

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

L. COPPEY

R. DAVAR-PANAH

Décompositions et catégories de relations

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome
16, n° 2 (1975), p. 135-148

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1975__16_2_135_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DECOMPOSITIONS ET CATEGORIES DE RELATIONS

par L. COPPEY et R. DAVAR-PANAH

1. Rappels sur les décompositions.

1.1 Soit H une catégorie. Considérons les couples de sous-catégories (H_2, H_1) de H satisfaisant :

i) $H = H_2 \cdot H_1$,

ii) $H_1 \cap H_2 = H_0$ (= classe des objets de H).

On dit qu'un tel couple définit une décomposition θ de H lorsque toute flèche $f \in H$ se décompose de façon unique sous la forme $f = g \cdot b$ avec $b \in H_1$ et $g \in H_2$; dans ce cas, on désigne, pour tout $f \in H$, par (f_2, f_1) l'unique élément de $H_2 \times H_1$ tel que $f = f_2 \cdot f_1$; les applications de H dans H ,

$$f \rightsquigarrow f_1 \text{ et } f \rightsquigarrow f_2,$$

sont notées respectivement a_1 et a_2 et le symbole θ désigne indifféremment le couple (a_1, a_2) ou le couple (H_1, H_2) .

1.2 Si θ est une décomposition de H , on trouve les égalités suivantes :

$$- \forall f \in H, f_{11} = f_1; f_{22} = f_2; f_{12} = f_{21} = \alpha(f_2) = \beta(f_1).$$

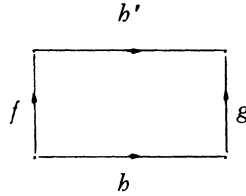
$$- \forall (g, f) \in H * H, (g \cdot f)_2 = g_2 \cdot (g_1 \cdot f_2)_2 \text{ et } (g \cdot f)_1 = (g_1 \cdot f_2)_1 \cdot f_1.$$

1.3 - On trouvera dans [2] d'autres façons de définir les décompositions de H ; il a été démontré dans [1] que les décompositions de H sont en bijection naturelle avec les algèbres sur H d'un triple dans la catégorie \mathcal{F} des foncteurs.

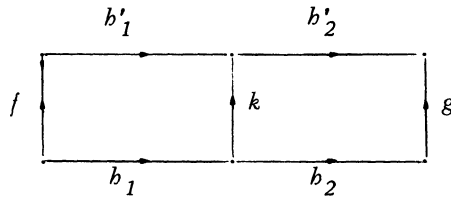
1.4 Rappelons les résultats suivants, démontrés dans [2], relatifs à une décomposition θ de H :

1.4.1. Si γ est inversible, γ_1 et γ_2 sont encore inversibles et $\gamma_1^{-1} \in H_1$, $\gamma_2^{-1} \in H_2$.

1.4.2. Pour tout quatuor (g, b', b, f) ,



il existe une unique flèche k telle que le diagramme suivant soit commutatif :



et ceci définit en fait une décomposition (double) de la catégorie (double) des quatuors de H .

1.4.3. On déduit alors de 1.4.2 que, pour tout type de diagramme I , la catégorie H^I des morphismes entre I -diagrammes dans H est naturellement munie d'une structure de décomposition θ^I définie par (H_2^I, H_1^I) .

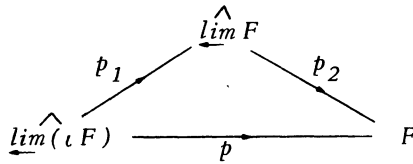
1.5 Relations entre limites et décompositions. Soit I un type de diagrammes connexe. Soit θ une décomposition de H ; désignons par ι l'insertion de H_2 dans H et par F un «foncteur» de I dans H_2 ; on a les résultats suivants :

1.5.1. Si $\varprojlim F$ existe, $\varprojlim (\iota \circ F)$ existe aussi et on peut choisir cette dernière égale à $\varprojlim F$.

1.5.2. Si $\varprojlim (\iota \circ F)$ existe, $\varprojlim F$ existe aussi et est isomorphe à $\varprojlim (\iota \circ F)$; plus précisément, soit

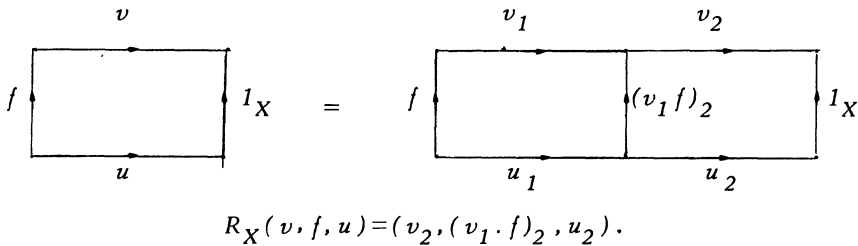
$$p : \widehat{\varprojlim (\iota \circ F)} \longrightarrow F, \quad p \in H^I,$$

une naturalisation de $\varprojlim (\iota F)$; on peut décomposer p relativement à θ^I , dans H^I , en $p_2 \cdot p_1$; alors $\alpha(p_2) = \beta(p_1)$ est un foncteur constant sur une limite projective de F et p_2 en est une naturalisation, p_1 étant une transformation naturelle constante inversible :



(on désigne par \hat{X} le «foncteur» constant sur X). Donc, le foncteur ι est compatible avec les limites projectives connexes; si H_2 est à $I\text{-}\hat{\lim}$, ι est aussi à $I\text{-}\hat{\lim}$, lorsque I est connexe. On a un résultat dual avec les $I\text{-}\hat{\lim}$, en remplaçant H_2 par H_1 .

1.5.3. Soit X un objet de H ; on montre facilement que H_{2X} est une sous-catégorie pleine de H_X ; c'est même une sous-catégorie réflexive; précisons la réflexion $R_X: H_X \rightarrow H_{2X}$; soit (v, f, u) un «morphisme au-dessus de X »; on peut le regarder comme un quatuor de source f et de but I_X ; alors, d'après 1.4.2, il se décompose de façon unique comme



Donc, si $I_X: H_{2X} \rightarrow H_X$ désigne l'insertion, R_X est un adjoint à gauche de I_X . (H_X note la catégorie des objets au-dessus de X .)

1.5.4. Avec les notations de 1.5.3, on peut regarder (v, f, u) comme un quatuor de source u et but v ; en décomposant, dans ce sens, selon 1.4.2, on construit de la sorte une décomposition naturelle θ_X dans H_X (il ne faut pas confondre H_{2X} et H_{X2} !). Si la catégorie H est à limites projectives, on en déduit aussitôt que l'insertion $\iota_X: H_{2X} \rightarrow H_X$ est un foncteur à limites projectives (il les crée aussi), car les limites dans H_X correspondent à des limites connexes dans H et on peut appliquer 1.5.2.

L'insertion $I_X: H_{2X} \rightarrow H_X$ factorise à travers l'insertion $\iota_X: H_{X2} \rightarrow H_X$; soit $I_X = \iota_X \cdot i_X$.

1.5.5. Soit $f: X \rightarrow Y$ une flèche de H ; la composition par f définit le foncteur $\Sigma_f: H_X \rightarrow H_Y$ et, lorsque H est à produits fibrés choisis, le produit fibré par f définit un foncteur $f^{-1}()$ de H_Y vers H_X , adjoint à droite de Σ_f ; on a alors les résultats suivants, pour une décomposition θ de H :

- $f^{-1}()$ admet une restriction, notée encore $f^{-1}()$, de H_{2Y} dans H_{2X} ; ceci nécessite un bon choix des produits fibrés par f et signifie exactement que H_2 est stable par produits fibrés (à isomorphisme près);
- le foncteur $f^{-1}(): H_{2Y} \rightarrow H_{2X}$ a un adjoint à gauche, qu'on peut noter simplement $f()$; il est défini pour un objet $U \xrightarrow{u} X$ de H_{2X} par

$$f(u) = (f \cdot u)_2.$$

REMARQUES. 1° En général H_1 n'est pas stable par changement de base.

2° On définit les morphismes stricts entre décompositions de la façon suivante: si θ est une décomposition de H et θ' une décomposition de H' , un *morphisme (strict) de θ vers θ'* est la donnée d'un foncteur $F: H \rightarrow H'$ tel que

$$F(H_1) \subset H'_1 \text{ et } F(H_2) \subset H'_2;$$

par exemple, l'oubli naturel de H_X vers H définit un morphisme strict de θ_X vers θ (cf. 1.5.4); autre exemple: le foncteur Σ_f définit un morphisme de θ_X vers θ_Y pour $f: X \rightarrow Y$. Le foncteur $f^{-1}()$ « respecte » H_2 , si les produits fibrés sont bien choisis, mais pas forcément H_1 , donc ne peut pas définir en général un morphisme de θ_Y vers θ_X .

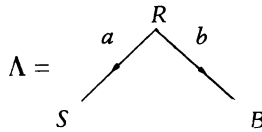
2. Catégories de relations.

2.0 Intuitivement, on fait jouer à H_2 le rôle habituellement dévolu aux monomorphismes: une relation de X vers X' est une classe d'isomorphisme de flèches dans H_2 de but $X \times X'$, lorsque $X \times X'$ existe. Avec une telle définition, les relations ne se composent malheureusement pas; il faut supposer que la classe H_1 est stable par changement de base.

2.1 Soit H une catégorie à limites projectives finies naturalisées (donc choisies) et soit θ une décomposition de H , telle que H_I soit stable par changement de base; on pourrait supposer, plus précisément, quitte à modifier le choix des limites, que :

$\forall f: X \rightarrow Y \in H$, le foncteur $f^{-1}()$ définit en fait un morphisme strict de θ_Y vers θ_X .

Considérons alors le diagramme suivant :



Un Λ -diagramme F dans H , ou *span de H* , sera souvent identifié au couple $(F(a), F(b))$; on dira que $F(S)$ est la source de F et $F(B)$ son but.

On désigne par Λ_H la classe des spans de H ; c'est une classe d'objets de la catégorie H^Λ des morphismes entre Λ -diagrammes et on identifie $(H^\Lambda)_0$ et Λ_H .

Le choix de produits fibrés dans H détermine une loi de composition \vee dans Λ_H définie comme suit :

soient $G=(g, g')$ et $F=(f, f')$; $G \vee F$ est défini si et seulement si $F(B)=\beta(f')=\alpha(g)=G(S)$ et dans ce cas :

$$G \vee F=(g'.g^{-1}(f'), f.f'^{-1}(g)).$$

Cette loi confère à Λ_H une structure de catégorie non associative.

2.2 La relation ρ et la catégorie H^r .

2.2.0. Disons tout de suite qu'il conviendrait d'affecter les nouveaux symboles ($\rho, r, etc...$) de l'indice θ , rappelant ainsi que les constructions qui suivent en dépendent; nous ne le faisons pas pour alléger l'écriture et considérant que θ est fixé à cet effet.

2.2.1. Désignons par $H^{\Lambda=}$ la sous-catégorie de H^Λ formée des $t: F \rightarrow G$ satisfaisant :

$$t(B) = F(B) = G(B), \quad t(S) = F(S) = G(S);$$

t est alors parfaitement déterminé par $t(R)$ et un élément de $H^{\Lambda=}$ s'identifie naturellement à un triplet (G, b, F) dans lequel $G = (g, g')$ et $F = (f, f')$ sont des spans de H et $b \in H$ satisfait :

$$g' \cdot b = f', \quad g \cdot b = f,$$

qu'on écrit brièvement $G \cdot b = F$.

2.2.2. Soit ρ' la relation suivante, dans Λ_H :

$$G \rho' F \iff \exists (G, b, F) \in H^{\Lambda=}, \text{ avec } b \in H_1 \cdot H_\gamma;$$

remarquons qu'il revient au même de dire $b \in H_\gamma \cdot H_1$ ou encore $b_2 \in H_\gamma$.

Soit ρ la relation d'équivalence engendrée par ρ' .

PROPOSITION. *Le quotient $\Lambda_H / \rho = H^r$ est une catégorie pour la loi de composition « $\vee \text{ mod } \rho$ »; la catégorie H^r est indépendante du choix des produits fibrés dans H .*

DEMONSTRATION. Elle s'effectue en rassemblant les points suivants :

- Soit (G, F) composable dans (Λ_H, \vee) et soit (\bar{G}, \bar{F}) tel que $\bar{G} \rho' G$ et $\bar{F} \rho' F$; la stabilité de H_1 par changement de base montre que $(\bar{G} \vee \bar{F}) \rho' (G \vee F)$.


- Par récurrence, on en déduit alors que :

$$G' \rho G \quad \text{et} \quad F' \rho F \implies (G' \vee F') \rho (G \vee F).$$

- Si \vee' est la loi de composition dans Λ_H associée à un autre choix de produits fibrés, il est clair que $G \vee F$ et $G \vee' F$ sont simultanément définis et l'on a

$$(G \vee F) \rho' (G \vee' F)$$

par définition de ρ' .

- Les limites d'un même diagramme (en l'occurrence ) étant isomorphes, il est clair que, lorsque $G \vee F$ et $K \vee G$ sont définis, il vient

$$K \vee (G \vee F) \rho' (K \vee G) \vee F.$$

- Enfin la relation ρ est élémentaire dans Λ_H , car

$$G \rho G' \implies G(S) = G'(S) \text{ et } G(B) = G'(B).$$

Ceci achève la démonstration de la proposition.

TERMINOLOGIE ET NOTATIONS.

- Soit $F \in \Lambda_H$ avec $F(S) = X$ et $F(B) = Y$; on désignera simplement $F \text{ mod } \rho$ par R_F et on l'appellera une *relation de source X et de but Y*; puisque ρ est élémentaire, il n'y a pas d'inconvénient à identifier H_0 et $(H^r)_0$.

- La loi de composition « $\bigvee \text{ mod } \rho$ », dite composition des relations, est notée par un rond « \circ »; si $G \bigvee F$ est défini dans Λ_H , $R_G \circ R_F$ est défini dans H^r et égal à $R_{G \bigvee F}$.

2.3 *Remarque sur les limites. Représentation cartésienne.*

On n'a utilisé jusqu'ici que les produits fibrés finis. Si H est aussi à produits (naturalisés) finis, les relations admettent une « *représentation cartésienne* »: à tout span F de source X et but Y on fait correspondre son crochet $[F] : F(R) \rightarrow X \times Y$; si (p, q) est le couple des projections naturelles de $X \times Y$ vers X et Y , c'est un span, noté simplement P_{XY} , et l'on a $P_{XY} \cdot [F] = F$ par définition de $[F]$; on peut considérer aussi le span $F_2 = P_{XY} \cdot [F]_2$ (il n'y a pas de confusion de notations possible, puisque $[F_2] = [F]_2$).

Il est clair que l'on a $F \rho' F_2$; une flèche telle que $[F]_2$ est appelée *représentation cartésienne de R_F* ; deux représentations cartésiennes r_2 et r'_2 d'une même relation R sont telles qu'il existe un inversible γ de H_2 (pas forcément unique!) tel que $r'_2 = r_2 \cdot \gamma$.

Notons enfin que ρ est aussi engendrée par les seules relations du type

- $F \rho' F_2$,

- $F_2 \approx G_2$, s'il existe $\gamma \in H_\gamma$ tel que $[F_2] \cdot \gamma = [G]_2$;

c'est ce point de vue qui est développé dans [2].

2.4 *L'involution et le foncteur graphe.*

2.4.1. A tout span $F : X \rightarrow Y$ est associé le span « *opposé* » $F^* : Y \rightarrow X$

défini par

$$F^* = (f', f) \text{ si } F = (f, f').$$

Cette involution dans Λ_H est compatible avec la relation ρ et passe au quotient dans H^r ; ainsi la catégorie des relations est naturellement munie d'une involution: si $R = R_F$, alors la relation opposée est $R^* = R_{F^*}$. Lorsque $R' \circ R$ est défini dans H^r , $R^* \circ R'^*$ l'est aussi et l'on a

$$R^* \circ R'^* = (R' \circ R)^*.$$

Ceci fait de $(H^r, *)$ une catégorie involutive dans la terminologie de [3] par exemple.

2.4.2. A toute flèche $f: X \rightarrow Y$ correspond le span $L_f: X \rightarrow Y$ défini par $L_f = (1_X, f)$; la relation L_f modulo ρ , notée $Gr(f)$, est appelée *graphe de f* . Il est clair que la correspondance $f \rightsquigarrow Gr(f)$ définit en fait un foncteur de H dans H^r , appelé *foncteur graphe*, et noté Gr . Le foncteur graphe induit l'identité sur les objets.

DEFINITION. θ est une décomposition *fonctionnelle* si le foncteur Gr est fidèle.

Ceci signifie intuitivement que H est bien une catégorie «d'applications» pour H^r , car un morphisme f est alors bien caractérisé par sa source, son but et son graphe.

PROPOSITION. Supposons que θ ait la propriété suivante:

(K) Si $f \in H_1$ (resp. H_2) a un inverse à gauche (resp. à droite), alors f est inversible.

Dans ce cas, si H est à limites projectives finies, la décomposition θ est fonctionnelle.

Soit en effet f et f' de source X et but Y , et supposons que $Gr(f) = Gr(f')$; il existe $\gamma \in H_2 \cap H_\gamma$ tel que $[f]_2 = [f']_2 \cdot \gamma$; posons

$$\pi_1 \cdot [f]_2 = \lambda_2 \cdot \lambda_{1'}, \quad \pi_1 \cdot [f']_2 = \lambda'_2 \cdot \lambda'_1,$$

où π est la projection naturelle $X \times Y \rightarrow X$ (l'autre étant $\pi': X \times Y \rightarrow Y$); puisque

$$\pi \cdot [f] = \pi_2 \cdot \pi_1 \cdot [f]_2 \cdot [f]_1 = \pi_2 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_{1'} \cdot [f]_1 = 1_X,$$

il résulte de l'unicité de décomposition et de l'hypothèse (K) que π_2 et $[f]_1$ sont inversibles et $\pi_2^{-1} = \lambda_2$, $[f]_1^{-1} = \lambda_1$; on trouve de même, en partant de $\pi \cdot [f'] = 1_X$, que $\pi_2^{-1} = \lambda'_2$ et $[f']_1^{-1} = \lambda'_1$, ce qui démontre déjà que $\lambda_2 = \lambda'_2$; mais

$$\pi_1 \cdot [f]_2 = \lambda_2 \cdot \lambda_1 = \pi_1 \cdot [f']_2 \cdot \gamma = \lambda'_2 \cdot \lambda'_1 \cdot \gamma = \lambda_2 \cdot \lambda'_1 \cdot \gamma,$$

et puisque $\lambda_2 \in H_\gamma$, on a $\lambda_1 = \lambda'_1 \cdot \gamma$; alors, puisque λ_1 , λ'_1 et γ sont inversibles, on peut écrire $\lambda_1^{-1} = \gamma^{-1} \cdot \lambda'^{-1}_1$ et l'unicité de décomposition entraîne $\gamma \in H_0$ et $\lambda_1 = \lambda'_1$, d'où

$$\begin{aligned} f &= \pi' \cdot [f] = \pi' \cdot [f]_2 \cdot [f]_1 \\ &= \pi' \cdot [f']_2 \cdot [f']_1 \\ &= \pi' \cdot [f'] = f'. \end{aligned}$$

REMARQUE. La proposition est encore vraie si, au lieu de supposer H à produits finis, on suppose que H_1 est formé d'épimorphismes.

2.5 Représentation de Kleisli des relations.

2.5.0. On suppose maintenant que le foncteur graphe $Gr: H \rightarrow H^r$ a un adjoint à droite, qu'on note P ; on convient toujours d'identifier H_0 et $(H^r)_0$; pour tout objet X , on a alors:

- le projecteur $X \xrightarrow{i_X} P X$ dans H ,
- le coprojecteur $P X \xrightarrow{\epsilon_X} X$ dans H^r .

Il convient de regarder i_X comme « application singleton », $Gr(i_X)$ comme la « relation d'égalité en X », ϵ_X comme « relation d'appartenance à X », $P(\epsilon_X): P^2 X \rightarrow P X$ comme « l'application réunion ».

PROPOSITION. Il est équivalent de dire:

- θ est fonctionnelle,
- la famille $(i_X)_{X \in H_0}$ est formée de monomorphismes.

C'est une propriété des adjoints.

2.5.1. Que θ soit fonctionnelle ou non, on a la

PROPOSITION. H^r est canoniquement isomorphe à la catégorie de Kleisli du triple dans H défini par la paire d'adjoints (P, Gr) .

DEMONSTRATION. Soit $f: X \rightarrow PY$ un morphisme dans H ; on lui fait correspondre la relation $R_f: X \rightarrow Y$ suivante :

$$R_f = \epsilon_Y \circ Gr(f);$$

réciroquement, si $R: X \rightarrow Y$ est une relation, on lui fait correspondre le morphisme f_R dans H , $f_R: X \rightarrow PY$ suivant :

$$f_R = P(R) \cdot i_X;$$

on a alors :

$$\begin{aligned} f_{R_f} &= P(R_f) \cdot i_X \\ &= P(\epsilon_Y) \cdot P Gr(f) \cdot i_X \\ &= P(\epsilon_Y) \cdot i_{PY} \cdot f = f, \end{aligned}$$

car $P(\epsilon_Y) \cdot i_{PY} = I_{PY}$ résulte de l'adjonction; d'autre part

$$\begin{aligned} R_{f_R} &= \epsilon_Y \circ Gr(f_R) \\ &= \epsilon_Y \circ Gr P(R) \circ Gr(i_X) \\ &= R \circ \epsilon_X \circ Gr(i_X) = R, \end{aligned}$$

car $\epsilon_X \circ Gr(i_X) = I_X$ résulte de l'adjonction, ce qui achève la démonstration.

En résumé, dans la situation précédente, une relation R de X vers Y peut revêtir trois aspects :

1° celui de la définition initiale: R est une classe d'équivalence *mod* ρ de spans;

2° celui décrit dans la proposition précédente: représentation fonctionnelle $f_R: X \rightarrow PY$;

3° celui lié à l'existence de produits finis dans H : représentation cartésienne de R comme classe d'isomorphisme de flèches dans H_2 de but $X \times Y$ (cf. paragraphe 2.3).

2.5.2. *Un exemple typique.* Dans un topos E , où on a fait un choix canonique de sous-objets, la décomposition «épi-mono canonique» (qui est unique) conduit à une catégorie de relations E^r ayant les trois aspects précédents. Plus généralement, à toute topologie j dans E , au sens de Tierney-Lawvere, correspond une décomposition θ_j pour laquelle f_j

est à « image dense dans son but » et f_2 est « fermée »; la théorie de relations correspondante est celle des relations (dans E') qui ont une représentation cartésienne fermée. Le triple dans E , déduit de θ_j , a pour endofoncteur sous-jacent $\Omega_j^{(j)}$ où Ω_j est l'objet de E « caractéristique des sous-objets fermés »; pour plus de détails, nous renvoyons à [3], où ces exemples figurent au titre des « monades involutives, permettant des traductions équationnelles de notions ensemblistes ».

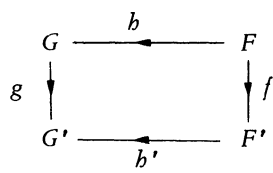
D'autres exemples figurent dans [2].

2.6 *La 2-catégorie des relations.*

2.6.0. Dans le cas ordinaire, il y a l'ordre naturel entre les relations, défini par l'inclusion; partant d'une décomposition θ de H telle que H_1 soit stable par produits fibrés, on a déjà défini la catégorie des relations H' , à partir de Λ_H ; en partant maintenant de $H^{\Lambda=}$, on va construire une 2-catégorie μ' dont H' sera la catégorie des 1-morphismes; un 2-morphisme de R vers R' généralise la notion d'inclusion $R \subset R'$; de façon imagée, on peut dire que, dans le cas général, une relation R' peut « contenir » une relation R a priori de plusieurs façons.

2.6.1. Soient X et Y deux objets fixés de H ; on s'intéresse alors à la catégorie $YH^{\Lambda=}X$ des $(G, b, F) \in H^{\Lambda}$ tels que G et F soient des spans de source X et de but Y . On définit une certaine relation d'équivalence $\bar{\rho}$ dans $H^{\Lambda=}$ en la définissant dans chaque catégorie $YH^{\Lambda=}X$ de la façon suivante: $\bar{\rho}$ est la relation d'équivalence bicompatible engendrée par la relation élémentaire $\bar{\rho}'$ suivante:

$(G, b, F) \bar{\rho}' (G', b', F')$ si et seulement si il existe un quatuor, dans $YH^{\Lambda=}X$, du type



avec f et g appartenant à $H_1 \cdot H_\gamma$.

La relation $\bar{\rho}$ induit sur la classe Λ_H la relation ρ ; de plus on a la

PROPOSITION. $H^{\Lambda=} / \bar{\rho}$ est une 2-catégorie μ^r dont la catégorie des 1-morphismes est H^r .

Comme $\bar{\rho}$ est bicompatible dans chaque catégorie $YH^{\Lambda=}X$, les quotients $YH^{\Lambda=}X / \bar{\rho}$ sont des catégories $Y\mu^rX$ ayant YH^rX pour classe d'objets (1-morphismes de X vers Y) car $\bar{\rho}$ induit la relation ρ dans $\Lambda_H \simeq (H^{\Lambda=})_o$. Il suffit de constater alors que la composition des relations définie en 2.5 se prolonge en fait aux 2-morphismes; soient X, Y, Z trois objets de H ; la loi \vee définie dans Λ_H à l'aide d'un choix de produits fibrés se prolonge de façon naturelle à $H^{\Lambda=}$:

$$(ZH^{\Lambda=}Y) \times (YH^{\Lambda=}X) \xrightarrow{\vee} ZH^{\Lambda=}X$$

par propriété universelle du produit fibré; la classe H_1 étant stable par produits fibrés, cette loi est compatible avec la relation d'équivalence $\bar{\rho}$; si on modifie les produits fibrés, on trouve des composés dans $ZH^{\Lambda=}X$ d'un même couple $((H, k, G'), (G, b, F))$ isomorphes, dans le sens qu'ils sont côtés opposés d'un quatuor dont les deux autres côtés sont inversibles, donc ces composés sont encore équivalents modulo $\bar{\rho}$; d'où la loi de composition « \circ » dans la 2-catégorie μ^r , qui étend la composition des relations aux 2-morphismes:

$$(Z\mu^rY) \times (Y\mu^rX) \xrightarrow{\circ} Z\mu^rX.$$

Cette loi de composition est associative et ne dépend pas du choix des produits fibrés dans H , comme dans le cas des 1-morphismes. L'axiome de permutabilité des deux lois de composition « \circ » et « \cdot » (composition dans les $Y\mu^rX$) résulte encore du fait que la relation d'équivalence $\bar{\rho}$ est compatible avec les produits fibrés.

REMARQUE. Cette construction a été faite à partir de $H^{\Lambda=}$ et non de H^{Λ} dans le seul souci de retrouver simplement l'analogue de l'ordre entre relations, lequel définit bien une structure de catégorie dans la classe des relations, conférant à celle-ci une structure de 2-catégorie quand on y a déjà défini la composition usuelle des relations, la struc-

ture d'ordre satisfaisant bien la condition suivante :

$$R \subset R' \text{ et } R_1 \subset R'_1 \implies R_1 \circ R \subset R'_1 \circ R',$$

lorsque $R_1 \circ R$ et $R'_1 \circ R'$ sont définis, condition qu'on retrouve dans le cas générale sous forme de l'axiome de permutabilité dans la 2-catégorie μ^r . En partant de H^Λ , on obtient une catégorie double et non une 2-catégorie.

APPENDICE PAR L.COPPEY

L'origine de ce travail se trouve dans [1] et [3] ; la notion de catégorie de relations a souvent été considérée ; dans [3], par exemple, elle était étudiée en faisant usage d'une sous-classe H' permettant aussi bien de calculer les relations que de trouver un « ordre naturel » entre elles. La notion de décomposition introduite en [1] était tout à fait adaptée au problème et, en ce sens, le présent travail complète et améliore l'étude faite en [3].

Les décompositions d'une catégorie ont été considérées par KELLY dans [5], d'une façon apparemment différente : la propriété référencée ici (1.4.2) fait partie des axiomes, par contre l'unicité de la décomposition est une conséquence ; cependant il s'agit bien de la même notion ; nous avons déjà montré en 1971 que c'étaient les algèbres du triple :

$$H \xrightarrow{\delta_H} H^2 \xleftarrow{\mu_H} (H^2)^2$$

dont on a une description rapide : en appliquant le foncteur $H^{(\)}$ à

$$1 \xleftarrow{\delta} 2 \xrightarrow{\delta_2} 2 \times 2,$$

on trouve :

$$\delta_H \simeq H^\delta, \quad \mu_H \simeq H^{\delta_2}.$$

A ce sujet, les décompositions de structures algébriques en produits et les triples associés étaient introduits dans la première partie de [1], où figure une petite erreur qu'un lecteur bienveillant peut rectifier de lui-même : il faut ôter de la catégorie \mathfrak{M} l'ensemble \emptyset et ce qui vient avec ou, ce qui revient au même, remplacer \mathfrak{M} par la catégorie des applications

pointées \mathfrak{M} ; à part cela tout le reste est exact, en particulier le cas des catégories d'algèbres au-dessus de \mathfrak{M} de la forme :

$$\mathcal{A} \xrightarrow{U} \mathfrak{M} \quad \text{telles que} \quad U^{-1}(\emptyset) = \emptyset ! \dots$$

KELLY a retrouvé nos résultats de 1971 assez récemment [6], en utilisant judicieusement la notion d'épimorphisme régulier, ce qui faisait défaut dans notre article et c'est aussi la raison de l'apparente complication de la démonstration qui figure en [1] (première partie, p. 13); de ce fait notre raisonnement n'était pas transportable au cas des catégories d'algèbres au-dessus d'une catégorie \mathcal{A} autre que \mathfrak{M} .

Signalons enfin l'article de J. MEISEN [7], dont nous n'avons eu connaissance qu'après avoir terminé celui-ci; il semble qu'il y ait entre ces deux articles des points communs; J. MEISEN s'appuie entre autre sur la notion de décompositions telle que KELLY la présentait en 1972, et elle développe une théorie assez générale au niveau des 2-catégories.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. COPPEY, Décompositions de structures en produits, *Esquisses Math.* 14, Paris (1971).
2. L. COPPEY, *Triples de décompositions* (à paraître).
3. R. DAVAR-PANAH, *Catégories de relations*, Thèse 3^e cycle, multigraphiée Paris (1968).
4. R. GUITART, Foncteurs sous-objets et relations continues, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XIII-1 (1972).
5. FREYD-KELLY, Categories of continuous functors, *J. Pure and Applied Algebra* 2 (1972).
6. M. KELLY, Conférences au Séminaire EHRESMANN-BASTIANI, Paris, 1975.
7. J. MEISEN, On bicategories of relations and pullback spans, *Com. Algebra* 1 (1974), 377-401.

Théorie et Applications des Catégories,

U. E. R. Mathématiques, 33 rue Saint-Leu, 80039 AMIENS, FRANCE

et

Département de Mathématiques, Université Arya-Mehr, Av. Eisenhower,
TEHERAN, IRAN