "c_{\mathbf{AB}}(\mathbf{C}'', \mathbf{C}', \mathbf{C})"] & \\
Fonct(\mathbf{A}^* \times \mathbf{B}^*, (\mathbf{C}', \mathbf{C}'') \times (\mathbf{C}, \mathbf{C}')) \arrow[r, "Fonct(\mathbf{A}^* \times \mathbf{B}^*, \circ)"'] & \{\mathbf{C}, \mathbf{C}''\}_{\mathbf{B} \times \mathbf{A}}
\end{tikzcd}$$

3.1.2. Pour deux catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ notons $\{\mathbf{C}, \mathbf{C}'\}$ la catégorie définie comme suit :

- $Ob(\{\mathbf{C}, \mathbf{C}'\}) = \{(\mathbf{A}, f) \mid \mathbf{A} \in Cat,\ f \in \{\mathbf{C}, \mathbf{C}'\}_{\mathbf{A}}\}$.

- Une flèche de source $(\mathbf{A}, f)$, de but $(\mathbf{A}', f')$ est un couple (G, a), où G est un isomorphisme de source $\mathbf{A}$ et de but $\mathbf{A}'$ et a une transformation naturelle de source f et de but $f'G$.

- Si (G, a) est de source $(\mathbf{A}, f)$, de but $(\mathbf{A}', f')$ et (G', a') de source $(\mathbf{A}', f')$ et de but $(\mathbf{A}'', f'')$, le composé est défini par :

$$(G', a').(G, a) = (G'.G, (a' \circ G)a).$$

Par ailleurs les bifoncteurs $c_{\mathbf{AB}}(\mathbf{C}'', \mathbf{C}', \mathbf{C})$ définissent un bifoncteur

$$c(\mathbf{C}'', \mathbf{C}', \mathbf{C}) : \{\mathbf{C}', \mathbf{C}''\} \times \{\mathbf{C}, \mathbf{C}'\} \longrightarrow \{\mathbf{C}, \mathbf{C}''\}.$$

L'isomorphisme d'associativité du produit direct de *Cat* :

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{A}') \times \mathbf{A}'' \xrightarrow{\sim} \mathbf{A} \times (\mathbf{A}' \times \mathbf{A}'') \quad \text{et} \quad \mathbf{A} \times 1 \xleftarrow{\sim} \mathbf{A} \xrightarrow{\sim} 1 \times \mathbf{A}$$

permettent i) d'identifier $\{\mathbf{C}, \mathbf{C}'\}_1$ et $(\mathbf{C}, \mathbf{C}')$, ii) de définir deux équivalences fonctorielles :

$$\begin{tikzcd}
\{\mathbf{C},\mathbf{C}'\}\times 1 \arrow[r, "id\times 1_{\mathbf{C}}"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Longrightarrow"] & \{\mathbf{C},\mathbf{C}'\}\times\{\mathbf{C},\mathbf{C}\} \arrow[dl, "c"] \arrow[dl, phantom, shift left=3ex, "d(\mathbf{C},\mathbf{C}')"] \\
\{\mathbf{C},\mathbf{C}'\} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1\times\{\mathbf{C},\mathbf{C}'\} \arrow[r, "1_{\mathbf{C}'}\times id"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Longrightarrow"] & \{\mathbf{C}',\mathbf{C}'\}\times\{\mathbf{C},\mathbf{C}'\} \arrow[dl, "c"] \arrow[dl, phantom, shift left=3ex, "g(\mathbf{C},\mathbf{C}')"] \\
\{\mathbf{C},\mathbf{C}'\} &
\end{tikzcd}$$

iii) de définir pour tout quadruplet $(\mathbf{C}''',\mathbf{C}'',\mathbf{C}',\mathbf{C})$ une équivalence fonctorielle entre les foncteurs

$c(\mathbf{C}''',\mathbf{C}'',\mathbf{C})\circ(id\times c(\mathbf{C}'',\mathbf{C}',\mathbf{C}))$ et $c(\mathbf{C}''',\mathbf{C}',\mathbf{C})\circ(c(\mathbf{C}',\mathbf{C}'',\mathbf{C}''')\times id)$.

$$\begin{tikzcd}
\{\mathbf{C}''',\mathbf{C}''\}\times\{\mathbf{C}'',\mathbf{C}'\}\times\{\mathbf{C}',\mathbf{C}\} \arrow[r, "c\times id"] \arrow[d, "id\times c"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{a(\mathbf{C}''',\mathbf{C}'',\mathbf{C}',\mathbf{C})}{\underset{\sim}{\Rightarrow}}"] & \{\mathbf{C}''',\mathbf{C}'\}\times\{\mathbf{C}',\mathbf{C}\} \arrow[d, "c"] \\
\{\mathbf{C}''',\mathbf{C}''\}\times\{\mathbf{C}'',\mathbf{C}\} \arrow[r, "c"'] & \{\mathbf{C}''',\mathbf{C}\}
\end{tikzcd}$$

Les diagrammes de cohérence sont commutatifs parce que ceux se rapportant au produit direct le sont. Ce qui précède se résume en une proposition :

3.1.3. PROPOSITION. *Les données suivantes :*

(i) $\mathcal{S}_0$ *la famille des catégories à limites projectives finies ;*

(ii) pour tout couple $(\mathbf{C},\mathbf{C}')$ *dans* $\mathcal{S}_0$, *la catégorie* $\{\mathbf{C},\mathbf{C}'\}$,

(iii) pour tout triplet $(\mathbf{C},\mathbf{C}',\mathbf{C}'')$ *de* $\mathcal{S}_0$ *le bifoncteur* $c(\mathbf{C},\mathbf{C}',\mathbf{C}'')$,

(iv) pour tout élément $\mathbf{C}$ *de* $\mathcal{S}_0$ *de* $id_{\mathbf{C}}$,

(v) pour tout quadruplet $(\mathbf{C}''',\mathbf{C}'',\mathbf{C}',\mathbf{C})$ *de* $\mathcal{S}_0$ *l'équivalence*

$$a(\mathbf{C}''',\mathbf{C}'',\mathbf{C}',\mathbf{C}),$$

(vi) pour tout couple $(\mathbf{C},\mathbf{C}')$ *de* $\mathcal{S}_0$ *les deux équivalences* $g(\mathbf{C},\mathbf{C}')$,

et $d(\mathbf{C}, \mathbf{C'})$,

définissent une bicatégorie que l'on notera $\mathcal{S}$ *et dont la composition sera notée* $\circ$.

4. L'homomorphisme de bicatégories D.

4.1. THEOREME. *(i) La correspondance* $\mathbf{C} \to Cat_{\mathbf{C}}$, *application de* $\mathcal{S}_0$ *dans* $\mathcal{S}_0$, *et la famille des bifoncteurs* $D(\{\mathbf{C}, \mathbf{C'}\})$ *définissent un homomorphisme de bicatégories de source et but* $\mathcal{S}$ *(déduit de* D*);*

(ii) de plus $D(\phi(F-,-)) \simeq D(\phi)(Cat_F -,-)$.

4.2. *Démonstration de (ii).* Pour toute flèche y de $\mathbf{U}$ notons e_y l'évaluation sur y (flèche de $Fonct(Cat_{\mathbf{A}}, \mathbf{A})$); par définition de $Cat(F)$, on a : $F_* e_y = e_{y*} Cat(F)$ soit, pour tout $\eta : \phi \to \phi'$:

$$\eta_* (F^* e_y^* \times e_{y'}) = \eta_* (F^*_* e_y^* \times e_{y'}) = \eta_* (e_y^* Cat_F^* \times e_{y'}).$$

Il en résulte que les deux membres de (ii) sont limites des mêmes diagrammes.

4.3. $D(id_{\mathbf{C}}) = id_{Cat_{\mathbf{C}}}$: il suffit d'appliquer la remarque 2.3.4 dans ce cas particulier.

4.4. *Compatibilité avec la composition.* La démonstration peut se faire point par point et nous sommes ramenés à étudier l'équivalence

4.4.1. $$D(\phi \circ \psi)(R_1, R_2, R_3) \simeq D(\phi) \circ D(\psi)(R_1, R_2, R_3).$$

Par ailleurs l'extension aux flèches commutant avec les opérateurs, il suffit de démontrer que

$$D_0(\phi \circ \psi)(R_1, R_2, R_3) \simeq (D(\phi) \circ D(\psi))_0 (R_1, R_2, R_3)$$

c'est-à-dire

4.4.2. $$D(\phi \circ \psi)(R_1, R_2, R_3) \simeq D_0(\phi) \circ D(\psi)(R_1, R_2, R_3),$$

Ramenons-nous aux définitions des différents membres :

4.4.2.1. $$D_0(\phi \circ \psi)(R_1, R_2, R_3) \simeq \int_{<(R_1, R_2), R_3>} \phi \circ \psi (R_1, R_2, R_3),$$

$$D_0(\phi) \circ D(\psi)(R_1, R_2, R_3) \simeq \int_{<R_1, FlR_3>} \phi(R_1, \int_{<R_2, R_3>} \psi(R_2, Fl(R_3))),$$

$$D\circ(\phi)\,D(\psi)\,(R_1, R_2, R_3) \simeq \int_{<(R_1, R_2), Fl(R_3)>} \phi\circ\psi(R_1, R_2, Fl(R_3)).$$

On a donc la situation suivante : un foncteur $\Pi: \mathbf{U}^*\times\mathbf{U}^*\times\mathbf{U}\to\mathbf{D}$ tel que le morphisme $\mathbf{U}\to Fonct(\mathbf{U}^*\times\mathbf{U}^*, \mathbf{D})$ soit une catégorie et F_1 et F_2 deux foncteurs :

$$F_1 = \Pi\circ(\delta\times id): \mathbf{U}^*\times\mathbf{U}\to\mathbf{D}, \quad F_2 = Fl(\Pi): \mathbf{U}^*\times\mathbf{U}^*\times\mathbf{U}\times\mathbf{U}\to\mathbf{D}.$$

Il faut démontrer que

4.4.2.2. $$\int_{\mathbf{U}} F_1 \simeq \int_{\mathbf{U}\times\mathbf{U}} F_2 .$$

Par ailleurs il est bien clair qu'en appliquant le foncteur $hom(d, -)$ à ces objets on peut se ramener au cas où $\mathbf{D} = Ens$. Donc le théorème sera démontré si le lemme suivant est vrai :

4.4.3. LEMME. *Soient F_1 et F_2 comme dans 4.4.2.2 avec $\mathbf{D} = Ens$; alors* $\int_{\mathbf{U}} F_1 = \int_{\mathbf{U}\times\mathbf{U}} F_2$.

4.4.3.1. $\int_{\mathbf{U}} F_1 = \{ x \in \Pi(2,2,2) \mid M(x) \}$, $M(x)$ étant la propriété

$$\Pi(i\partial_0, i\partial_0, 2)(x) = \Pi(2,2,i\partial_0)(x) \text{ et}$$
$$\Pi(i\partial_1, i\partial_1, 2)(x) = \Pi(2,2,i\partial_1)(x) \text{ et}$$
$$\Pi(\mu, \mu, 2)(x) = \Pi(2,2,\mu)((x,x)).$$

$$\int_{\mathbf{U}\times\mathbf{U}} F_2 = \{ y \in Fl(\Pi)(2,2,2,2) \mid M_1(y) \text{ et } M_2(y) \},$$

où M_1 exprime, de la même manière que M, la compatibilité de R_2 et de la première structure de Fl et M_2 la compatibilité de R_1 et de la deuxième structure de Fl.

En effet, la première relation est l'écriture de 1.4.2 dans le cas de Ens ; la deuxième exprime la représentabilité dans Cat de D.

4.4.3.2. Soit $x \in \int_{\mathbf{U}} F_1$; le quadruplet

$$y(x) = (\Pi(i\partial_1, 2, 2)(x), \Pi(2, i\partial_0, 2)x, \Pi(2, i\partial_1, 2)x, \Pi(i\partial_0, 2, 2)x)$$

est dans $Fl(\Pi)(2,2,2,2)$, car x vérifie M ; pour la même raison, $y(x)$ vérifie M_1 et M_2. Donc on a une application $f: \int_{\mathbf{U}} F_1 \to \int_{\mathbf{U}\times\mathbf{U}} F_2$.

Soit l'application $\bar{g}: \int_{\mathbf{U}\times\mathbf{U}} F_2 \to \Pi(2,2,2)$ «diagonale» définie par le diagramme

$$\int_{\mathbf{U}\times\mathbf{U}} F_2 \xrightarrow{\circ} \Pi(2,2,3) \xrightarrow{\Pi(2,2,\mu)} \Pi(2,2,2).$$

Si y vérifie M_1 et M_2 , $\bar{g}(y)$ vérifie M, d'où l'application

$$g : \int_{\mathbf{U}\times\mathbf{U}} F_2 \to \int_{\mathbf{U}} F_1 .$$

Par ailleurs

$$\Pi(2,2,\mu).(\Pi(i\partial_1,2,2)(x),\Pi(2,i\partial_0,2)(x))=$$

$$\Pi(\mu.(i\partial_{1*}2),\mu.(2*i\partial_0),2)(x)=\Pi(2,2,2)(x)=x,$$

donc $gf=1$; il en est de même pour fg.

5. Corollaires du théorème 4.1.

1° Les exemples de relations données en 3.0.1 et 3.0.2 sont des applications immédiates de 4.1.

2° Si on dispose sur une catégorie $\mathbf{C}$ d'une structure monoïdale fermée de composition $\otimes$ et de fermeture $(-,-)$, si $\otimes$ commute avec les produits fibrés finis ou si $Fonct(\mathbf{U},\mathbf{C})$ possède un foncteur «catégorie» associée, notons dans ces deux cas $Cat(\otimes)$ le foncteur de $Cat_{\mathbf{C}} \times Cat_{\mathbf{C}}$ vers $Cat_{\mathbf{C}}$ obtenu. On a alors

$$Fonct(Cat(\otimes)-,-) \simeq Fonct(-,(-,-)).$$

Plus généralement, soit (f,u) un couple d'adjoints tels que f commute avec les produits fibrés; alors $Cat(f)$ et $Cat(u)$ sont 2-adjoints (f pourra être une image réciproque et u un π_λ).

Bibliographie.

[1] BASTIANI-EHRESMANN, Categories of sketched structures, *Cahiers de Top. et Géom. diff.* XIII-2 (1972).

[2] J. BENABOU, Introduction to bicategories, *Lecture Notes in Mathematics* n° 47, Springer (1967).

[3] J. BENABOU, *Les distributeurs,* Inst. Math. Univ. Louvain (multigraphié), n° 33 (1973).

[4] FOLTZ-LAIR, Fermeture standard des catégories algébriques, *Cahiers de Top. et Géom. diff.* XIII-3 (1972).

[5] KELLY-MAC LANE, Coherence in categories, *Lecture Notes in Mathematics* n° 281, Springer (1972).

[6] S. MAC LANE, *Categories for the working mathematician,* Springer 1972.

Département de Mathématiques
Université Paris VII, Tour 45,
2, Place Jussieu
75005 PARIS.