CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

L. COPPEY
R. DAVAR-PANAH

Décompositions et catégories de relations

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 16, nº 2 (1975), p. 135-148

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1975__16_2_135_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XVI-2 (1975)

DECOMPOSITIONS ET CATEGORIES DE RELATIONS

par L. COPPEY et R. DAVAR-PANAH

1. Rappels sur les décompositions.

1.1 Soit H une catégorie. Considérons les couples de sous-catégories (H_2, H_1) de H satisfaisant:

i) $H = H_2 . H_1$,

ii) $H_1 \cap H_2 = H_0$ (= classe des objets de H).

On dit qu'un tel couple *définit une décomposition* θ *de* H lorsque toute flèche $f \in H$ se décompose de façon unique sous la forme $f = g \cdot h$ avec $h \in H_1$ et $g \in H_2$; dans ce cas, on désigne, pour tout $f \in H$, par (f_2, f_1) l'unique élément de $H_2 \times H_1$ tel que $f = f_2 \cdot f_1$; les applications de H dans H,

$$f \rightsquigarrow f_1 \quad \text{et} \quad f \rightsquigarrow f_2,$$

sont notées respectivement a_1 et a_2 et le symbole θ désigne indifféremment le couple (a_1, a_2) ou le couple (H_1, H_2).

1.2 Si θ est une décomposition de H, on trouve les égalités suivantes:

- $\forall f \in H$, $f_{11} = f_1$; $f_{22} = f_2$; $f_{12} = f_{21} = \alpha(f_2) = \beta(f_1)$.
- $\forall (g, f) \in H * H$, $(g \cdot f)_2 = g_2 \cdot (g_1 \cdot f_2)_2$ et $(g \cdot f)_1 = (g_1 \cdot f_2)_1 \cdot f_1$.

1.3 - On trouvera dans [2] d'autres façons de définir les décompositions de H; il a été démontré dans [1] que les décompositions de H sont en bijection naturelle avec les algèbres sur H d'un triple dans la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs.

1.4 Rappelons les résultats suivants, démontrés dans [2], relatifs à une décomposition θ de H:

1.4.1. Si γ est inversible, γ_1 et γ_2 sont encore inversibles et $\gamma_1^{-1} \in H_1$, $\gamma_2^{-1} \in H_2$.

1.4.2. Pour tout quatuor (g, h', h, f),

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "h'"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h"'] & \cdot \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

il existe une unique flèche k telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "h'_1"] & \cdot \arrow[r, "h'_2"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h_1"'] & \cdot \arrow[u, "k"'] \arrow[r, "h_2"'] & \cdot \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

et ceci définit en fait une décomposition (double) de la catégorie (double) des quatuors de H.

1.4.3. On déduit alors de 1.4.2 que, pour tout type de diagramme I, la catégorie H^I des morphismes entre I-diagrammes dans H est naturellement munie d'une structure de décomposition θ^I définie par (H_2^I, H_1^I).

1.5 *Relations entre limites et décompositions.* Soit I un type de diagrammes connexe. Soit θ une décomposition de H; désignons par ι l'insertion de H_2 dans H et par F un «foncteur» de I dans H_2 ; on a les résultats suivants :

1.5.1. Si $\varprojlim F$ existe, $\varprojlim(\iota \circ F)$ existe aussi et on peut choisir cette dernière égale à $\varprojlim F$.

1.5.2. Si $\varprojlim(\iota \circ F)$ existe, $\varprojlim F$ existe aussi et est isomorphe à $\varprojlim(\iota \circ F)$; plus précisément, soit

$$p : \widehat{\varprojlim}(\iota \circ F) \longrightarrow F, \quad p \in H^I,$$

une naturalisation de $\varprojlim(\iota F)$; on peut décomposer p relativement à θ^I, dans H^I, en $p_2 \cdot p_1$; alors $\alpha(p_2) = \beta(p_1)$ est un foncteur constant sur une limite projective de F et p_2 en est une naturalisation, p_1 étant une transformation naturelle constante inversible :

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{\varprojlim} F \arrow[dr, "p_2"] & \\
\widehat{\varprojlim}(\iota F) \arrow[ur, "p_1"] \arrow[rr, "p"'] & & F
\end{tikzcd}$$

(on désigne par $\hat{X}$ le «foncteur» constant sur X). Donc, le foncteur ι est compatible avec les limites projectives connexes; si H_2 est à I-$\varprojlim$, ι est aussi à I-$\varprojlim$, lorsque I est connexe. On a un résultat dual avec les I-$\varinjlim$, en remplaçant H_2 par H_1.

1.5.3. Soit X un objet de H ; on montre facilement que H_{2X} est une sous-catégorie pleine de H_X ; c'est même une sous-catégorie réflexive; précisons la réflexion $R_X : H_X \to H_{2X}$; soit (v, f, u) un «morphisme au-dessus de X»; on peut le regarder comme un quatuor de source f et de but 1_X ; alors, d'après 1.4.2, il se décompose de façon unique comme

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "v"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u"'] & \cdot \arrow[u, "1_X"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "v_1"] & \cdot \arrow[r, "v_2"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u_1"'] & \cdot \arrow[u, "(v_1 f)_2"] \arrow[r, "u_2"'] & \cdot \arrow[u, "1_X"']
\end{tikzcd}$$

$$R_X(v, f, u) = (v_2, (v_1 . f)_2, u_2).$$

Donc, si $I_X : H_{2X} \to H_X$ désigne l'insertion, R_X est un adjoint à gauche de I_X. (H_X note la catégorie des objets au-dessus de X.)

1.5.4. Avec les notations de 1.5.3, on peut regarder (v, f, u) comme un quatuor de source u et but v ; en décomposant, dans ce sens, selon 1.4.2, on construit de la sorte une décomposition naturelle θ_X dans H_X (il ne faut pas confondre H_{2X} et H_{X2} !). Si la catégorie H est à limites projectives, on en déduit aussitôt que l'insertion $\iota_X : H_{2X} \to H_X$ est un foncteur à limites projectives (il les crée aussi), car les limites dans H_X correspondent à des limites connexes dans H et on peut appliquer 1.5.2.

L'insertion $I_X : H_{2X} \to H_X$ factorise à travers l'insertion $\iota_X : H_{X2} \to H_X$; soit $I_X = \iota_X . i_X$.

1.5.5. Soit $f: X \to Y$ une flèche de H; la composition par f définit le foncteur $\Sigma_f: H_X \to H_Y$ et, lorsque H est à produits fibrés choisis, le produit fibré par f définit un foncteur $f^{-1}()$ de H_Y vers H_X, adjoint à droite de Σ_f; on a alors les résultats suivants, pour une décomposition θ de H:

- $f^{-1}()$ admet une restriction, notée encore $f^{-1}()$, de H_{2Y} dans H_{2X} ; ceci nécessite un bon choix des produits fibrés par f et signifie exactement que H_2 est stable par produits fibrés (à isomorphisme près);
- le foncteur $f^{-1}(): H_{2Y} \to H_{2X}$ a un adjoint à gauche, qu'on peut noter simplement $f()$; il est défini pour un objet $U \xrightarrow{u} X$ de H_{2X} par

$$f(u) = (f.u)_2.$$

REMARQUES. 1° En général H_1 n'est pas stable par changement de base.

2° On définit les morphismes stricts entre décompositions de la façon suivante: si θ est une décomposition de H et θ' une décomposition de H', un *morphisme (strict) de θ vers θ'* est la donnée d'un foncteur $F: H \to H'$ tel que

$$F(H_1) \subset H'_1 \quad et \quad F(H_2) \subset H'_2;$$

par exemple, l'oubli naturel de H_X vers H définit un morphisme strict de θ_X vers θ (cf. 1.5.4); autre exemple: le foncteur Σ_f définit un un morphisme de θ_X vers θ_Y pour $f: X \to Y$. Le foncteur $f^{-1}()$ « respecte» H_2, si les produits fibrés sont bien choisis, mais pas forcément H_1, donc ne peut pas définir en général un morphisme de θ_Y vers θ_X.

2. Catégories de relations.

2.0 Intuitivement, on fait jouer à H_2 le rôle habituellement dévolu aux monomorphismes: une relation de X vers X' est une classe d'isomorphisme de flèches dans H_2 de but $X \times X'$, lorsque $X \times X'$ existe. Avec une telle définition, les relations ne se composent malheureusement pas; il faut supposer que la classe H_1 est stable par changement de base.

2.1 Soit H une catégorie à limites projectives finies naturalisées (donc choisies) et soit θ une décomposition de H, telle que H_1 soit stable par changement de base; on pourrait supposer, plus précisément, quitte à modifier le choix des limites, que:

$\forall f: X \to Y \in H$, le foncteur $f^{-1}()$ définit en fait un morphisme strict de θ_Y vers θ_X.

Considérons alors le diagramme suivant:

$$\Lambda = \begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ S & & B \end{tikzcd}$$

Un Λ-diagramme F dans H, ou *span de* H, sera souvent identifié au couple $(F(a), F(b))$; on dira que $F(S)$ est la source de F et $F(B)$ son but.

On désigne par Λ_H la classe des spans de H ; c'est une classe d'objets de la catégorie H^{Λ} des morphismes entre Λ-diagrammes et on identifie $(H^{\Lambda})_0$ et Λ_H.

Le choix de produits fibrés dans H détermine une loi de composition $\vee$ dans Λ_H définie comme suit:

soient $G=(g, g')$ et $F=(f, f')$; $G \vee F$ est défini si et seulement si $F(B)=\beta(f')=\alpha(g)=G(S)$ et dans ce cas:

$$G \vee F = (g' . g^{-1}(f'), f . f'^{-1}(g)).$$

Cette loi confère à Λ_H une structure de catégorie non associative.

2.2 *La relation ρ et la catégorie H^r.*

2.2.0. Disons tout de suite qu'il conviendrait d'affecter les nouveaux symboles $(\rho, r, etc...)$ de l'indice θ, rappelant ainsi que les constructions qui suivent en dépendent; nous ne le faisons pas pour alléger l'écriture et considérant que θ est fixé à cet effet.

2.2.1. Désignons par $H^{\Lambda=}$ la sous-catégorie de H^{Λ} formée des $t: F \to G$ satisfaisant:

$$t(B)=F(B)=G(B),\quad t(S)=F(S)=G(S);$$

t est alors parfaitement déterminé par $t(R)$ et un élément de $H^{\Lambda=}$ s'identifie naturellement à un triplet (G,h,F) dans lequel $G=(g,g')$ et $F=(f,f')$ sont des spans de H et $h\in H$ satisfait:

$$g'.h=f',\qquad g.h=f,$$

qu'on écrit brièvement $G.h=F$.

2.2.2. Soit ρ' la relation suivante, dans Λ_H :

$$G\rho' F \iff \exists (G,h,F)\in H^{\Lambda=},\ \text{avec}\ \ h\in H_1.H_\gamma;$$

remarquons qu'il revient au même de dire $h\in H_\gamma.H_1$ ou encore $h_2\in H_\gamma$.

Soit ρ la relation d'équivalence engendrée par ρ'.

PROPOSITION. *Le quotient $\Lambda_H/\rho=H^r$ est une catégorie pour la loi de composition «$\vee$ mod ρ»; la catégorie H^r est indépendante du choix des produits fibrés dans H.*

DEMONSTRATION. Elle s'effectue en rassemblant les points suivants:

- Soit (G,F) composable dans $(\Lambda_H,\vee)$ et soit $(\overline{G},\overline{F})$ tel que $\overline{G}\rho' G$ et $\overline{F}\rho' F$; la stabilité de H_1 par changement de base montre que $(\overline{G}\vee\overline{F})\rho'(G\vee F)$.

- Par récurrence, on en déduit alors que:

$$G'\rho G \ \text{ et }\ F'\rho F \Longrightarrow (G'\vee F')\rho(G\vee F).$$

- Si $\vee'$ est la loi de composition dans Λ_H associée à un autre choix de produits fibrés, il est clair que $G\vee F$ et $G\vee' F$ sont simultanément définis et l'on a

$$(G\vee F)\rho'(G\vee' F)$$

par définition de ρ'.

- Les limites d'un même diagramme (en l'occurrence ) étant isomorphes, il est clair que, lorsque $G\vee F$ et $K\vee G$ sont définis, il vient

$$K\vee(G\vee F)\,\rho'\,(K\vee G)\vee F.$$

- Enfin la relation ρ est élémentaire dans Λ_H, car

$$G\rho G' \Longrightarrow G(S)=G'(S) \quad \text{et} \quad G(B)=G'(B).$$

Ceci achève la démonstration de la proposition.

TERMINOLOGIE ET NOTATIONS.

- Soit $F \in \Lambda_H$ avec $F(S)=X$ et $F(B)=Y$; on désignera simplement $F \bmod \rho$ par R_F et on l'appellera une *relation de source X et de but Y;* puisque ρ est élémentaire, il n'y a pas d'inconvénient à identifier H_0 et $(H^r)_0$.

- La loi de composition «$\vee \bmod \rho$», dite composition des relations, est notée par un rond «$\circ$»; si $G \vee F$ est défini dans Λ_H, $R_G \circ R_F$ est défini dans H^r et égal à $R_{G\vee F}$.

2.3 *Remarque sur les limites. Représentation cartésienne.*

On n'a utilisé jusqu'ici que les produits fibrés finis. Si H est aussi à produits (naturalisés) finis, les relations admettent une «*représentation cartésienne*»*:* à tout span F de source X et but Y on fait correspondre son crochet $[F]: F(R) \to X \times Y$; si (p, q) est le couple des projections naturelles de $X \times Y$ vers X et Y, c'est un span, noté simplement P_{XY}, et l'on a $P_{XY}.[F]=F$ par définition de $[F]$; on peut considérer aussi le span $F_2 = P_{XY}.[F]_2$ (il n'y a pas de confusion de notations possible, puisque $[F_2]=[F]_2$).

Il est clair que l'on a $F\rho' F_2$; une flèche telle que $[F]_2$ est appelée *représentation cartésienne de R_F;* deux représentations cartésiennes r_2 et r'_2 d'une même relation R sont telles qu'il existe un inversible γ de H_2 (pas forcément unique!) tel que $r'_2 = r_2.\gamma$.

Notons enfin que ρ est aussi engendrée par les seules relations du type

- $F\rho' F_2$,
- $F_2 \approx G_2$, s'il existe $\gamma \in H_\gamma$ tel que $[F_2].\gamma = [G]_2$;

c'est ce point de vue qui est développé dans [2].

2.4 *L'involution et le foncteur graphe.*

2.4.1. A tout span $F: X \to Y$ est associé le span «*opposé*» $F^*: Y \to X$

défini par

$$F^* = (f', f) \text{ si } F = (f, f').$$

Cette involution dans Λ_H est compatible avec la relation ρ et passe au quotient dans H^r ; ainsi la catégorie des relations est naturellement munie d'une involution : si $R = R_F$, alors la relation opposée est $R^* = R_{F^*}$. Lorsque $R' \circ R$ est défini dans H^r, $R^* \circ R'^*$ l'est aussi et l'on a

$$R^* \circ R'^* = (R' \circ R)^*.$$

Ceci fait de $(H^r, *)$ une catégorie involutive dans la terminologie de [3] par exemple.

2.4.2. A toute flèche $f : X \to Y$ correspond le span $L_f : X \to Y$ défini par $L_f = (1_X, f)$; la relation L_f *modulo* ρ, notée $Gr(f)$, est appelée *graphe de* f. Il est clair que la correspondance $f \rightsquigarrow Gr(f)$ définit en fait un foncteur de H dans H^r, appelé *foncteur graphe*, et noté Gr. Le foncteur graphe induit l'identité sur les objets.

DEFINITION. θ est une décomposition *fonctionnelle* si le foncteur Gr est fidèle.

Ceci signifie intuitivement que H est bien une catégorie «d'applications» pour H^r, car un morphisme f est alors bien caractérisé par sa source, son but et son graphe.

PROPOSITION. *Supposons que θ ait la propriété suivante :*

(K) Si $f \in H_1$ (resp. H_2) a un inverse à gauche (resp. à droite), alors f est inversible.

Dans ce cas, si H est à limites projectives finies, la décomposition θ est fonctionnelle.

Soit en effet f et f' de source X et but Y, et supposons que $Gr(f) = Gr(f')$; il existe $\gamma \in H_2 \cap H_\gamma$ tel que $[f]_2 = [f']_2 . \gamma$; posons

$$\pi_1 . [f]_2 = \lambda_2 . \lambda_1, \quad \pi_1 . [f']_2 = \lambda'_2 . \lambda'_1,$$

où π est la projection naturelle $X \times Y \to X$ (l'autre étant $\pi' : X \times Y \to Y$) ; puisque

$$\pi . [f] = \pi_2 . \pi_1 . [f]_2 . [f]_1 = \pi_2 . \lambda_2 . \lambda_1 . [f]_1 = 1_X,$$

il résulte de l'unicité de décomposition et de l'hypothèse *(K)* que π_2 et $[f]_1$ sont inversibles et $\pi_2^{-1} = \lambda_2$, $[f]_1^{-1} = \lambda_1$; on trouve de même, en partant de $\pi . [f'] = 1_X$, que $\pi_2^{-1} = \lambda'_2$ et $[f']_1^{-1} = \lambda'_1$, ce qui démontre déjà que $\lambda_2 = \lambda'_2$; mais

$$\pi_1 . [f]_2 = \lambda_2 . \lambda_1 = \pi_1 . [f']_2 . \gamma = \lambda'_2 . \lambda'_1 . \gamma = \lambda_2 . \lambda'_1 . \gamma,$$

et puisque $\lambda_2 \in H_\gamma$, on a $\lambda_1 = \lambda'_1 . \gamma$; alors, puisque λ_1, λ'_1 et γ sont inversibles, on peut écrire $\lambda_1^{-1} = \gamma^{-1} . \lambda'^{-1}_1$ et l'unicité de décomposition entraîne $\gamma \in H_o$ et $\lambda_1 = \lambda'_1$, d'où

$$\begin{aligned} f = \pi' . [f] &= \pi' . [f]_2 . [f]_1 \\ &= \pi' . [f']_2 . [f']_1 \\ &= \pi' . [f'] = f'. \end{aligned}$$

REMARQUE. La proposition est encore vraie si, au lieu de supposer H à produits finis, on suppose que H_1 est formé d'épimorphismes.

2.5 *Représentation de Kleisli des relations.*

2.5.0. On suppose maintenant que le foncteur graphe $Gr : H \to H^r$ a un adjoint à droite, qu'on note P ; on convient toujours d'identifier H_o et $(H^r)_o$; pour tout objet X, on a alors :

- le projecteur $X \xrightarrow[i_X]{} P X$ dans H,
- le coprojecteur $P X \xrightarrow[\epsilon_X]{} X$ dans H^r.

Il convient de regarder i_X comme «*application singleton*», $Gr(i_X)$ comme la «*relation d'égalité en X*», ϵ_X comme «*relation d'appartenance à X*», $P(\epsilon_X) : P^2 X \to P X$ comme «*l'application réunion*».

PROPOSITION. *Il est équivalent de dire:*

- *θ est fonctionnelle,*
- *la famille $(i_X)_{X \in H_o}$ est formée de monomorphismes.*

C'est une propriété des adjoints.

2.5.1. Que θ soit fonctionnelle ou non, on a la

PROPOSITION. *H^r est canoniquement isomorphe à la catégorie de Kleisli du triple dans H défini par la paire d'adjoints (P, Gr).*

DEMONSTRATION. Soit $f : X \to P Y$ un morphisme dans H; on lui fait correspondre la relation $R_f : X \to Y$ suivante :

$$R_f = \epsilon_Y \circ Gr(f);$$

réciproquement, si $R : X \to Y$ est une relation, on lui fait correspondre le morphisme f_R dans H, $f_R : X \to P Y$ suivant :

$$f_R = P(R) . i_X ;$$

on a alors :

$$\begin{aligned} f_{R_f} &= P(R_f) . i_X \\ &= P(\epsilon_Y) . P\, Gr(f) . i_X \\ &= P(\epsilon_Y) . i_{PY} . f = f, \end{aligned}$$

car $P(\epsilon_Y) . i_{PY} = 1_{PY}$ résulte de l'adjonction ; d'autre part

$$\begin{aligned} R_{f_R} &= \epsilon_Y \circ Gr(f_R) \\ &= \epsilon_Y \circ GrP(R) \circ Gr(i_X) \\ &= R \circ \epsilon_X \circ Gr(i_X) = R, \end{aligned}$$

car $\epsilon_X \circ Gr(i_X) = 1_X$ résulte de l'adjonction, ce qui achève la démonstration.

En résumé, dans la situation précédente, une relation R de X vers Y peut revêtir trois aspects :

1° celui de la définition initiale : R est une classe d'équivalence *mod* ρ de spans;

2° celui décrit dans la proposition précédente : représentation fonctionnelle $f_R : X \to P Y$;

3° celui lié à l'existence de produits finis dans H : représentation cartésienne de R comme classe d'isomorphisme de flèches dans H_2 de but $X \times Y$ (cf. paragraphe 2.3).

2.5.2. *Un exemple typique.* Dans un topos E, où on a fait un choix canonique de sous-objets, la décomposition «épi-mono canonique» (qui est unique) conduit à une catégorie de relations E^r ayant les trois aspects précédents. Plus généralement, à toute topologie j dans E, au sens de Tierney-Lawvere, correspond une décomposition θ_j pour laquelle f_1

est à «image dense dans son but» et f_2 est «fermée»; la théorie de relations correspondante est celle des relations (dans E^r) qui ont une représentation cartésienne fermée. Le triple dans E, déduit de θ_j, a pour endofoncteur sous-jacent $\Omega_j^{(\,)}$ où Ω_j est l'objet de E «caractéristique des sous-objets fermés»; pour plus de détails, nous renvoyons à [3], où ces exemples figurent au titre des «monades involutives, permettant des traductions équationnelles de notions ensemblistes».

D'autres exemples figurent dans [2].

2.6 *La 2-catégorie des relations.*

2.6.0. Dans le cas ordinaire, il y a l'ordre naturel entre les relations, défini par l'inclusion; partant d'une décomposition θ de H telle que H_1 soit stable par produits fibrés, on a déjà défini la catégorie des relations H^r, à partir de Λ_H ; en partant maintenant de $H^{\Lambda =}$, on va construire une 2-catégorie μ^r dont H^r sera la catégorie des 1-morphismes; un 2-morphisme de R vers R' généralise la notion d'inclusion $R \subset R'$; de façon imagée, on peut dire que, dans le cas général, une relation R' peut «contenir» une relation R a priori de plusieurs façons.

2.6.1. Soient X et Y deux objets fixés de H ; on s'intéresse alors à la catégorie $Y H^{\Lambda =} X$ des $(G, h, F) \in H^\Lambda$ tels que G et F soient des spans de source X et de but Y. On définit une certaine relation d'équivalence $\bar{\rho}$ dans $H^{\Lambda =}$ en la définissant dans chaque catégorie $Y H^{\Lambda =} X$ de la façon suivante: $\bar{\rho}$ est la relation d'équivalence bicompatible engendrée par la relation élémentaire $\bar{\rho}'$ suivante:

$(G, h, F)\bar{\rho}'(G', h', F')$ si et seulement si il existe un quatuor, dans $Y H^{\Lambda =} X$, du type

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "g"'] & F \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ G' & F' \arrow[l, "h'"] \end{tikzcd}$$

avec f et g appartenant à $H_1 . H_\gamma$.

La relation $\overline{\rho}$ induit sur la classe Λ_H la relation ρ; de plus on a la

PROPOSITION. *$H^{\Lambda =}/\overline{\rho}$ est une 2-catégorie μ^r dont la catégorie des 1-morphismes est H^r.*

Comme $\overline{\rho}$ est bicompatible dans chaque catégorie $Y H^{\Lambda =} X$, les quotients $Y H^{\Lambda =} X/\overline{\rho}$ sont des catégories $Y \mu^r X$ ayant $Y H^r X$ pour classe d'objets (1-morphismes de X vers Y) car $\overline{\rho}$ induit la relation ρ dans $\Lambda_H \simeq (H^{\Lambda =})_0$. Il suffit de constater alors que la composition des relations définie en **2.5** se prolonge en fait aux 2-morphismes; soient X, Y, Z trois objets de H; la loi $\vee$ définie dans Λ_H à l'aide d'un choix de produits fibrés se prolonge de façon naturelle à $H^{\Lambda =}$:

$$(Z H^{\Lambda =} Y) \times (Y H^{\Lambda =} X) \xrightarrow{\vee} Z H^{\Lambda =} X$$

par propriété universelle du produit fibré; la classe H_1 étant stable par par produits fibrés, cette loi est compatible avec la relation d'équivalence $\overline{\rho}$; si on modifie les produits fibrés, on trouve des composés dans $Z H^{\Lambda =} X$ d'un même couple $((H, k, G'), (G, h, F))$ isomorphes, dans le sens qu'ils sont côtés opposés d'un quatuor dont les deux autres côtés sont inversibles, donc ces composés sont encore équivalents modulo $\overline{\rho}$; d'où la loi de composition «$\circ$» dans la 2-catégorie μ^r, qui étend la composition des relations aux 2-morphismes:

$$(Z \mu^r Y) \times (Y \mu^r X) \xrightarrow{\circ} Z \mu^r X.$$

Cette loi de composition est associative et ne dépend pas du choix des produits fibrés dans H, comme dans le cas des 1-morphismes. L'axiome de permutabilité des deux lois de composition «$\circ$» et «.» (composition dans les $Y \mu^r X$) résulte encore du fait que la relation d'équivalence $\overline{\rho}$ est compatible avec les produits fibrés.

REMARQUE. Cette construction a été faite à partir de $H^{\Lambda =}$ et non de H^{Λ} dans le seul souci de retrouver simplement l'analogue de l'ordre entre relations, lequel définit bien une structure de catégorie dans la classe des relations, conférant à celle-ci une structure de 2-catégorie quand on y a déjà défini la composition usuelle des relations, la structure d'ordre satisfaisant bien la condition suivante :

$$R \subset R' \quad \text{et} \quad R_1 \subset R'_1 \implies R_1 \circ R \subset R'_1 \circ R',$$

lorsque $R_1 \circ R$ et $R'_1 \circ R'$ sont définis, condition qu'on retrouve dans le cas générale sous forme de l'axiome de permutabilité dans la 2-catégorie μ^r. En partant de H^Λ, on obtient une catégorie double et non une 2-catégorie.

APPENDICE PAR L.COPPEY

L'origine de ce travail se trouve dans [1] et [3] ; la notion de catégorie de relations a souvent été considérée ; dans [3], par exemple, elle était étudiée en faisant usage d'une sous-classe H' permettant aussi bien de calculer les relations que de trouver un «ordre naturel» entre elles. La notion de décomposition introduite en [1] était tout à fait adaptée au problème et, en ce sens, le présent travail complète et améliore l'étude faite en [3].

Les décompositions d'une catégorie ont été considérées par KELLY dans [5], d'une façon apparemment différente : la propriété référencée ici (1.4.2) fait partie des axiomes, par contre l'unicité de la décomposition est une conséquence ; cependant il s'agit bien de la même notion ; nous avions déjà montré en 1971 que c'étaient les algèbres du triple :

$$H \xrightarrow{\delta_H} H^2 \xleftarrow{\mu_H} (H^2)^2$$

dont on a une description rapide : en appliquant le foncteur $H^{(\,)}$ à

$$1 \xleftarrow{s} 2 \xrightarrow{\delta_2} 2 \times 2\,,$$

on trouve :

$$\delta_H \simeq H^s, \quad \mu_H \simeq H^{\delta_2}.$$

A ce sujet, les décompositions de structures algébriques en produits et les triples associés étaient introduits dans la première partie de [1], où figure une petite erreur qu'un lecteur bienveillant peut rectifier de lui-même : il faut ôter de la catégorie $\mathfrak{M}$ l'ensemble $\emptyset$ et ce qui vient avec ou, ce qui revient au même, remplacer $\mathfrak{M}$ par la catégorie des applications pointées $\mathfrak{M}_{\bullet}$; à part cela tout le reste est exact, en particulier le cas des catégories d'algèbres au-dessus de $\mathfrak{M}$ de la forme :

$$\mathfrak{A} \xrightarrow{U} \mathfrak{M} \quad \text{telles que} \quad U^{-1}(\emptyset) = \emptyset \ ! \ldots$$

KELLY a retrouvé nos résultats de 1971 assez récemment [6], en utilisant judicieusement la notion d'épimorphisme régulier, ce qui faisait défaut dans notre article et c'est aussi la raison de l'apparente complication de la démonstration qui figure en [1] (première partie, p. 13); de ce fait notre raisonnement n'était pas transportable au cas des catégories d'algèbres au-dessus d'une catégorie $\mathfrak{A}$ autre que $\mathfrak{M}$.

Signalons enfin l'article de J. MEISEN [7], dont nous n'avons eu connaissance qu'après avoir terminé celui-ci ; il semble qu'il y ait entre ces deux articles des points communs ; J. MEISEN s'appuie entre autre sur la notion de décompositions telle que KELLY la présentait en 1972, et elle développe une théorie assez générale au niveau des 2-catégories.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. COPPEY, Décompositions de structures en produits, *Esquisses Math.* 14, Paris (1971).
2. L. COPPEY, *Triples de décompositions* (à paraître).
3. R. DAVAR-PANAH, *Catégories de relations*, Thèse 3^{e} cycle, multigraphiée Paris (1968).
4. R. GUITART, Foncteurs sous-objets et relations continues, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XIII-1 (1972).
5. FREYD-KELLY, Categories of continuous functors, *J. Pure and Applied Algebra* 2 (1972).
6. M. KELLY, Conférences au Séminaire EHRESMANN-BASTIANI, Paris, 1975.
7. J. MEISEN, On bicategories of relations and pullback spans, *Com. Algebra* 1 (1974), 377-401.

Théorie et Applications des Catégories,
U. E. R. Mathématiques, 33 rue Saint-Leu, 80039 AMIENS, FRANCE

et

Département de Mathématiques, Université Arya-Mehr, Av. Eisenhower,
TEHERAN, IRAN