CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

RENÉ GUITART

Remarques sur les machines et les structures

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 15, n° 2 (1974), p. 113-144

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1974__15_2_113_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE Vol. XV-2
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

REMARQUES SUR LES MACHINES ET LES STRUCTURES *

par René GUITART

L'idée essentielle que l'on voudrait dégager ici est que la théorie des structures pourrait être fondée sur la notion de machine (la donnée d'un type de structure τ s'assimilant à la donnée d'une machine μ_τ, et un modèle de la théorie τ dans la théorie τ' étant la donnée d'un morphisme de μ_τ vers $\mu_{\tau'}$). Pour suggérer ce fait on indique au paragraphe 4 comment quelques présentations de la notion de structure (telles les théories des esquisses et des algèbres de monades) se réduisent à la fabrication de machines particulières; on donne à ce propos des constructions basées sur la notion d'ébauche [8], une ébauche étant la donnée d'endomorphismes locaux sur une catégorie, i.e. un type spécial de machine. Les variations qui suivent sur le thème des monades et de la représentation des structures (R-algèbres, J-ades, submonades, ...) semblent utiles en soi à cause des nombreux exemples que chacun peut en trouver, mais sont surtout destinées à cerner les problèmes qu'il est utile d'aborder dans le contexte des machines; ces questions ont fait l'objet d'exposés plus détaillés au Séminaire Bastiani-Ehresmann durant l'année 1972-73, et les exemples intéressants proviennent de [10b] et [10c].

En réalité les diverses théories des structures que l'on connait actuellement sont basées ou bien sur la théorie des relations (e.g. théories formelles du 1er ordre), ou bien sur la théorie des catégories (e.g. monades, esquisses), de sorte que, si l'on en envisage une synthèse décente, il est naturel d'abord d'en placer les ingrédients (relations, catégories, ...) dans un même contexte simple. Pour cela il convient de développer une théorie abstraite des relations dans une catégorie quelconque (voir à ce sujet [10c]), puis de particulariser à $\mathcal{C}at$: or précisément il semble que les machines soient aux catégories ce que les relations sont aux ensembles. Ceci se conçoit aisément si l'on note la forte analogie

* Conférence donnée au Colloque d'Amiens 1973.

entre la suite

$$\text{«}\mathcal{E}ns \quad / \quad \text{topos} \quad / \quad \text{monade des parties»}$$

et la suite

$$\text{«}\mathcal{C}at \quad / \quad \text{di-topos ou 2-topos} \quad / \quad \text{bi-monade des diagrammes»}.$$

La recherche d'une monade involutive (cf. [10c]) sur la catégorie $\mathcal{C}at$ «analogue» à la monade des parties sur la catégorie $\mathcal{E}ns$ est en fait la raison qui nous a conduit à la bi-monade $\mathfrak{D}$ (paragraphes 1 et 2) (pour finalement aboutir à la monade involutive $\mathbf{2}^{(-)}$ sur $\mathcal{C}at$). Et puis l'examen de la catégorie de Kleisli de $\mathfrak{D}$ a montré qu'un morphisme de cette catégorie était un bon outil étendant, à la fois, le concept de machine avec sortie utilisé en théorie des automates, et le concept d'ébauche avec lequel nous avions travaillé antérieurement [8] pour essayer de faire une synthèse entre le point de vue des esquisses et celui des espèces de structures et catégories d'opérateurs. On pourrait noter que les distributeurs (ou bi-modules généralisés) sont plus précis que les machines, surtout parce que leur composition $\otimes$ est plus «fine», mais on rencontre néanmoins de nombreuses situations naturelles (en Analyse par exemple, cf. [14]) dans lesquelles se présentent des spans $A \xleftarrow{F} K \xrightarrow{G} B$ où F est une fibration mais où G n'est absolument pas une cofibration.

Aux paragraphes 1 et 2 donc, on construit la bi-monade $\mathfrak{D}$, en réalité remarquée déjà par d'autres auteurs ([11] et [13]), mais en basant la démonstration sur la proposition 1 de manière à préparer une construction analogue dans éventuellement d'autres bi-catégories que $\mathcal{C}at$. On démontre que sa bi-catégorie de Kleisli est isomorphe à la bi-catégorie des machines avec sorties, où la composition se fait par produits fibrés.

Comme on a ensuite en vue l'étude des structures à l'aide des machines, afin d'avoir des théorèmes d'existence de structures libres, on donne au paragraphe 3 une généralisation de l'"extension de Kan appelée extension de Kan avec paramètres, car l'on récupère l'extension ordinaire lorsque les foncteurs «paramètres» considérés $(p, \bar{p}$ et $\hat{p})$ sont tous constants sur $\mathbf{1}$.

On a expliqué plus haut ce que l'on trouve au paragraphe 4.

Les résultats des paragraphes 1, 2 et 3 ont été résumés dans une conférence en juillet 73 ([9b]) et une note ([9a]). Pour le paragraphe 4 et encore le 3 on en trouve des traces dans une conférence de Septembre 72 à Varna ([8]).

U.E.R. de Mathématiques
Université Paris 7, Tour 45
2 Place Jussieu
75005 PARIS

1. Diagrammes et produits croisés.

Soit $\mathfrak{U}$ et $\hat{\mathfrak{U}}$ deux univers tels que $\mathfrak{U} \in \hat{\mathfrak{U}}$ et que $\mathfrak{U} \subset \hat{\mathfrak{U}}$, *Cat* et $\widehat{Cat}$ les catégories correspondantes de foncteurs, et $\mathcal{C}at$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{Cat}$ ayant pour objets les catégories C telles que pour tout $c, c' \in |C|$ (classe des objets de C) on ait $Hom_C(c, c') \in \mathfrak{U}$.

Pour tout $A \in |\mathcal{C}at|$, soit $\mathfrak{D}A \in |\mathcal{C}at|$ la catégorie ayant pour objets les foncteurs $p: X \to A$ où $X \in |Cat|$, et où un morphisme de p vers $p': X' \to A$ est un couple (f, l), où $f: X \to X'$ est un foncteur et $l: p \to p'.f$ une transformation naturelle. La composition est définie par

$$(f', l').(f, l) = (f'.f, (l'.f) \square l).$$

On note d_A le foncteur de $\mathfrak{D}A$ vers *Cat* qui à (f, l) associe f. Si $F: A \to B$ est un foncteur, on note $\mathfrak{D}F$ le foncteur de $\mathfrak{D}A$ vers $\mathfrak{D}B$ défini par la composition avec F à gauche. Ainsi on a $\mathfrak{D}\mathbf{1} \simeq Cat$ et, $\check{A}$ désignant l'unique foncteur de A vers $\mathbf{1}$, on a $d_A = \mathfrak{D}\check{A}$.

Le couple $(\mathfrak{D}A, d_A)$ sera désigné par DA, et l'application associant DA à A détermine un foncteur $D: \mathcal{C}at \to \mathcal{C}at/Cat$ que l'on appelle *foncteur diagramme*. ($\mathcal{C}at/Cat$ est la catégorie des flèches de $\mathcal{C}at$ au-dessus de l'objet *Cat* de $\mathcal{C}at$.)

Soit $X \in |\mathcal{C}at|$ et $\pi: X \to Cat$ un foncteur. La catégorie *produit croisé* [2] de π, notée $K\pi$, a pour morphismes les triplets (z, f, u) où $f \in X$, $u \in |\pi(\alpha(f))|$ et $z \in \pi(\beta(f))$, avec $\pi(f)(u) = \alpha(z)$ source de z. La composition y est définie par

$$(z', f', u').(z, f, u) = (z'.\pi(f')(z), f'.f, u),$$

le composé étant défini si et seulement si $u' = \beta(z)$ (but de z). On note k_π le foncteur de $K\pi$ vers X qui à (z, f, u) associe f.

Si $\pi': X' \to Cat$ est un foncteur où $X' \in |\mathcal{C}at|$, $G: X \to X'$ un foncteur et $\lambda: \pi \to \pi'.G$ une transformation naturelle, on définit le foncteur $K\langle G, \lambda\rangle$ de $K\pi$ vers $K\pi'$ par:

$$K\langle G, \lambda\rangle(z, f, u) = (\lambda_{\beta(f)}(z), G(f), \lambda_{\alpha(f)}(u)).$$

En particulier, si l'on se restreint aux $X, X' \in |Cat|$, on voit que K- détermine un foncteur noté $\mathbf{K}_1: \mathfrak{D}Cat \to Cat$. De même (si λ est l'identité) on voit que K- détermine un foncteur noté $K : \mathcal{C}at/Cat \to Cat$, que l'on appelle *foncteur produit croisé*.

REMARQUE. Si X est fixé et si l'on regarde les (G, λ), où G est l'identité sur X, en associant à $\pi : X \to Cat$ le foncteur k_π et à $\lambda : \pi \to \pi'$ le foncteur $K\langle Id_X, \lambda\rangle$, on détermine un foncteur $k_{(X)} : Cat^X \to \mathcal{C}at/X$. En associant à tout foncteur $M : Y \to X$ où $X, Y \in |Cat|$ le foncteur $M^\S : X \to Cat$ dont la valeur en $x \in |X|$ est la catégorie comma (M, x), on détermine un foncteur $(\cdot)^\S(X) : Cat/X \to Cat^X$. Si $X \in |Cat|$, alors $k_{(X)}$ est en fait à valeurs dans Cat/X.

PROPOSITION 0 (J. GRAY). *Si* $X \in |Cat|$, *le foncteur*

$$k_{(X)} : \dot{C}at^X \to \dot{C}at/X$$

est adjoint à droite au foncteur $(\cdot)^\S(X) : Cat/X \to Cat^X$.

On trouvera la démonstration dans [7]. Nous indiquons ce résultat uniquement pour que le lecteur ne le confonde pas avec la proposition 1 ci-dessous. La proposition 0 ne sera jamais utilisée dans ce travail.

On désigne par P_1 et P_2 les foncteurs de Cat vers Ens associant à une catégorie $C \in |Cat|$ l'ensemble $|C|$ de ses objets et l'ensemble $\underline{C}$ de ses morphismes, par P'_1 et P'_2 leurs adjoints à gauche.

Pour un foncteur $\pi : X \to Cat$ avec $X \in |\mathcal{C}at|$ on note $H\pi$ la catégorie $K(P'_1 \cdot P_1 \cdot \pi)$; ses morphismes s'identifient aux couples

$$(f, u), \text{ où } f : e \to e' \in X \text{ et où } u \in |\pi(e)|,$$

la composition étant définie par

$$(f', u').(f, u) = (f'.f, u)$$

si et seulement si $u' = \pi(f)(u)$. On désigne par $h_\pi : H\pi \to K\pi$ le foncteur qui à (f, u) associe $(\pi(f)(u), f, u)$.

Si $\pi, \pi' : X \to Cat$ sont deux foncteurs de source $X \in |\mathcal{C}at|$, la donnée d'une transformation naturelle $t : \pi \to \pi'$ équivaut à la donnée d'un *morphisme plat* de k_π vers $k_{\pi'}$, c'est-à-dire d'un foncteur $T : K\pi \to K\pi'$ tel que $k_{\pi'} \cdot T = k_\pi$ et que $T \cdot h_\pi$ factorise à travers $h_{\pi'}$. (Si t est donnée, on lui associe $T = K\langle Id_X, t\rangle$; autrement dit T est défini par

$$T(z,f,u)=(t_{\beta(f)}(z),f,t_{\alpha(f)}(u)).)$$

PROPOSITION 1. *Le foncteur* $K:\mathcal{C}at/Cat \to \mathcal{C}at$ *est adjoint à gauche au foncteur* $D:\mathcal{C}at \to \mathcal{C}at/Cat$.

DEMONSTRATION. Soit $\pi : X \to Cat$ un foncteur, avec $X \in |\mathcal{C}at|$. Pour tout $e \in |X|$ notons $i_e : \pi(e) \rightarrowtail K\pi$ le foncteur associant $(z, e, \alpha(z))$ à $z \in \pi(e)$, pour $f: e \to e'$ dans X désignons par $\lambda_f : i_e \to i_{e'} . \pi(f)$ la transformation naturelle définie par

$$\lambda_f(u)=(\pi(f)(u),f,u) \quad \text{pour} \quad u \in |\pi(e)|.$$

On définit le foncteur $l_\pi : X \to \mathfrak{D}K\pi$ en associant $l_\pi(e)=i_e$ à $e \in |X|$ et à $f: e \to e' \in X$ le morphisme dans $\mathfrak{D}K\pi$ de i_e vers $i_{e'}$ déterminé par le couple $(\pi(f), \lambda_f)$. On vérifie que $d_{K\pi} . l_\pi = \pi$, de sorte que l_π détermine un morphisme noté L_π dans $\mathcal{C}at/Cat$ de π vers $d_{K\pi}$.
Montrons que $(K\pi, L_\pi)$ détermine $K\pi$ comme D-structure libre sur π. Soit $Y \in |\mathcal{C}at|$ et $\Phi : X \to \mathfrak{D}Y$ un foncteur tel que $\pi = d_Y . \Phi$. On pose

$$\Phi(f)=(\pi(f),\check{\Phi}(f)) \quad \text{pour tout} \quad f \in X,$$

et on cherche un unique $\overline{\Phi} : K\pi \to Y$ tel que $\Phi = \mathfrak{D}\overline{\Phi} . l_\pi$. Pour (z,f,u) de $K\pi$ on a, avec $f: e \to e'$,

$$(z,f,u)=(z,e',\alpha(z)).(\pi(f)(u),f,u),$$

de sorte que

$$(z,f,u) \in [i_{e'}(\pi(e'))] . [h_\pi(H\pi)].$$

Donc un foncteur $F: K\pi \to Y$ est complètement déterminé par les composés

$$F . h_\pi : H\pi \to Y \quad \text{et} \quad F . i_e : \pi e \to Y \quad \text{pour tout} \quad e \in |X|.$$

Or si l'on regarde $\mathfrak{D}F . l_\pi$ on a, pour $e \in |X|$:

$$(\mathfrak{D}F . l_\pi)(e) = \mathfrak{D}F(i_e) = F . i_e$$

et, pour $f: e \to e'$:

$$(\mathfrak{D}F . l_\pi)(f) = \mathfrak{D}F(\lambda_f),$$

soit pour $u \in \pi(e)$:

$$(\mathfrak{D}F \,.\, l_\pi)(f)(u) = (\mathfrak{D}F(\lambda_f))(u) = F(\pi(f)(u), f, u)\,,$$

$$(\mathfrak{D}F \,.\, l_\pi)(f)(u) = (F \,.\, h_\pi)(f, u).$$

Ainsi Φ étant donné comme plus haut, $\overline{\Phi}$ est nécessairement unique et défini par

$$\overline{\Phi} \,.\, i_e = \Phi(e) \quad \text{et} \quad (\overline{\Phi} \,.\, h_\pi)(f, u) = \check{\Phi}(f)(u)$$

ou encore, pour $(z, f, u) \in K\pi$ avec $f : e \to e'$:

$$\overline{\Phi}(z, f, u) = \overline{\Phi}(z, e', \alpha(z)) \,.\, \overline{\Phi}(\pi(f)(u), f, u)$$

ou

$$\overline{\Phi}(z, f, u) = (\Phi(e')(z)) \,.\, (\check{\Phi}(f)(u)).$$

Il reste à vérifier que $\overline{\Phi}$ est bien un foncteur, ce qui est facile, compte-tenu de la fonctorialité des $\Phi(e)$ et de la naturalité des $\check{\Phi}(f)$.

Notons comme corollaire que, si X et $Y \in |\mathcal{C}at|$ et si $G : X \to \mathfrak{D}Y$ est un foncteur quelconque, il lui est associé un foncteur

$$\overline{G} : K(d_Y \,.\, G) \to Y,$$

où $K(d_Y \,.\, G)$ est la catégorie produit croisé du foncteur $d_Y \,.\, G : X \to Cat$ (à ne pas confondre avec le foncteur $K\langle d_Y \,.\, G, Id\rangle$ de $K(d_Y \,.\, G)$ vers $K(Id_{Cat})$). Ce foncteur $\overline{G}$ sera noté désormais $\mathbf{K}_Y G$.

En particulier si $X \in |Cat|$, alors

$$K(d_Y \,.\, G) \in |Cat|, \qquad G \in |\mathfrak{D}^2 Y| \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_Y G \in |\mathfrak{D}Y|.$$

Soit $X, X' \in |Cat|$, $Y \in |\mathcal{C}at|$, $G : X \to \mathfrak{D}Y$ et $G' : X' \to \mathfrak{D}Y$ deux foncteurs, et $(F, \Phi) : G \to G'$ un morphisme dans $\mathfrak{D}^2 Y$. Donc F est un foncteur de X dans X' et Φ une transformation naturelle de G vers $G' \,.\, F$; $\Phi(e)$, pour tout $e \in |X|$, consiste en un morphisme (f_e, ϕ_e) dans $\mathfrak{D}Y$ de $G(e)$ vers $G' \,.\, F(e)$, d'où le morphisme $(K\langle F, d_Y \,.\, \Phi\rangle, \tilde{\phi})$ de $\mathbf{K}_Y G$ vers $\mathbf{K}_Y G'$ dans $\mathfrak{D}^2 Y$, que l'on notera $\mathbf{K}_Y\langle F, \Phi\rangle$, en posant

$$\tilde{\phi}(u, e, u) = \phi(e)(u).$$

PROPOSITION 2. *En associant* $\mathbf{K}_Y\langle F, \Phi\rangle$ *à tout* (F, Φ) *de* $\mathfrak{D}^2 Y$, *on détermine un foncteur* $\mathbf{K}_Y : \mathfrak{D}^2 Y \to \mathfrak{D}Y$, *et en associant à tout* $Y \in |Cat|$

le foncteur $\mathbf{K}_Y$, *on détermine une transformation naturelle* $\mathbf{K}:\mathfrak{D}^2 \to \mathfrak{D}$.

La vérification est aisée, nous ne la donnons pas ici.

Par ailleurs, pour tout $Y \in |\mathcal{C}at|$, on désigne par $\mathbf{U}_Y$ le foncteur de Y vers $\mathfrak{D}Y$ qui à $e \in |Y|$ associe $\mathbf{U}_Y(e): \mathbf{1} \to Y: 1 \mapsto e$ et qui à f de e vers e associe le morphisme $(Id_1, \tilde{f})$ de $\mathbf{U}_Y(e)$ vers $\mathbf{U}_Y(e')$ défini par $\tilde{f}_1 = f$. Il est clair qu'en associant ainsi à tout Y le foncteur $\mathbf{U}_Y$ on détermine une transformation naturelle $\mathbf{U}: Id_{\mathcal{C}at} \to \mathfrak{D}$.

Si $F: A \to Y$ est un objet de $\mathfrak{D}Y$, $\mathbf{U}_{\mathfrak{D}Y}(F): \mathbf{1} \to \mathfrak{D}Y$ est le foncteur constant sur F et $\mathbf{K}_Y(\mathbf{U}_{\mathfrak{D}Y}(F)): \mathbf{1} \times A \times \mathbf{1} \to Y$ est le foncteur défini par

$$\mathbf{K}_Y(\mathbf{U}_{\mathfrak{D}Y}(F))(1, a, 1) = F(a).$$

Si, pour tout $A \in |Cat|$, on désigne par γ_A l'isomorphisme de A sur $\mathbf{1} \times A \times \mathbf{1}$, l'application de $\mathfrak{D}Y$ dans lui-même qui à $F: A \to Y$ associe $F \cdot \gamma_A^{-1}$ détermine un isomorphisme λ_Y de $\mathfrak{D}Y$ sur $\mathfrak{D}Y$ et on a

$$\mathbf{K}_Y \cdot \mathbf{U}_{\mathfrak{D}Y} = \mathbf{K}_Y \cdot \mathfrak{D}\mathbf{U}_Y = \lambda_Y.$$

Enfin si l'on compare $\mathbf{K}_Y \cdot \mathfrak{D}\mathbf{K}_Y$ et $\mathbf{K}_Y \cdot \mathbf{K}_{\mathfrak{D}Y}$ on constate qu'ils sont égaux à un isomorphisme près:

Soit $F: A \to \mathfrak{D}^2 Y$ un objet de $\mathfrak{D}^3 Y$; désignons par ΓF l'ensemble des triplets (a, b, c), où

$$a \in |A|, \quad b \in |d_{\mathfrak{D}Y}(F(a))| \quad \text{et} \quad c \in |d_Y(F(a)(b))|.$$

En notant H_1 et H_2 les sources de $(\mathbf{K}_Y \cdot \mathfrak{D}\mathbf{K}_Y)(F)$ et $(\mathbf{K}_Y \cdot \mathbf{K}_{\mathfrak{D}Y})(F)$ respectivement, on voit que

$$|H_1| = \{(a, (b, c)) \mid (a, b, c) \in \Gamma F\}$$

et que

$$|H_2| = \{((a, b), c) \mid (a, b, c) \in \Gamma F\}.$$

On a ainsi une bijection entre $|H_1|$ et $|H_2|$, qui se prolonge en un isomorphisme $w_F: H_1 \to H_2$, et on a

$$(\mathbf{K}_Y \cdot \mathfrak{D}\mathbf{K}_Y)(F) = (\mathbf{K}_Y \cdot \mathbf{K}_{\mathfrak{D}Y})(F).w_F \, .$$

En fait w détermine entre $\mathbf{K}_Y \cdot \mathfrak{D}\mathbf{K}_Y$ et $\mathbf{K}_Y \cdot \mathbf{K}_{\mathfrak{D}Y}$ un isomorphisme naturel.

PROPOSITION 3. $\mathbf{D} = (\mathfrak{D}, \mathbf{U}, \mathbf{K}, \lambda, w)$ *est un triple «à isomorphisme près».*

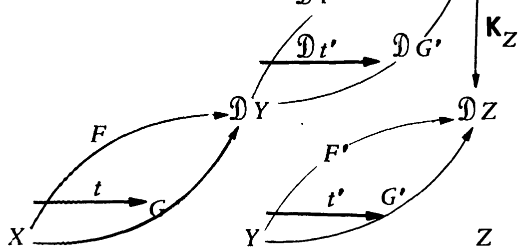
Cette proposition signifie que, si l'on désigne par **CAT** la catégorie quotient de $\mathcal{C}at$ par la congruence qui identifie deux foncteurs s'ils sont naturellement isomorphes, alors **D** induit un triple dans **CAT** (via les isomorphismes naturels λ et w).

Pour cette notion de triple «à isomorphisme près» on pourra aussi se reporter à la définition de A. Kock d'une λ-monade [11]; nous ne détaillerons pas plus ici.

Il n'y a néanmoins aucune difficulté à parler de la «catégorie» de Kleisli du «triple» **D**, qui n'est donc qu'une catégorie «à isomorphisme près», que l'on notera *diag*, et dont un morphisme sera appelé une *famille de diagrammes*. En fait, si $F, G : A \to B$ sont deux foncteurs et $t : F \to G$ une transformation naturelle, on définit $\mathfrak{D}t : \mathfrak{D}F \to \mathfrak{D}G$ en posant:

$$\mathfrak{D}t_\pi = (Id_{\alpha\pi}, t.\pi) \text{ pour } \pi \in |\mathfrak{D}A|.$$

Ceci assure le caractère «doctrinal» de **D**, dont la «catégorie» de Kleisli apparait donc comme une bicatégorie, notée *DIAG*. Il parait naturel de dire que **D** est un *bi-triple* dans $\mathcal{C}at$. La première loi de composition dans *DIAG* (celle provenant de *diag*) sera notée $\circ$ et la deuxième sera notée $\square\square$, comme la composition longitudinale des transformations naturelles. Pour mémoire la composition «o» dans *DIAG* se fait suivant le schéma



et la formule : $t' \circ t = \mathbf{K}_Z . \mathfrak{D} t' . t$.

REMARQUE. Le bi-triple $\mathbf{D}$ est complètement décrit par la donnée de $\mathfrak{D}$, de $\mathbf{K}_1$ et de $\mathbf{U}_1$, car pour tout $P \in |\mathcal{C}at|$, les deux diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{D}^2 P \arrow[r, "\mathfrak{D} d_P"] \arrow[d, "\mathbf{K}_P"'] & \mathfrak{D}(Cat) \arrow[d, "\mathbf{K}_1"] \\ \mathfrak{D} P \arrow[r, "d_P"'] & Cat \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathfrak{D} P \arrow[r, "d_P = \mathfrak{D} \check{P}"] & Cat \\ P \arrow[u, "\mathbf{U}_P"] \arrow[r, "\check{P}"'] & 1 \arrow[u, "\mathbf{U}_1"'] \end{tikzcd}$$

sont des produits fibrés. En fait, pour $P, Q \in |\mathcal{C}at|$ et pour $F : P \to Q$ quelconque, les deux carrés du diagramme

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\mathbf{U}_P"] \arrow[d, "F"'] & \mathfrak{D} P \arrow[d, "\mathfrak{D} F"] & \mathfrak{D}^2 P \arrow[l, "\mathbf{K}_P"'] \arrow[d, "\mathfrak{D}^2 F"] \\ Q \arrow[r, "\mathbf{U}_Q"'] & \mathfrak{D} Q & \mathfrak{D}^2 Q \arrow[l, "\mathbf{K}_Q"] \end{tikzcd}$$

sont cartésiens.

2. Machines et diagrammes.

Soit E un ensemble (appelé ensemble des états), M et N deux monoïdes (dont les éléments sont appelés respectivement signaux d'entrée et signaux de sortie). Une machine d'entrée M et de sortie N sur l'espace E est la donnée d'une action $\bar{\pi} : M \times E \to E$ sur E et d'une application $S : M \times E \to N$ telle que

$$S(m', m \bar{\pi} e) . S(m, e) = S(m' . m, e)$$

et que $S(u, e) = u'$, u et u' étant les unités de M et N.

La donnée de $\bar{\pi}$ équivaut à la donnée d'un foncteur $\pi' : M \to Ens$ défini par

$$\pi'(u) = E \quad \text{et} \quad \pi'(m) = \bar{\pi}(m, \cdot),$$

ou encore à celle du foncteur $P'_1 . \pi' = \pi : M \to Cat$. On a alors la catégorie $K\pi$ (qui dans ce cas est isomorphe à $H\pi$) et le foncteur $k_\pi : K\pi \to M$.

La donnée de π équivaut à celle de la loi de composition de la catégorie $K\pi$, et la donnée de S revient à la donnée d'un foncteur, encore noté S, de $K\pi$ vers N. Finalement la machine $(M, N, E, \overline{\pi}, S) = \mathbf{M}$ est représentée par le diagramme

$$\begin{tikzcd} & K\pi \arrow[dl, "k\pi"'] \arrow[dr, "S"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

DEFINITION 1. Soit M et N deux catégories. On appelle *machine d'entrée* M *et de sortie* N la donnée d'un couple

$$\mathbf{M} = (\pi, S), \text{ où } \pi : M \to Cat \text{ et } S : K\pi \to N$$

sont deux foncteurs. La machine sera dite *discrète* si π est en fait à valeurs dans Ens.

DEFINITION 2. Soit $\mathbf{M} = (\pi, S)$ et $\mathbf{M'} = (\pi', S')$ deux machines d'entrée M et de sortie N. Un *bimorphisme de* $\mathbf{M}$ *vers* $\mathbf{M'}$ consiste en la donnée d'un couple $(T, \widetilde{\Phi})$, où le foncteur $T : K\pi \to K\pi'$ est un morphisme plat de k_π vers $k_{\pi'}$ et où $\widetilde{\Phi} : S \to S'.T$ est une transformation naturelle.

Si $\mathbf{M} : M \xrightarrow{(\pi, S)} N$ et $\mathbf{N} : N \xrightarrow{(\pi', S')} P$ sont deux machines ($\mathbf{M}$ d'entrée M et de sortie N, $\mathbf{N}$ d'entrée N et de sortie P) où $M, N, P \in |Cat|$, la machine composée $\mathbf{N} \bullet \mathbf{M}$ s'obtient par un produit fibré canonique:

$$\begin{tikzcd} & & Z \arrow[dl, "S^* k_{\pi'}"'] \arrow[dr, "k^*_{\pi'} S"] & & \\ & K\pi \arrow[dl, "k_\pi"'] \arrow[dr, "S"] & & K\pi' \arrow[dl, "k_{\pi'}"'] \arrow[dr, "S'"] & \\ M & & N & & P \end{tikzcd}$$

$\mathbf{M}$ étant déterminé par (k_π, S) et $\mathbf{N}$ par $(k_{\pi'}, S')$, il s'agit de vérifier que $(k_\pi . S^* k_{\pi'}, S' . k^*_{\pi'} S)$ détermine une machine d'entrée M et de sortie P; pour cela il faut trouver un

$$\xi : M \to Cat \quad \text{tel que} \quad k_\xi = k_\pi . S^* k_{\pi'},$$

ce qui résulte des lemmes 1 et 2 ci-dessous.

Les machines d'entrée et sortie des éléments de $|\mathcal{C}at|$ s'organisent avec la loi $\bullet$ en une catégorie «à isomorphisme près» notée *mac* . Par ailleurs si $\mathbf{M}=(\pi, S)$, $\mathbf{M}'=(\pi', S')$ et $\mathbf{M}''=(\pi'', S'')$ sont des machines d'entrée M et de sortie N, si $(T, \tilde{\phi})$ est un bimorphisme de $\mathbf{M}$ vers $\mathbf{M}'$ et $(T', \tilde{\phi}')$ un bimorphisme de $\mathbf{M}'$ vers $\mathbf{M}''$, on définit le composé $(T', \tilde{\phi}') \triangleleft\!\triangleright (T, \tilde{\phi})$ comme le bimorphisme $(T' \cdot T, (\tilde{\phi}' . T) \square\!\square \tilde{\phi})$ de $\mathbf{M}$ vers $\mathbf{M}''$, comme on voit sur le dessin.

$$\begin{tikzcd}
 & K\pi \arrow[dl, "S"'] \arrow[d, "T"] \arrow[dr, "k_\pi"] \arrow[dl, phantom, shift left=4, "\Downarrow\tilde{\phi}"] & \\
N & K\pi' \arrow[l, "S'"'] \arrow[r, "k_{\pi'}"] \arrow[d, "T'"] \arrow[dl, phantom, shift right=4, "\Downarrow\tilde{\phi}'"] & M \\
 & K\pi'' \arrow[ul, "S''"] \arrow[ur, "k_{\pi''}"'] &
\end{tikzcd}$$

L'ensemble des bimorphismes entre machines éléments de *mac* est noté *MAC*.

PROPOSITION 4. *Muni des deux lois* $\bullet$ *et* $\triangleleft\!\triangleright$ *l'ensemble MAC devient une bicatégorie.*

THEOREME 1. *Les deux bicatégories DIAG et MAC sont isomorphes.*

La proposition 4 et le théorème 1 résulteront des propositions 5 et 6 et des lemmes 1 et 2 ci-dessous.

PROPOSITION 5. *La donnée d'une machine* $\mathbf{M}=(\pi, S)$ *d'entrée* M *et de sortie* N *équivaut à la donnée d'un foncteur* $\mu_{\mathbf{M}} : M \to \mathfrak{D}N$.

En effet, d'après la proposition 1 la donnée de $S : K\pi \to N$ revient à la donnée de $\mu : M \to \mathfrak{D}N$ tel que $d_N \cdot \mu = \pi$ (et donc, si μ est donné on retrouve $\pi = d_N \cdot \mu$, puis $K\pi$, enfin $S = \mathbf{K}_N \mu$). μ est donné par $\mu = \mathfrak{D}S . l_\pi$.

Pour prouver que $k_\pi . S * k_{\pi'}$ est de la forme k_ξ (voir plus haut) notons d'abord que $S * k_{\pi'} = k_{\pi' . S}$: ceci résulte du

LEMME 1. *Dans le diagramme ci-contre où* $\pi' . G = \pi$, *le carré supérieur est un produit fibré.*

$$\begin{tikzcd}
K\pi' \arrow[d, "k_{\pi'}"'] & & K\pi \arrow[ll, "K<G, Id_\pi>"'] \arrow[d, "k_\pi"] \\
X' \arrow[dr, "\pi'"'] & & X \arrow[ll, "G"'] \arrow[dl, "\pi"] \\
& Cat &
\end{tikzcd}$$

COROLLAIRE. Désignons par $\dot{Cat}$ la catégorie $K(Id_{Cat})$ produit croisé du foncteur identité de Cat vers Cat, et par $k_{Id_{Cat}} = k_0$ le foncteur canonique de $\dot{Cat}$ vers Cat. Alors pour tout $X \in |\mathcal{C}at|$ et $\pi : X \to Cat$ on a $k_\pi \simeq \pi^* k_0$.

On trouve le corollaire dans Gray [7]. La vérification du lemme et du corollaire est immédiate.

Pour trouver ξ ci-dessus on est donc ramené à prouver le

LEMME 2. *Soit $X \in |\mathcal{C}at|$, $\pi: X \to Cat$ et $\rho: K\pi \to Cat$ deux foncteurs; soit $l_\pi : X \to \mathfrak{D} K\pi$ le morphisme défini dans la proposition 1, et soit $\mathbf{K}_1 : \mathfrak{D}(Cat) \to Cat$ la multiplication du bi-triple $\mathbf{D}$ au point $\mathbf{1}$. Alors on a*

$$k_\pi \cdot k_\rho = k_{\mathbf{K}_1 . \mathfrak{D}\rho . l_\pi} .$$

La preuve est sans surprise. Disons seulement que l'on a un isomorphisme de $K\rho$ sur $K(\mathbf{K}_1 . \mathfrak{D}\rho . l_\pi)$ en associant à $(Z, (z, f, u), U)$ de $K\rho$ l'élément

$$((Z, z, u'), f, (U, u, U)) \text{ de } K(\mathbf{K}_1 . \mathfrak{D}\rho . l_\pi),$$

avec $u' = \rho((\pi(f)(u), f, u))(U)$. Ainsi à isomorphisme près la machine composée $\mathbf{N} \bullet \mathbf{M}$ de $\mathbf{M} = (\pi, S)$ et $\mathbf{N} = (\pi', S')$ est le couple

$$(\mathbf{K}_1 . \mathfrak{D}\pi' . \mathfrak{D}S . l_{\pi'}, S' . k^*_{\pi'} S).$$

En désignant par *Span* la catégorie «à isomorphisme près» des spans (ou angles) de $\mathcal{C}at$, où la composition est définie par produits fibrés, on vient de montrer que l'ensemble *mac* forme une «sous-catégorie» de *Span*, notée donc *mac*.

PROPOSITION 6. *Les deux catégories «à isomorphisme près» diag et mac sont isomorphes.*

D'après la proposition 5, en associant $\mu_{\mathbf{M}}$ à $\mathbf{M}$ on établit une bijection de *mac* sur *diag*. Il faut vérifier que celle-ci est compatible avec les compositions dans *mac* et *diag*. Soit

$$\mathbf{M}=(\pi, S),\ \mathbf{N}=(\pi', S'),\ \mu=\mathfrak{D}S.l_{\pi} \text{ et } \nu=\mathfrak{D}S'.l_{\pi'};$$

on a

$$\mathbf{N}\bullet\mathbf{M}=(\mathbf{K}_1.\mathfrak{D}\pi'.\mathfrak{D}S.l_{\pi}, S'.k^*_{\pi'}S);$$

il nous faut établir, puisque $\mathfrak{D}S.l_{\pi}=\mu$, que

$$\nu\circ\mu=\mathfrak{D}(S'.k^*_{\pi'}S).l_{\mathbf{K}_1.\mathfrak{D}\pi'.\mu}$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{K}_P.\mathfrak{D}\nu.\mu=\mathfrak{D}(S'.k^*_{\pi'}S).l_{\mathbf{K}_1.\mathfrak{D}\pi'.\mu}.$$

Remarquons d'abord, pour simplifier les formules par la suite, que

$$\mathbf{K}_1.\mathfrak{D}\pi'.\mu=d_P.(\nu\circ\mu).$$

En effet,

$$\mathbf{K}_1.\mathfrak{D}\pi'=\mathbf{K}_1.\mathfrak{D}(d_P.\nu)=\mathbf{K}_1.\mathfrak{D}(d_P).\mathfrak{D}(\nu),$$

et, pour toute catégorie P, on a

$$\mathbf{K}_1.\mathfrak{D}d_P=d_P.\mathbf{K}_P,$$

de sorte que $\mathbf{K}_1.\mathfrak{D}\pi'=d_P.\mathbf{K}_P.\mathfrak{D}\nu$ et

$$\mathbf{K}_1.\mathfrak{D}\pi'.\mu=d_P.\mathbf{K}_P.\mathfrak{D}\nu.\mu=d_P.(\nu\circ\mu).$$

Ceci dit, la formule que l'on a en vue s'écrit, compte tenu de la valeur de ν :

$$\mathbf{K}_P.\mathfrak{D}(\mathfrak{D}S'.l_{\pi'}).\mu=\mathfrak{D}S'.\mathfrak{D}(k^*_{\pi'}S).l_{d_P.(\nu\circ\mu)}.$$

Or $\mathbf{K}_P.\mathfrak{D}^2S'\simeq\mathfrak{D}S'.\mathbf{K}_{K\pi'}$ (naturalité de $\mathbf{K}$) et il vient à prouver :

$$\mathfrak{D}S'.\mathbf{K}_{K\pi'}.\mathfrak{D}l_{\pi'}.\mu=\mathfrak{D}S'.\mathfrak{D}(k^*_{\pi'}S).l_{d_P.(\nu\circ\mu)};$$

pour cela il suffit que

$$\mathbf{K}_{K\pi'}.\mathfrak{D}l_{\pi'}.\mu=\mathfrak{D}(k^*_{\pi'}S).l_{d_P.(\nu\circ\mu)}.$$

Or, si $\psi: A\to N \in |\mathfrak{D}N|$, on a

$$(\mathbf{K}_{K\pi'}.\mathfrak{D}l_{\pi'})(\psi)=\mathbf{K}_{K\pi'}(l_{\pi'}.\psi);$$

il s'agit donc du foncteur obtenu par la proposition 1 à partir de

$$d_{K\pi'} \cdot l_{\pi'} \cdot \psi = \pi' \cdot \psi ,$$

c'est-à-dire de $k^*_{\pi'} \psi : K(\pi' \cdot \psi) \to K\pi'$. Si $\psi' : A' \to N$ est un autre objet de $\mathfrak{D}N$ et (F, Φ) un morphisme de ψ vers ψ', avec les notations introduites après la proposition 1, le morphisme $(\mathbf{K}_{K\pi'} \cdot \mathfrak{D} l_{\pi'})(F, \Phi)$ est égal à $(K<F, \pi' \cdot \Phi>, \widetilde{\Lambda})$, où Λ est défini par

$$(l_{\pi'} \cdot \Phi)_a = (f_a, \Lambda_a) \text{ pour tout } a \in |A|.$$

Soit maintenant $m : x \to y \in M$ et posons $\mu(m) = (F, \Phi)$. On vient d'expliciter $\mathbf{K}_{K\pi'} \cdot \mathfrak{D} l_{\pi'} \cdot \mu(m)$. Calculons $\mathfrak{D}(k^*_{\pi'} S) \cdot l_{d_P \cdot (\nu \circ \mu)}(m)$: Dans le lemme 2 on a indiqué comment les catégories

$$K(\pi' \cdot S) \quad \text{et} \quad K(\mathbf{K}_1 \cdot \mathfrak{D}(\pi' \cdot S) \cdot l_\pi) \quad (\simeq K(d_P \cdot (\nu \circ \mu)))$$

étaient isomorphes. Si $x \in |M|$, i_x étant l'injection canonique de $\pi(x)$ dans $K\pi$, compte tenu des lemmes 1 et 2 on peut vérifier que

$$l_{d_P \cdot (\nu \circ \mu)}(x) = k^*_{\pi' \cdot S}(i_x)$$

et puis que

$$\mathfrak{D}(k^*_{\pi'} S)(l_{d_P \cdot (\nu \circ \mu)})(x) = k^*_{\pi'}(S \cdot i_x)$$

ou encore $k^*_{\pi'}((\mathfrak{D} S \cdot l_\pi)(x))$ soit $k^*_{\pi'}(\mu(x))$. La vérification complète sur les morphismes m est longue mais sans difficultés particulières.

NOTA. Si $\pi : X \to Cat$ est un foncteur, on aura remarqué ci-dessus le foncteur $k^*_\pi : \mathfrak{D} X \to \mathfrak{D} K\pi$. En fait, on a

$$l_\pi = k^*_\pi \cdot \mathbf{U}_X \quad \text{et} \quad \mathfrak{D} k_\pi \cdot l_\pi = \mathbf{U}_X .$$

Pour terminer la démonstration du théorème 1, il reste essentiellement à vérifier que la donnée d'un bimorphisme de $\mathbf{M}$ vers $\mathbf{M'}$ revient à la donnée d'une transformation naturelle de $\mu_{\mathbf{M}}$ vers $\mu_{\mathbf{M'}}$, ce qui est facile.

REMARQUE 1. *Le cas discret.* Si $\mathbf{M} = (\pi, S)$ et $\mathbf{M'} = (\pi', S')$ sont des machines discrètes, alors $K\pi \simeq H\pi$ et $K\pi' \simeq H\pi'$, de sorte que $T: K\pi \to K\pi'$ est plat si et seulement si $k_{\pi'} \cdot T = k_\pi$. On désigne par MAC_δ la sous-bicatégorie de MAC ayant pour objets les machines discrètes. Désignons par $\mathfrak{D}_\delta$ le sous-foncteur de $\mathfrak{D}$ défini par

$$|\mathfrak{D}_\delta X| = \{ p \in |\mathfrak{D} X| \ \ |\alpha(p) \text{ est une catégorie discrète} \}.$$

$\mathfrak{D}_\delta$ détermine un sous-bi-triple $\mathbf{D}_\delta$ de $\mathbf{D}$ dont la bicatégorie de Kleisli $DIAG_\delta$ est isomorphe à MAC_δ.

Enfin on peut désigner par $MAC_{\delta\sigma}$ la sous-bi-catégorie de MAC_δ dont les bimorphismes sont les $(T, \tilde{\Phi})$ où $\tilde{\Phi} = Id_S$ (avec $S'.T = S$). C'est cette bicatégorie $MAC_{\delta\sigma}$ (alors désignée par MAC) que P. Leroux a décrit [12]. Je finissais la rédaction du § 1 de cet article lorsqu'il m'en a parlé, ce qui m'a évidemment suggéré les considérations ci-dessus (§ 2). Quant au triple $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{C}at$ on en trouve pour la première fois une construction laborieuse dans D. Prochasson [13], la construction de la doctrine $\mathbf{D}_\delta$ (cas discret) préexistant dans un article de W. Lawvere et dans un article de A. Kock, ces constructions étant développées à chaque fois en vue de complétions. (Il est facile de remarquer que X de $\mathcal{C}at$ possède des petites limites inductives si et seulement si $\mathbf{U}_X : X \to \mathfrak{D} X$ possède un adjoint à gauche.)

REMARQUE 2. En réalité une machine discrète est un cas particulier de la notion de *système guidable préférentiel* introduite en 1964 par A. Bastiani dans [14]. Les situations en Analyse étudiées dans [14] sont donc autant d'exemples de machines intéressantes qui d'ailleurs ne sont pas toujours des bifibrations (au sens, par exemple, de M. Bunge [16]).

REMARQUE 3. Une machine est aussi une extension du concept de couple de catégories d'opérateurs de C. Ehresmann [2] ou, ce qui est essentiellement la même chose, du concept de distributeurs (J. Bénabou [15]), un distributeur de X à Y étant un foncteur $\delta : X \times Y^* \to Ens$, ce qui peut se voir - c'est bien connu - comme bifibration : Si $X \in |Cat|$, le composé

$$Cat^X \xrightarrow{k_{(X)}} Cat/X \hookrightarrow \mathfrak{D} X \xrightarrow{d_X} Cat$$

qui à $\pi : X \to Cat$ associe la catégorie $K\pi$ sera noté $K_{(X)}$. Le foncteur de Cat dans Cat qui à toute catégorie C associe la catégorie duale C^* est noté «*». Alors si $X, Y \in |Cat|$ et si $\delta : X \times Y^* \to Cat$ est un foncteur dont l'associé par transposition est noté $\bar{\delta} : X \to Cat^{Y^*}$, le composé

$$* \cdot K_{(Y^*)} \cdot \bar{\delta}$$

est noté $\tilde{\delta} : X \to Cat$, et la catégorie produit croisé $K(\tilde{\delta})$ est notée $\hat{\delta}$. D'après la proposition 1, δ détermine univoquement une machine

$$X \xleftarrow{\beta_\delta} \hat{\delta} \xrightarrow{\alpha_\delta} Y$$

qui est en fait une bifibration. Par exemple, si $X = Y$ et si $\delta = Hom_X$, alors $\hat{\delta} = X^2$. Si $\delta : X \times Y^* \to Ens$ est un distributeur de X vers Y et δ' un distributeur de Y vers Z, le composé $\delta'' = \delta' \otimes \delta$ est défini par $\hat{\delta}'' = \hat{\delta}' \bullet \hat{\delta} / \sim$, où $\hat{\delta}' \bullet \hat{\delta}$ est la source de $\alpha^*_\delta(\beta_{\delta'}) = \beta^*_{\delta'}(\alpha_\delta)$ et où $\sim$ est la relation d'équivalence bicompatible engendrée par les identifications élémentaires

$$(\delta(A, b)(d), d') \simeq (d, \delta'(b, C)(d')),$$

où $d \in \delta(A, B)$, $d' \in \delta'(B', C)$ et $b \in Hom_Y(B, B')$ (voir [15]).

REMARQUE 4. Peu après mon exposé d'Amiens sur ce travail, D. Prochasson a, indépendamment, considéré des objets qu'il a baptisés Sesquifibrations et qui ne sont autres que les machines. Un peu plus tard encore J. Penon a généralisé à une 2-catégorie la construction des machines discrètes. Enfin (conférence à l'université du Sussex en juillet 74) R. Street dans le cadre de ses recherches sur les 2-topos a également considéré les machines dans une 2-catégorie, lesquelles machines il nomme «idéaux»; pour cela il semble que la proposition 1 ci-dessus s'avère un axiome essentiel à imposer, et que la formule explicite du lemme 2 § 2 est indispensable.

Au paragraphe 4 de cet article on indiquera comment on peut dans le cadre des machines (ou des diagrammes) fourni ici faire une théorie des structures. Un point essentiel à ce sujet est de savoir faire l'extension de Kan «avec paramètre» ou encore l'extension de Kan d'une application covariante le long d'une autre [9].

3. Extensions de Kan avec paramètres.

Rappelons d'abord que, si H est une catégorie cartésienne fermée et complète, alors $\mathfrak{D}H$ est cartésienne fermée. Ce résultat est dû à F. Foltz [6]. En particulier $\mathfrak{D}(Cat)$ est cartésienne fermée, et nous avons un foncteur hom-interne

$$\mathcal{H} : \mathfrak{D}(Cat)^* \times \mathfrak{D}(Cat) \to \mathfrak{D}(Cat),$$

que nous ne préciserons pas ici.

Soit $p, \bar{p}$ et $\hat{p}$ trois objets de $\mathfrak{D}(Cat)$ et $\eta = (F', f')$ un morphisme dans $\mathfrak{D}(Cat)$ de p vers $\bar{p}$. Soit U un foncteur de $\mathfrak{D}(Cat)$ vers Cat tel que $P_1 . U . \mathcal{H}$ soit égal à $Hom_{\mathfrak{D}(Cat)}$. Alors $U(\mathcal{H}(\eta, \hat{p}))$ est un foncteur de source $U(\mathcal{H}(\bar{p}, \hat{p}))$ et de but $U(\mathcal{H}(p, \hat{p}))$.

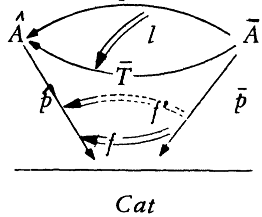
DEFINITION. Si un élément λ de $Hom_{\mathfrak{D}(Cat)}(p, \hat{p})$ admet une structure libre ν pour $U(\mathcal{H}(\eta, \hat{p}))$, on appelle ν une *U-extension de Kan à gauche de λ le long de η.*

Soit H le foncteur de $\mathfrak{D}(Cat)$ vers Cat associant à un foncteur p de X vers Cat la catégorie $K(P'_1 . P_1 . p) = Hp$.

THEOREME 2. *Si les extensions de Kan le long de F' existent et si le foncteur $P_2 . \hat{p}$ est à quasi-quotients, alors le foncteur $H(\mathcal{H}(\eta, \hat{p}))$ admet un adjoint à gauche.*

Compte tenu des définitions de H et $\mathcal{H}$ on peut préciser la nature de la catégorie $H(\mathcal{H}(\bar{p}, \hat{p}))$:

- Un objet dans cette catégorie est un couple $(\bar{T}, f)$, où $\bar{T} : \bar{A} \to \hat{A}$ est un foncteur et $f : \bar{p} \to \hat{p} . \bar{T}$ une transformation naturelle.
- Un morphisme $\underline{l} : (\bar{T}', f') \to (\bar{T}, f)$ est déterminé par une transformation naturelle notée $l : \bar{T}' \to \bar{T}$ telle que $f = (\hat{p} . l) \square f'$.



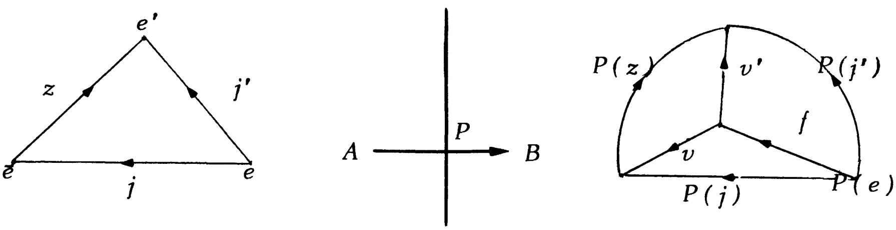
Quant au foncteur $H(\mathcal{H}(\eta,\hat{p}))$, il agit sur $(\bar{T},f)$ pour donner

$$(\bar{T}.F',(f.F')\boxminus f').$$

Avant d'esquisser la preuve du théorème, rappelons la définition d'une *structure quasi-quotient* (essentiellement cette notion a été introduite dans [3]): Soit $P:A\to B$ un foncteur, e un objet de A et $f: P(e)\to \varepsilon$ un morphisme de B. Un *P-quasi-quotient de e par f* consiste en un objet $\bar{e}$ de A équipé d'un morphisme $j:e\to\bar{e}$ et d'un morphisme $v:\varepsilon\to P(\bar{e})$ dans B tel que $P(j)=v.f$, avec la propriété universelle:

Pour tout $e'\in|A|$, $j':e\to e'$, $v':\varepsilon\to P(e')$ tel que $P(j')=v'.f$, il existe un unique z dans A de $\bar{e}$ vers e' tel que

$$j'=z.j \quad \text{et} \quad v'=P(z).v.$$



Nous dirons que P *est à quasi-quotients* si pour tout $e\in|A|$ et tout $f\in B$ de source $P(e)$ il existe un P-quasi-quotient de e par f. Une condition suffisante pour que P soit à quasi-quotients est que P admette un adjoint à gauche et que A soit à sommes fibrées (ce lemme est utilisé déjà dans [6]).

LEMME 1. *Soit $Q:A\to Cat$ un foncteur. Alors Q est à quasi-quotients si et seulement si $P_2.Q:A\to Ens$ est à quasi-quotients.*

PREUVE DU THEOREME. Avec le lemme 1 on a donc comme hypothèse que $\hat{p}$ lui-même est à quasi-quotients. Soit donc (F,f) un objet de $H(\mathcal{H}(p,\hat{p}))$ et $(\bar{F},\bar{f})$ la structure libre sur (F,f) que nous cherchons, et soit $\underline{t}$ le morphisme de (F,f) vers $(\bar{F}.F',(\bar{f}.F')\boxminus f')$ qui définit $(\bar{F},\bar{f})$ comme objet libre. t est une transformation naturelle de F vers $\bar{F}\cdot F'$ satisfaisant à

$$(\hat{p}.t)\boxminus f=(\bar{f}.F')\boxminus f' \qquad \text{(eq. 1).}$$

Soit $(\hat{F}, \hat{f})$ un objet de $H(\mathcal{H}(\bar{p}, \hat{p}))$ et $\underline{\hat{t}}$ un morphisme de (F, f) vers $(\hat{F}.F', (\hat{f}.F') \square\square f')$. $\hat{t}$ est une transformation naturelle de F vers $\hat{F}.F'$ et

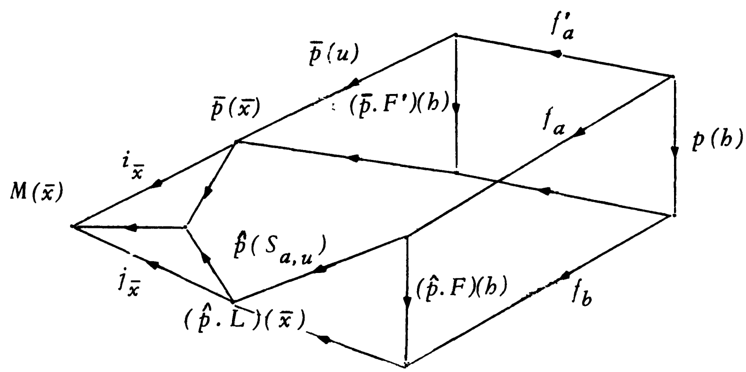
$$(\hat{p}.\hat{t}) \square\square f = (\hat{f}.F') \square\square f' \qquad (\text{eq. } \hat{1}).$$

Nous voulons prouver qu'il existe un unique $\hat{t}'$ de $\bar{F}$ vers $\hat{F}$ tel que

$$(\hat{p}.\hat{t}') \square\square \bar{f} = \hat{f} \quad \text{et} \quad (\hat{t}'.F') \square\square t = \hat{t}.$$

Nous allons définir $\bar{F}$ comme un certain quasi-quotient de l'extension de de Kan L de F le long de F'.

$\bar{A}$ étant la source de $\bar{p}$, pour $\bar{x} \in |\bar{A}|$ et (v, b, u) dans la catégorie «comma» $(F', \bar{x})$ avec $b : a \to b$ élément de A, on obtient dans Cat le diagramme ci-après, où $S_{a,u}$ est le morphisme canonique de $F(a)$ dans la limite inductive $L(\bar{x})$. Recollant tous ces diagrammes dans Cat lorsque (v, b, u) décrit $(F', \bar{x})$, on obtient un diagramme noté $D(\bar{x}) : (F', \bar{x}) \to Cat$. Soit $M(\bar{x})$ la limite inductive de $D(\bar{x})$, $j_{\bar{x}}$ et $i_{\bar{x}}$ les morphismes canoniques de $\hat{p}(L(\bar{x}))$ et $\bar{p}(\bar{x})$ vers $M(\bar{x})$.



On désigne alors par $\bar{F}(\bar{x})$ un $\hat{p}$-quasi-quotient de $L(\bar{x})$ par $j_{\bar{x}}$, défini donc par $\bar{j}_{\bar{x}} : L(\bar{x}) \to \bar{F}(\bar{x})$ et par $\bar{v}_{\bar{x}} : M(\bar{x}) \to (\hat{p}.\bar{F})(\bar{x})$. Nous désignerons par l la transformation naturelle canonique de F vers $L.F'$, et définirons t et $\bar{f}$ par les égalités

$$t = (\bar{j}.F') \square\square l \quad \text{et} \quad \bar{f} = \bar{v} \square\square i.$$

Maintenant supposons que $\hat{F}$, $\hat{f}$ et $\hat{t}$ satisfassent la condition (eq. $\hat{1}$).

Alors, d'après la propriété universelle de l'extension de Kan, il existe $\bar{t} : L \to \hat{F}$ tel que

$$(\bar{t}.\, F')\, \Box\!\Box\, l = \hat{t}$$

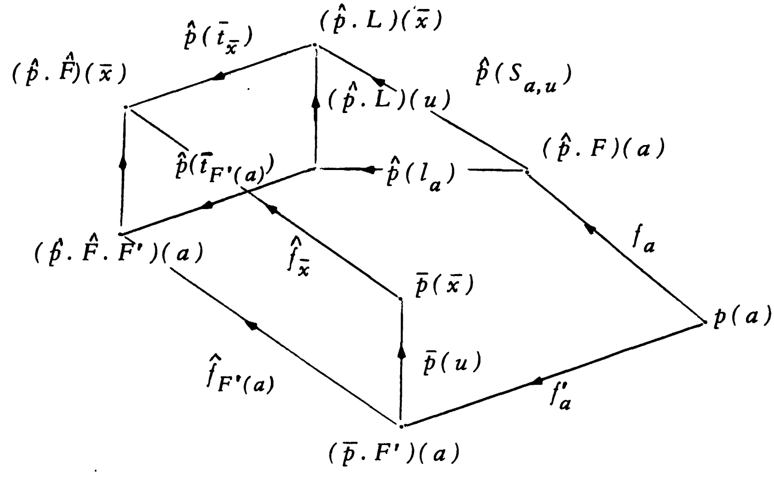
Puis, d'après la propriété universelle du quasi-quotient, afin de trouver $\hat{t}'$ il est suffisant de trouver un $g : M \to \hat{p}.\, \hat{F}$ avec $g\, \Box\!\Box\, j = \hat{p}.\, \bar{t}$. Mais nous avons

$$(\hat{f}.\, F')\, \Box\!\Box\, f' = (\hat{p}.\, \hat{t})\, \Box\!\Box\, f,$$

c'est-à-dire

$$(\hat{f}.\, F')\, \Box\!\Box\, f' = (\hat{p}.\, \bar{t}.\, F')\, \Box\!\Box\, (\hat{p}.\, l)\, \Box\!\Box\, f.$$

Pour $\bar{x} \in |\bar{X}|$ et tout $(u, a) \in |(F', \bar{x})|$ considérons le diagramme suivant :



L'hypothèse (eq. $\hat{1}$) implique que la partie horizontale de ce diagramme commute. Par naturalité les deux rectangles verticaux commutent aussi, et par définition on a $l_a = S_{a,\, F'(a)}$: aussi le triangle commute. Alors, par la propriété d'une limite, il existe un unique $g_{\bar{x}} : M(\bar{x}) \to (\hat{p}.\, \hat{F})(\bar{x})$ tel que

$$\hat{p}(\bar{t}_{\bar{x}}) = g_{\bar{x}} \cdot j_{\bar{x}} \quad \text{et} \quad \hat{f}_{\bar{x}} = g_{\bar{x}} \cdot i_{\bar{x}}.$$

Il est maintenant facile de terminer la preuve du théorème.

NOTA. Dans cette preuve la limite inductive $M(\bar{x})$ existe toujours, car c'est un P_2-quasi-quotient de $[\bar{p}(\bar{x}) \coprod (\hat{p}.L)(\bar{x})]$ (cela peut se déduire d'un théorème de [2b]).

COROLLAIRE. *Supposons que:*

1) $A \in Cat$ (A est $\mathfrak{U}$-petite).

2) $\bar{A} \in \mathcal{C}at$ ($\bar{A}$ est $\mathfrak{U}$-localement petite).

3) $\hat{A}$ est $|Cat|$-cocomplète ($\hat{A}$ admet des colimites $\mathfrak{U}$-petites).

4) Le foncteur $P_2 \cdot \hat{p}$ est représentable.

Alors le foncteur $H(\mathcal{H}(\eta, \hat{p}))$ admet un adjoint à gauche.

On remarquera que l'hypothèse 4 signifie que $\hat{p} : \hat{A} \to Cat$ détermine une catégorie interne à $\hat{A}^*$.

On retrouve l'extension de Kan classique (sans paramètres p, $\bar{p}$ et $\hat{p}$) lorsque $\hat{p}$ est le foncteur $\hat{A} \to Cat$ constant sur $\mathbf{1}$.

Pour $X \in \mathcal{C}at$, p et $\hat{p} \in |\mathfrak{D}X|$ on désigne par $\Delta_X(p, \hat{p})$ la catégorie dont les objets sont les (T, f) où $T : A \to \hat{A}$ et $f : p \to \hat{p} \cdot T$, et où un morphisme de (T', f') vers (T, f) est déterminé par une transformation naturelle $l : T' \to T$ telle que $f = (\hat{p} . l) \Box\Box f'$. Alors $\Delta_X(p, \hat{p}) \in Cat$ détermine un foncteur

$$\Delta_X : \mathfrak{D}(X)^* \times \mathfrak{D}(X) \to Cat .$$

La catégorie $H(\mathcal{H}(p, \hat{p}))$ du théorème 2 n'est autre que $\Delta_{Cat}(p, \hat{p})$. On peut alors reprendre telle que la preuve du théorème 2 pour énoncer:

THEOREME 2^{bis}. *Soit p, $\bar{p}$ et $\hat{p}$ trois objets de $\mathfrak{D}X$, où $X \in |\mathcal{C}at|$, et $\eta = (F', f')$ un morphisme dans $\mathfrak{D}X$ de p vers $\bar{p}$. Supposons que*

1) Les extensions de Kan le long de F' existent.

2) X est à petites limites inductives.

3) $\hat{p} : \hat{A} \to X$ est à quasi-quotients.

Alors le foncteur $\Delta_X(\eta, \hat{p})$ admet un adjoint à gauche.

4. Ebauches et types de structures.

Si G est un graphe multiplicatif [2a], un *endomorphisme local* de G est un triplet (V, f, U), où f est une application de $U \subset G$ vers $V \subset G$ telle que

$$f(x.y) = f(x).f(y) \text{ si } x,\ y \text{ et } x.y \text{ appartiennent à } U,$$

$$f(\alpha(x)) = \alpha(f(x)) \quad [\text{resp. } f(\beta(x)) = \beta(f(x))]$$

si x et $\alpha(x)$ [resp. x et $\beta(x)$] appartiennent à U.
Les endomorphismes locaux de G forment une catégorie notée $el(G)$.

Soit *gram* la catégorie des homomorphismes entre graphes multiplicatifs G tels que $G \in \mathfrak{U}$ et Eb' la catégorie ayant pour objets les morphismes de *gram* de la forme $E: X \to el(G)$ avec X et G objets de *gram*, un morphisme de E vers $E': X' \to el(G')$ étant un triplet $(E', (S, T), E)$, où $S: X \to X'$ et $T: G \to G'$ sont des morphismes de *gram* vérifiant la condition :

> Si $E(x)(g)$ est défini pour $x \in X$ et $g \in G$, alors $E'(S(x))(T(g))$ est défini et $E'(S(x))(T(g)) = T(E(x)(g))$.

La composition dans Eb' est induite par celle de *gram*.

On note Eb la sous-catégorie pleine de Eb' dont les objets sont les $E: X \to el(G)$, où X et $G \in |Cat|$. On désigne par Em la catégorie des espèces de morphismes au-dessus de $\mathfrak{U}$, équivalente à $\mathfrak{D}(Cat)$. Les objets de Eb' sont appelés ébauches (voir [8] et [9a]).

PROPOSITION. *Les inclusions canoniques de Em dans Eb et de Eb dans Eb' admettent des adjoints, notés M et N, et les catégories Eb' et Eb sont à $|Cat|$-limites inductives ou projectives.*

Nous ne donnerons pas la preuve; pour éclaircir la situation nous indiquerons à titre d'exemple la manière de construire les conoyaux dans Eb: Soit $(E_1, (S, T), E)$ et $(E_1, (S', T'), E)$ deux morphismes de $E: X \to el(G)$ vers $E_1: X_1 \to el(G_1)$. Soit K' le conoyau de T et T' dans *gram* et K le graphe multiplicatif quotient de K' par la congruence définie par les relations élémentaires suivantes: Si c est le foncteur canonique de G_1 vers K' et si $c(g) = c(g')$ pour $g, g' \in G_1$, pour x_1 dans

X_1 on identifie $c(E_1(x_1)(g))$ et $c(E_1(x_1)(g'))$. Il y a un moyen canonique de définir un foncteur E_2 du conoyau Z de S et S' dans *gram* vers $el(K)$ et le conoyau cherché est $N(E_2)$.

Pour prouver l'existence de M on utilise le théorème principal de l'article d'Ehresmann dans le Lecture Notes n° 92.

Soit E', E, F et Q des ébauches, J un morphisme de E' vers E, L un morphisme de E' vers F, R un ensemble de morphismes de F vers Q. Soit D une somme fibrée de J et L dans Eb', L' et J' les morphismes canoniques de F et E vers D. Notons i l'inclusion de Em vers $\mathfrak{D}(Cat)$ et considérons un foncteur U de $\mathfrak{D}(Cat)$ vers Cat.

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "L"] \arrow[d, "J"'] & F \arrow[d, "L'"'] \arrow[dr, bend left, "R"] & \\ E \arrow[r, "J'"'] & D & Q \end{tikzcd}$$

On pourra prendre par exemple pour U les foncteurs $\mathbf{K}_1$, H, d_{Cat} ou S, en désignant par d_{Cat} (resp. S) le foncteur de $\mathfrak{D}(Cat)$ vers Cat qui à $\pi : A \to Cat$ associe la catégorie A (resp. la catégorie $\sum_{e \in |A|} \pi(e)$).

DEFINITION. (a) *Une R-algèbre de (J, L) d'espace S et de loi θ* est un couple (S, θ) où $S \in R$ et où θ est un morphisme de E vers Q tel que $S.L = \theta.J$.

(b) La catégorie $U(\mathcal{H}(iM(D), iM(Q)))$ est appelée *catégorie des (U,R)-algèbres de (J,L)*, $U(\mathcal{H}(iM(L'), iM(Q)))$ étant le foncteur d'oubli des lois et $U(\mathcal{H}(iM(J'), iM(Q)))$ le foncteur d'oubli des espaces.

On voit alors comment l'existence de structures algébriques libres sur un espace (ou sur une loi) repose sur des théorèmes du type de celui donné au § 3. Notons aussi que notre définition met en évidence la symétrie des rôles joués par la loi et l'espace d'une algèbre, ainsi que la pluralité des notions «naturelles» de morphismes entre les algèbres (dépendant du choix de U).

A propos des types de structures et des ébauches nous voudrions juste indiquer comment les notions usuelles de type de structure reviennent, chacune, à la description d'une classe spéciale d'ébauches.

(a) Si $H^{\cdot}, \perp$ est une catégorie double, e et e' deux unités doubles de H, $f: e \to e'$ (resp. $f: e' \to e$) dans $H^{\cdot}$ une unité de $H^{\perp}$, on note ${}^{\cdot}f$ (resp. $f^{\cdot}$) l'endomorphisme local de $H^{\perp}$ qui à $z \in Hom_{H^{\cdot}}(e, e)$ associe $z.f$ (resp. $f.z$); la catégorie $H^{\perp}$ munie de tous les ${}^{\cdot}f$ et $f^{\cdot}$ devient une ébauche $E(.)$ qui, pour toute unité double u, induit une ébauche $E(.)^u$ sur $Hom_{H^{\cdot}}(u, u)$. En particulier pour une catégorie C regardée comme unité double de la 2-catégorie des transformations naturelles NAT, nous obtenons l'ébauche $E(\square\square)^C$ de $End(C)$ vers $el(NAT(C, C)^{\square\square})$.

(b) Si H est une catégorie, $h: H^* \times H \to Cat$ un foncteur et e une unité de H, l'opération de H^* sur $\sum_{u \in |H|} h(u, e)$ détermine une ébauche $A(h, e)$. En particulier, si H est la catégorie $\mathcal{S}$ des réalisations entre prototypes projectifs [4] $\sigma = (C, \mu)$, où $C \in |Cat|$, et h la domination évidente de $\mathcal{S}$ par Cat, l'ébauche $A(h, \sigma)$ ainsi associée à σ est notée $\mathfrak{A}(\sigma)$; $\mathfrak{A}$ définit un plongement pleinement fidèle de $\mathcal{S}$ vers $\widehat{Eb}$ (catégorie des ébauches relative à $\hat{\mathfrak{U}}$).

On peut aussi définir un foncteur de $\mathcal{S}$ vers Eb en associant à tout (C, μ) l'ébauche consistant en C munie des endomorphismes locaux «provenant des cônes donnés par μ», tels le produit fibré le long d'un morphisme donné (notion à préciser).

Nous reprendrons en détail cette question dans un prochain article, où nous indiquerons aussi comment une théorie formelle du 1er ordre, dans la présentation usuelle, peut être assimilée à une machine (les symboles fonctionnels devenant les actions de la machine, etc...). Mais en ce qui concerne les esquisses projectives, il est plus facile encore de les voir comme machines (les ébauches n'étant dans notre esprit qu'un intermédiaire technique utile pour certains exemples, la thèse proposée étant que les types de structures peuvent se décrire comme des machines): Si $\sigma=(C,\mu)$ est un prototype projectif (resp. une esquisse) où les cônes donnés par μ sont indexés par un ensemble $m \in \hat{\mathfrak{U}}$, si $M_\sigma = P'_2(m)$ est la catégorie P_2-libre engendrée par m, et si $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}} C$ (resp. $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} C$) est la sous-catégorie de $\mathfrak{D}C$ ayant pour éléments les morphismes de $\mathfrak{D}C$ définissant des limites projectives (resp. des cônes projectifs), la donnée de σ équivaut à la donnée d'un foncteur

$$F_\sigma : M_\sigma \to \mathcal{L}_{\mathfrak{p}} C \hookrightarrow \mathfrak{D}C \quad (\text{resp. } F_\sigma : M_\sigma \to \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} C \hookrightarrow \mathfrak{D}C),$$

i.e. à la donnée d'une machine particulière de M_σ à C. Ainsi passer de la notion d'esquisse (sous la forme $F_\sigma : M_\sigma \to \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} C$) à la notion de machines ($I \to \mathfrak{D}C$) consiste à *remplacer les cônes par des cylindres* (certains auteurs appellent cylindre un morphisme de $\mathfrak{D}C$) et à *organiser* de manière cohérente *une famille de cylindres en une catégorie I*. L'enrichissement apporté par la deuxième opération semble compenser avantageusement l'imprécision apportée par la première.

(c) Soit $U\mathcal{J}$ le graphe multiplicatif sous-jacent à l'esquisse de catégorie donnée dans [4]; le quotient U_{Mon} de $U\mathcal{J}$ par l'identification de a et b à un seul élément θ de but un élément final est sous-jacent à une esquisse des monoïdes. On note U'_{Mon} le sous-graphe multiplicatif de U_{Mon} obtenu en supprimant θ, v_1, v_2, w_1 et w_2. On obtient une ébauche M_S en munissant U_{Mon} des opérateurs S_1 et S_2 définis aux points $u_0, u, u*u, i, k$ et θ, leurs valeurs y étant, dans l'ordre,

$$u, u*u, (u*u)*(u*u), v(u, i.a), k_1 \text{ et } v_1 \text{ pour } S_1,$$

$$u, u*u, (u*u)*(u*u), v(i.b, u), k_2 \text{ et } v_2 \text{ pour } S_2.$$

On désigne par J_{Mon} l'inclusion canonique de M'_S dans M_S, où M'_S est l'ébauche induite par M_S sur U'_{Mon}.

(d) Pour une catégorie C, soit $E(C)$ l'ébauche consistant en C muni de tous ses endomorphismes; pour une unité e de C, le foncteur de $NAT(C,C)=C^C$ vers C dont la valeur en F est $F(e)$ détermine un morphisme $\bar{e}$ de $E(\square\square)^C$ vers $E(C)$; soit R_C l'ensemble des $\bar{e}$ où $e \in |C|$.

PROPOSITION. *Un triple* $\mathbf{T}$ *sur une catégorie* C *est déterminé par la donnée d'un morphisme* T *de* M'_S *vers* $E(\square\square)^C$, *et une algèbre (au sens d'Eilenberg-Moore) du triple* $\mathbf{T}$ *s'identifie à une* R_C*-algèbre de* (J_{Mon}, T) *au sens de la définition (a) de ce paragraphe 4.*

Ceci nous conduit au problème de la:

Représentation des types de structure.

Si C est une catégorie, E' et E deux ébauches et J un morphisme de E' vers E, on appelle *J-ade* sur C la donnée d'un morphisme T de E' vers $E(\square\square)^C$. Une algèbre de T est alors par définition une R_C-algèbre de (J, T). Dans les exemples J est un monomorphisme et E «ébauche» un type de structure σ (c'est-à-dire que, σ étant une esquisse et σ_{Ens} le type associé à une catégorie pleine d'applications Ens au-dessus d'un univers $\mathfrak{U}$, il existe une ébauche E_1 telle que $\mathcal{S}(\sigma, \sigma_{Ens})$ et $H(\mathcal{H}(i(E), i(E_1)))$ soient isomorphes); *une J-ade doit alors être vue comme une représentation locale de* σ *sur* C, *et une algèbre de* T *comme un élargissement à* E *en un point* $e \in |C|$ *de la représentation* T.

Comme exemples, indiquons quelques *variations sur le thème des monades :*

1° Soit, avec les notations déjà introduites, Ω une partie de U_{Mon}, M_S^Ω la sous-ébauche de M_S induite sur $U_{Mon} \setminus \Omega$, et J_{Mon}^Ω l'inclusion canonique de M_S^Ω vers M_S. Une J_{Mon}^Ω-ade sur une catégorie C est appelée une Ω*-monade.* Ainsi pour $\Omega = \{\theta, v_1, v_2\}$, une Ω-monade est une monade (un triple). Une $\emptyset$-monade sur C est la donnée d'un triple $\mathbf{T}$ sur C et, en plus, d'une transformation naturelle $\theta : T \to Id$ telle que, pour toute unité e de C, θ_e soit une $\mathbf{T}$-algèbre en e.

2° On appelle *di-monade* sur une catégorie C un quintuplet $\bar{\mathbf{T}} = (T, \varepsilon, \mu, i, m)$ tel que (T, ε, μ) soit un triple sur C, (T, i, m) un cotriple sur C et que, pour tout $e \in |C|$, i_e (resp. ε_e) soit une algèbre de (T, ε, μ) (resp. une coalgèbre de (T, i, m)). Alors si

$$\{a, b\} \subset \{\varepsilon, \mu, i, m\},$$

le triplet (T, a, b) est une Ω-monade dite sous-jacente à $\bar{\mathbf{T}}$ dont les algèbres sont appelées *hypo-algèbres* de $\bar{\mathbf{T}}$.

Par exemple, dans une catégorie pleine d'applications *Ens*, les foncteurs associant à un ensemble X l'ensemble X^2

$$(\text{resp. } V(X) = \{(a, A) \mid a \in A \text{ et } A \subset X\})$$

sont les endofoncteurs de di-monades (pour V c'est une remarque de D. Bourn).

Les idempotents dans un triple (voir [10a] et [10b]) sont des exemples d'algèbres d'une Ω-monade; ainsi c'est le cas des pseudo-congruences et des topologies gauches [10b]. En substituant à la monade des parties $\mathfrak{P}$ la monade V ci-dessus, on obtient comme idempotents les congruences. De même les ordres, les topologies, les involutions apparaissent comme hypo-algèbres de di-monades.

3° Comme relevant de la notion de J-ade, indiquons encore les J-triples de Diers, les lois distributives de Beck, les monades involutives [10c], les monades virtuelles, les submonades. Pour ces dernières donnons quelques précisions: Si dans notre présentation des monades on remplace U_{Mon} par $U\mathcal{F}$ et $E(\square\!\square)^C$ par une ébauche $E(A, B)$ consistant en la catégorie $Nat(A, B) \simeq B^A$ sur laquelle agissent à droite (ou à gauche) les endofoncteurs de A (de B), en désignant par Ω une partie de $U\mathcal{F}$ on aboutit à la notion de Ω- submonade. Plus précisément donnons la définition suivante:

Soit A et B deux catégories. On appelle *submonade* sur (A, B) la donnée $\kappa = (U_0, U, {}_*U, U_*, a, b, i, k)$, où $U_0, U : A \to B$, ${}_*U : A \to A$ et $U_* : B \to B$ sont des foncteurs, où $i : U_0 \to U$ et $k : U_* . U = U . {}_*U \to U$, sont des transformations naturelles, et où a et b sont des isomorphismes naturels inverses de $k \,\square\!\square\, U_* i$ et $k \,\square\!\square\, i_{*U}$ respectivement. On suppose de plus que

$$k \,\square\!\square\, k_{*U} = k \,\square\!\square\, (a_{*U} \,\square\!\square\, U_* . b) \,\square\!\square\, U_* . k \, .$$

Etant donnée une submonade κ on pourra appeler *algèbre de* κ un couple (v, θ), où $v \in |A|$ et où θ est un morphisme dans B de Uv vers

$U_o\, v$ tel que

$$\theta . i_v = U_o v \quad \text{et} \quad \theta . k_v = \theta . a_v^{-1} . U_* \theta .$$

On définira aussi les *bi-algèbres de* κ comme des triplets $(u, *\alpha, \beta)$, où (u, β) est une algèbre de κ et $*\alpha$ un morphisme dans B de $U_*\, U\, u$ vers $U_o * U\, u$ tel que, en posant $\alpha = \beta . b_u^{-1} . *\alpha . U_* i . a_u$, on ait les égalités

$$\alpha . i_u = U_o u , \ \alpha . b_u^{-1} . *\alpha = \alpha . k_u , \ \beta . i_u . \alpha = \alpha , \ \alpha . i_u . \beta = \beta ,$$
$$\beta . b_u^{-1} . *\alpha = \alpha . a_u^{-1} . U_* \beta .$$

Alors, pour tout $u \in |A|$, $(*U\, u, b_u . k_u)$ est une κ-algèbre et, pour toute κ-algèbre (v, θ), le triplet $(v, b_v . a_v^{-1} . U_* \theta, \theta)$ est une κ-bi-algèbre.

Les submonades sont liées à la notion de (U_1, U_o)-structure libre (comme les monades sont liées à la notion de p-structure libre): Si $U_1 : A_1 \to A$ et $U_o : A \to B$ sont deux foncteurs et si $a \in |A|$, on appelle *(U_1, U_o)-structure libre sur a* un couple (a_1, j), où $a_1 \in |A_1|$ et où $j : U_o a \to U_o U_1 a_1$ est un morphisme de B, tel que pour a'_1 dans $|A_1|$ et $j' : a \to U_1 a'_1 \in B$, il existe un unique $\bar{j}' : a_1 \to a'_1$ dans A_1 tel que $(U_o U_1)(\bar{j}') . j = U_o(j')$.

Bien entendu une telle (U_o, U_1)-structure libre n'est pas nécessairement unique à isomorphisme près. Le lecteur verra lui-même que l'on peut obtenir cette unicité en imposant de plus à (a_1, j) d'être minimal parmi les (U_1, U_o)-structures libres sur a, i.e. telle que si (a'_1, j') est aussi une (U_o, U_1)-structure libre sur a, il existe un unique morphisme $h : a_1 \to a'_1$ tel que $U_o U_1(h) . j = j'$.

Le cas typique de (U_1, U_o)-structure libre est celui où U_o est fidèle et où il existe un foncteur U'_1 de A vers A_1 et, pour tout a, a_1, une bijection

$$\gamma_{a a_1} : Hom_A(a, U_1(a_1)) \to Hom_{A_1}(U'_1(a), a_1),$$

cette bijection n'étant pas représentée par un morphisme

$$\alpha : a \to (U_1 U'_1)(a) \ \text{de} \ A,$$

mais par un morphisme $j : U_0 a \to (U_0 U_1)(U'_1(a))$ de B. Nous ne développerons pas plus ces questions car, bien qu'il y ait de nombreux exemples, ces situations sont passablement anecdotiques. En effet, la véritable question est de réussir à dégager la notion de *catéade* qui soit aux catégories ce que la notion de monade est aux monoïdes. Les submonades ci-dessus, de même que les J-triples de Diers ne sont pas encore de bons candidats à ce statut. Nous pensons qu'une possibilité intéressante est précisément de substituer à C^C dans la définition des triples la catégorie $\mathfrak{D}C$, en substituant parallèlement à U_{Mon} une esquisse $U\mathfrak{F}$ de catégorie judicieusement choisie.

4° A propos des extensions naturelles du concept de monade notons enfin qu'il est naturel de considérer la bicatégorie des machines. Pour en avoir une description manipulable, on utilise l'isomorphisme entre $DIAG$ et MAC et la remarque suivante: Soit X et $Y \in |\mathcal{C}at|$, $F, G : X \to \mathfrak{D}Y$ deux foncteurs, $\bar{F}, \bar{G} : \mathfrak{D}X \to \mathfrak{D}Y$ les foncteurs $\mathbf{K}_Y . \mathfrak{D}F$ et $\mathbf{K}_Y . \mathfrak{D}G$ et soit $\tau : \bar{F} \to \bar{G}$ une transformation naturelle dont la valeur en $\pi \in \mathfrak{D}X$ s'écrit (T_π, t_π). Utilisant la naturalité de τ sur les morphismes de la forme $(\check{a}, Id) : \check{\pi}(a) \to \pi$, on vérifie que t_π est complètement déterminée (à un isomorphisme près) par $\tau . \mathbf{U}_X$ et que, pour déterminer T_π, il reste à connaître seulement sa valeur sur les morphismes horizontaux (i.e. les éléments de $H(d_Y . F . \pi)$). En fait, on vérifie que

$$\tau \simeq \mathbf{K}_Y . \mathfrak{D}(\tau . \mathbf{U}_X) \text{ si et seulement si } \mathbf{K}_Y . \mathfrak{D}\tau \simeq \tau . \mathbf{K}_X .$$

Ainsi si $\bar{F} : \mathfrak{D}X \to \mathfrak{D}Y$ et $\bar{F}' : \mathfrak{D}Y \to \mathfrak{D}X$ représentent deux machines $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$, ces machines sont adjointes dans la bicatégorie MAC si et seulement si $\bar{F}$ et $\bar{F}'$ sont adjoints et si les morphismes d'adjonction ε et η satisfont à

$$\varepsilon . \mathbf{K}_Y = \mathbf{K}_Y . \mathfrak{D}\varepsilon \quad \text{et} \quad \eta . \mathbf{K}_X = \mathbf{K}_X . \mathfrak{D}\eta .$$

Donc une adjonction dans MAC induit un triple sur $\mathfrak{D}Y$.

Recherche l'adjointe d'une machine $X \to \mathfrak{D}Y$ serait particulièrement utile pour les machines de la forme $X \to Ext\, Y$ où $Ext\, Y$ est la sous-catégorie de $\mathfrak{D}Y$ constituée des extensions de Kan à droite (ou à gauche).

Notons pour terminer qu'une ébauche $E : Y \to el(G)$ détermine une machine $\widetilde{E} : Y \to Cat \simeq \mathfrak{D}1$. Le lecteur reformulera lui-même la définition des R-algèbres de (J, L) dans le cas des X-machines, i.e. des machines $A \to \mathfrak{D}X$. Ainsi dans (b) on substituera à $U(\mathcal{H}(iM(D), iM(Q)))$ la catégorie $\Delta_X(D, Q)$.

De nombreux problèmes sont ouverts par l'idée de présenter les structures à l'aide des machines, parmi lesquels on peut citer celui consistant à trouver la X-machine d'un type de structure donné (comme on «esquisse» un type de structure), celui de la «représentation» d'un type de structure (en particulier donner une bonne définition de catéade) et de l'étude des algèbres d'une telle représentation (comme on développe la théorie des algèbres d'une monade) .

Références

[1] R. DAVIS, Equational systems of functors, *Lecture Notes* 47, Springer (1967).

[2] C. EHRESMANN, a) *Catégories et Structures*, Dunod, Paris, 1965, et cours polycopié sur les espèces de structures, Paris, 1969.

b) *Algèbre de C3*, C.D.U., Paris 1968.

[3] C. EHRESMANN, Structures quasi-quotients, *Math. Ann.* 171 (1967), p. 293.

[4] C. EHRESMANN, Esquisses et types de structures algébriques, *Bull. Inst. polit. din Iaşi*, serie nova, XIV-1-2, 1968.

[5] F. FOLTZ, Sur la domination des catégories, *Cahiers topo. et géo. diff.* XII-1 et XII-4 (1970).

[6] F. FOLTZ, *C.R.A.S.* Paris 271 (1970), p. 221.

[7] J. GRAY, The categorical comprehension scheme, *Lecture Notes* 99, Springer (1969).

[8] R. GUITART, Sur l'ébauche des structures, *Proc.* 3^d *Congress of Bulgarian math.*, Summaries part II (1972), p. 354.

[9] R. GUITART, a) *C.R.A.S.* Paris 276 (1973).

b) Sur le foncteur diagrammes, Colloque sur l'Algèbre des Catégories, Amiens - 1973, *Cahiers topo. et géo. diff.* XIV-2, Paris (1973), p. 181.

[10] R. GUITART, a) Foncteurs sous-objets et relations continues, *Cahiers topo. et géo. diff.* XIII-1 (1972), p. 57.

b) *C.R.A.S.* Paris 275 (1972), p. 259.

c) *C.R.A.S.* Paris 277 (1973), p. 935.

[11] A. KOCK, Monads for which Structures are adjoint to units, *Aarhus Universitet Math. Preprint Series*, 1972/73, 35.

[12] P. LEROUX, Conférence faite à Paris en automne 1972, non publiée.

[13] D. PROCHASSON, Catégories complètes à gauche et triples, *Esquisses Mathématiques* 12, Paris (1971).

[14] A. BASTIANI, *Systèmes guidables et problèmes d'optimisation*, Laboratoire d'Automatique théorique de Caen, 1963 et 1964.

[15] J. BENABOU, *Les distributeurs*, Inst. de math. pure et appl., Univ. cath. de Louvain, rapport 33 (1973).

[16] M. BUNGE, Bifibration induced Adjoint Pairs, *Lecture Notes* 195, Springer (1971), p. 70.