FRANCIS BORCEUX

Limites enrichies et existence de V-foncteur adjoint

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 16, nº 4 (1975), p. 395-408

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1975__16_4_395_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XVI-4 (1975)

LIMITES ENRICHIES ET EXISTENCE DE V-FONCTEUR ADJOINT

par Francis BORCEUX

Ce travail développe le contenu d'une conférence donnée au colloque d'Amiens en juillet 1973; le texte en a cependant été revu en dernière minute à la lumière de résultats obtenus récemment (cfr. [2]) et dont ce travail fut le point de départ.

Le présent article étudie les origines de la notion de limite par rapport à une catégorie fermée telle qu'elle a été développée en [2] par BORCEUX-KELLY sous le nom de «mean cotensor product». Nous montrons notamment comment cette notion se rapproche de la notion habituelle de limite dans le cas où l'unité de la catégorie fermée est un objet final.

Nous étudions le comportement de cette notion de limite dans les catégories de **V**-foncteurs et retrouvons, par une démonstration extrêmement simple, un résultat de DAY (cfr. [3]) assurant que, si **A** est une petite catégorie et **V** une catégorie fermée complète à gauche et avec coproduits, la catégorie des foncteurs et transformations naturelles de **A** vers **V** est également fermée.

Enfin nous généralisons les critères d'existence des «mean cotensor products» établis dans [2] ainsi que l'étude des cogénérateurs dans les catégories cartésiennes fermées développée dans [1] pour améliorer le théorème spécial d'existence de **V**-foncteur adjoint que l'on trouve dans le travail de DUBUC [5].

1. Les cotenseurs moyens.

V désigne une catégorie fermée monoïdale symétrique au sens de [6], ce que nous abrégerons en disant simplement catégorie fermée. Nous utiliserons les notations de [6].

Si l'on cherche à généraliser au cas des **V**-foncteurs la notion habituelle de limite, on se heurte aussitôt au fait que les foncteurs constants ne sont généralement pas des **V**-foncteurs. Néanmoins on a le résultat suivant :

PROPOSITION 1.1. *Si* **V** *est telle que son unité* I *soit un objet final (nous écrirons* $I=1$*), alors tout foncteur constant entre deux* **V***-catégories se munit d'une structure de* **V***-foncteur.*

Soit **A**, **B** deux **V**-catégories et $B \in \mathbf{B}_0$. Le foncteur constant sur B :

$$c_B : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$$

se munit d'une structure de **V**-foncteur au moyen des flèches

$$\mathbf{A}(A_1, A_2) \longrightarrow 1 = I \xrightarrow{j_B} \mathbf{B}(B, B). \qquad \blacksquare$$

Il est clair que toutes les catégories cartésiennes fermées vérifient la propriété $I=1$, mais ce ne sont pas les seules. Un exemple non cartésien fermé est fourni par la catégorie des espaces topologiques dans laquelle on munit les ensembles $\mathcal{C}(X, Y)$ de fonctions continues de la topologie de la convergence simple; le produit tensoriel des espaces X et Y est alors l'ensemble $X \times Y$ muni de la topologie la plus fine rendant continues les applications

$$i_y : X \longrightarrow X \times Y,\ i_y(x) = (x, y),$$
$$i_x : Y \longrightarrow X \times Y,\ i_x(y) = (x, y),$$

pour tous les éléments $x \in X$ et $y \in Y$. Ce produit tensoriel est étudié par FOLTZ en [7].

Si $F, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ sont deux **V**-foncteurs, notons $[F, G]$, lorsqu'il existe, l'objet des **V**-transformations naturelles de F vers G (cfr. [4]). Rappelons une définition extraite de [9] et généralisant de manière immédiate la notion habituelle de limite.

DEFINITION 1.2. Soit **V** fermée telle que $I=1$. La **V**-limite d'un **V**-foncteur $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est dite exister s'il y a un objet $L \in \mathbf{B}$ et une **V**-équivalence naturelle π telle que, pour tout objet $B \in \mathbf{B}$, l'objet $[c_B, F]$ existe et soit **V**-naturellement isomorphe par π_B à l'objet $\mathbf{B}(B, L)$, i.e. :

$$[c_B, F] \underset{\pi_B}{\simeq} \mathbf{B}(B, L).$$

Dans la suite nous allons nous intéresser plus particulièrement aux limites sur les catégories «comma» (cfr. [10]), aussi établissons-nous le résultat suivant :

PROPOSITION 1.3. *Soit* $\mathbf{V}$ *une catégorie fermée possédant des limites finies et telle que* $I = 1$. *Si* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *et* $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *sont des* $\mathbf{V}$*-foncteurs, la catégorie* (F_0, G_0) *se munit d'une structure de* $\mathbf{V}$*-catégorie* (F, G)*, les projections devenant à leur tour des* $\mathbf{V}$*-foncteurs.*

Si (A_1, g_1, B_1) et (A_2, g_2, B_2) sont deux objets de (F_0, G_0), nous décrivons l'objet des flèches de (A_1, g_1, B_1) vers (A_2, g_2, B_2) comme étant l'égalisateur des deux morphismes

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}(A_1, A_2) \times \mathbf{B}(B_1, B_2) \arrow[r, "F \times G"] & \mathbf{C}(FA_1, FA_2) \times \mathbf{C}(GB_1, GB_2) \arrow[d, shift right, "\mathbf{C}(1, g_2)"'] \arrow[d, shift left, "\mathbf{C}(g_1, 1)"] \\ & \mathbf{C}(FA_1, GB_2) \end{tikzcd}$$

Les vérifications sont alors un calcul de routine. ■

Reprenons la situation de la proposition précédente avec en outre un $\mathbf{V}$-foncteur $H : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$:

$$\begin{tikzcd} (F, G) \arrow[r, "\Phi_G"] \arrow[d, "\Phi_F"'] & \mathbf{B} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "G"] & \mathbf{D} \\ \mathbf{A} \arrow[r, "F"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

En vue d'étudier la limite du $\mathbf{V}$-foncteur $H \circ \Phi_G$, remarquons que, si $D \in \mathbf{D}$, la donnée d'une $\mathbf{V}$-transformation naturelle («un cône»)

$$\alpha : c_D \Longrightarrow H \circ \Phi_G$$

engendre une transformation naturelle

$$\alpha_0 : \mathbf{C}_0(F*, G\cdot) \Longrightarrow \mathbf{D}_0(D, H\cdot)$$

décrite par $\alpha_{0\,A,B}(g) = \alpha_{(A,g,B)}$; mais cette transformation naturelle α_0 n'a aucune raison d'être sous-jacente à une $\mathbf{V}$-transformation naturelle

$$\beta : \mathbf{C}(F*, G-) \Longrightarrow \mathbf{D}(D, H-).$$

Ce que nous proposons, c'est d'enrichir la notion de cône en exigeant l'existence d'un tel relèvement β, un cône devenant donc un couple (α, β) tel que ci-dessus. Mais la donnée de β engendrant celle de α, puisque

$$\alpha_{(A,g,B)} = \beta_{0\,A,B}(g),$$

un cône enrichi sera donc simplement la donnée d'un β tel que ci-dessus. Nous aboutissons donc à la notion suivante de limite :

DEFINITION 1.4. Soit $\mathbf{V}$ une catégorie fermée possédant des limites finies et telle que $I = 1$. Soit encore des $\mathbf{V}$-foncteurs $F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$, $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ et $H : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$. La $\mathbf{V}$-limite enrichie de H modulo (F, G) est dite exister s'il y a un objet $L \in \mathbf{D}$ et une $\mathbf{V}$-équivalence naturelle π telle que, pour tout objet $D \in \mathbf{D}$, l'objet $[\mathbf{C}(F*, G-), \mathbf{D}(D, H-)]$ existe et soit $\mathbf{V}$-naturellement isomorphe par π_D à l'objet $\mathbf{D}(D, L)$:

$$[\mathbf{C}(F*, G-), \mathbf{D}(D, H-)] \underset{\pi_D}{\simeq} \mathbf{D}(D, L).$$

La définition précédente ne fait plus apparaître, ni la catégorie (F, G), ni les foncteurs Φ_F ou Φ_G. Le seul obstacle à sa transcription au cas d'une catégorie fermée quelconque est le fait que la description des objets de $\mathbf{V}$-transformations naturelles oblige à considérer les foncteurs $\mathbf{D}(D, H-)$ comme étant définis sur $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \xrightarrow{p_2} \mathbf{B} \xrightarrow{\mathbf{D}(D, H-)} \mathbf{V};$$

or il semble que le fait que p_2 puisse être défini dépend essentiellement d'une hypothèse du type $I = 1$.

Cependant, si $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ est la $\mathbf{V}$-catégorie à un seul objet, et si $F : \mathbf{1} \to \mathbf{V}$ est le foncteur constant sur I (qui est toujours un $\mathbf{V}$-foncteur, quel que soit $\mathbf{V}$), les difficultés précédentes s'estompent et l'on obtient la notion étudiée en [2] sous le nom de «mean cotensor product» :

DEFINITION 1.5. Soit $\mathbf{V}$ une catégorie fermée, $G : \mathbf{B} \to \mathbf{V}$ et $H : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ deux $\mathbf{V}$-foncteurs. Le cotenseur moyen de G et H est dit exister s'il y a un objet $\{G, H\}$ de $\mathbf{D}$ et une $\mathbf{V}$-équivalence naturelle π telle que, pour tout objet $D \in \mathbf{D}$, l'objet $[G, \mathbf{D}(D, H-)]$ existe et soit **V**-naturellement isomorphe par π_D à l'objet $\mathbf{D}(D, \{G, H\})$:

$$[G, \mathbf{D}(D, H-)] \underset{\pi_D}{\simeq} \mathbf{D}(D, \{G, H\}).$$

Nous dirons que $\{F, G\}$ existe faiblement si l'on a simplement l'équivalence naturelle π_0 entre les ensembles sous-jacents :

$$\mathbf{V}\text{-}Nat(G, \mathbf{D}(D, H-)) \underset{\pi_0 D}{\sim} \mathbf{D}_0(D, \{G, H\}).$$

Si $\mathbf{B} = \mathbf{1}$, on retrouve la notion habituelle de cotenseur; si

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{op} \otimes \mathbf{C} \quad \text{et} \quad G = \mathbf{C}\colon \mathbf{C}^{op} \otimes \mathbf{C} \to \mathbf{V}$$

est le bifoncteur fondamental, on retrouve la notion de «end»; si $\mathbf{V} = Ens$, $\{G, H\}$ n'est autre que la limite de $H \circ \Phi_G$, étudiée d'ailleurs par FREYD dans [8].

On définirait dualement la notion de tenseur moyen $G * H$ de deux **V**-foncteurs $G\colon \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{V}$ et $H\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$.

Il est clair par ailleurs que la définition 1.5 est équivalente à celle de «mean cotensor product» étudiée dans [2], car l'existence de π revient, pour tout objet $V \in \mathbf{V}$, à l'existence de bijections naturelles

$$\mathbf{V}_0(V, \mathbf{D}(D, \{G, H\})) \simeq \mathbf{V}_0(V, [G, \mathbf{D}(D, H-)])$$
$$\simeq \mathbf{V}\, Nat(G, [V, \mathbf{D}(D, H-)]).$$

Les trois résultats suivants ont été établis en [2].

PROPOSITION 1.6. *Avec les notations de 1.5, l'existence au sens faible implique l'existence dès que* **D** *est tensorisée (en particulier quand* $\mathbf{D} = \mathbf{V}$ *).* ∎

PROPOSITION 1.7. *Les* **V**-*foncteurs représentables préservent les cotenseurs moyens.* ∎

PROPOSITION 1.8. *Les* **V**-*foncteurs admettant un* **V**-*adjoint à gauche préservent les cotenseurs moyens.* ∎

Terminons ce paragraphe par un critère d'existence au sens faible des cotenseurs moyens (à rapprocher de 1.6):

PROPOSITION 1.9. *Soit* **D** *une* **V**-*catégorie cotensorisée telle que* $\mathbf{D}_0$

soit complète. Dans ce cas le cotenseur moyen de deux **V***-foncteurs* $G:$ $\mathbf{B} \to \mathbf{V}$ *et* $H: \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ *existe faiblement dès que* **B** *est petite.*

Le caractère cotensorisé permet d'écrire (cfr. [2]):

$$\{G, H\} = \int_B [GB, HB]$$

et les hypothèses de la proposition assurent que cette «end» existe (cfr. [5]). ∎

COROLLAIRE 1.10. *Sous les hypothèses de 1.9, un* **V***-foncteur* $F: \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ *commute faiblement aux cotenseurs moyens dès qu'il commute aux cotenseurs et que* F_0 *préserve les limites.* ∎

2. Les cotenseurs moyens dans les catégories de V-foncteurs.

Dans ce paragraphe nous supposerons que la catégorie fermée est complète, de telle sorte que, pour toutes **V**-catégories **A** et **B**, la catégorie des **V**-foncteurs et **V**-transformations naturelles de **A** vers **B** se munit elle-même d'une structure de **V**-catégorie dès que **A** est petite (cfr. [4]).

Les deux résultats suivants ont été obtenus dans [2] : il s'agit du lemme de Yoneda et du fait que tout **V**-foncteur à valeurs dans **V** est **V**-colimite (au sens des tenseurs moyens) de **V**-foncteurs représentables.

PROPOSITION 2.1 (lemme de Yoneda). *Soit* $G: \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ *un* **V***-foncteur. Pour tout objet* $A \in \mathbf{A}$, *on a*

$$\{\mathbf{A}(A, -), G\} = GA. \qquad \blacksquare$$

PROPOSITION 2.2. *Soit* $G: \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ *un* **V***-foncteur et* $Y: \mathbf{A}^{op} \to [\mathbf{A}, \mathbf{V}]$ *le* **V***-plongement de Yoneda. On a* $G = G * Y$.

Rappelons que $*$ désigne le tenseur moyen. ∎

Etablissons maintenant un résultat permettant de calculer les cotenseurs moyens dans les **V**-catégories de **V**-foncteurs.

PROPOSITION 2.3. *Dans les* **V***-catégories de* **V***-foncteurs, les cotenseurs moyens se calculent point par point pour autant qu'ils existent en chaque point.*

Les **V**-catégories de **V**-foncteurs sont cotensorisées [4] et donc les cotenseurs moyens peuvent s'y calculer au moyen de «ends» [2], ces dernières se calculant point par point [5]. ■

Le résultat suivant est dû à DAY (cfr. [3]); nous en donnons ci-après une démonstration assez simple basée sur les propriétés des tenseurs et cotenseurs moyens.

THEÓREME 2.4. *Soit* **V** *une catégorie fermée complète possédant des coproduits et* **A** *une petite catégorie. Dans ce cas la catégorie des foncteurs et transformations naturelles de* **A** *vers* $\mathbf{V}_0$ *est fermée.*

Notons $\hat{\mathbf{A}}$ la **V**-catégorie libre engendrée par **A** ; celle-ci existe vu l'existence des coproduits dans **V** :

$$|\hat{\mathbf{A}}| = |\mathbf{A}|, \quad \hat{\mathbf{A}}(A_1, A_2) = \coprod_{\mathbf{A}(A,B)} I.$$

Si $F: \mathbf{A} \to \mathbf{V}_0$ est un foncteur, nous notons $\hat{F}: \hat{\mathbf{A}} \to \mathbf{V}$ sa **V**-extension à $\hat{\mathbf{A}}$. Si $F, G, H: \mathbf{A} \to \mathbf{V}_0$ sont trois foncteurs, nous définissons :

$$F \otimes G: \mathbf{A} \to \mathbf{V}_0, \quad (F \otimes G)(A) = FA \otimes GA;$$

$$[G, H]: \mathbf{A} \to \mathbf{V}_0, \quad [G, H](A) = [\hat{\mathbf{A}}(A, -) \otimes \hat{G}, \hat{H}].$$

En notant $Y: \hat{\mathbf{A}}^{op} \to [\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{V}]$ le **V**-plongement de Yoneda, on a alors successivement : (pour le lemme de Yoneda, cfr. [4])

$$\begin{aligned}
[F \otimes G, H](A) &\underset{\text{(par déf.)}}{\simeq} [\hat{\mathbf{A}}(A, -) \otimes \hat{F} \otimes \hat{G}, \hat{H}] \\
&\underset{\text{(par 2.2)}}{\simeq} [((\hat{\mathbf{A}}(A, -) \otimes \hat{F}) * Y) \otimes \hat{G}, \hat{H}] \\
&\underset{\text{(par 1.8)}}{\simeq} [(\hat{\mathbf{A}}(A, -) \otimes \hat{F}) * (Y - \otimes \hat{G}), \hat{H}] \\
&\underset{\text{(par 1.7)}}{\simeq} \{\hat{\mathbf{A}}(A, -) \otimes \hat{F}, [Y - \otimes \hat{G}, \hat{H}]\} \\
&\underset{\text{(par déf.)}}{\simeq} \{\hat{\mathbf{A}}(A, -) \otimes \hat{F}, [\widehat{G, H}]\} \\
&\underset{\text{(par lem. Yoneda)}}{\simeq} \{\hat{\mathbf{A}}(A, -) \otimes \hat{F}, [Y -, [\widehat{G, H}]]\} \\
&\underset{\text{(par 1.7)}}{\simeq} [\hat{\mathbf{A}}(A, -) \otimes \hat{F}) * Y, [\widehat{G, H}]] \\
&\underset{\text{(par 2.2)}}{\simeq} [\hat{\mathbf{A}}(A, -) \otimes \hat{F}, [\widehat{G, H}]]
\end{aligned}$$

$$\underset{\text{(par déf.)}}{\simeq} \quad [F, [G, H]](A). \qquad \blacksquare$$

3. Théorème spécial d'existence de V-foncteur adjoint.

Dans [2], le problème de l'existence d'un **V**-foncteur adjoint a été ramené au stade suivant :

PROPOSITION 3.1. *Pour un* **V** *foncteur* $G: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *G a un* **V**-*adjoint à gauche.*

(2) *pour tout objet* $B \in \mathbf{B}$, *le cotenseur moyen* $\{\mathbf{B}(B, G-), 1_{\mathbf{A}}\}$ *existe et est préservé par G,*

(3) *pour tout objet* $B \in \mathbf{B}$, *le cotenseur moyen* $\{\mathbf{B}(B, G-), 1_{\mathbf{A}}\}$ *existe faiblement et est faiblement préservé par G* ■

Nous allons maintenant chercher des conditions suffisantes en termes de limites et de cogénérateur assurant que la condition (3) est vérifiée. Rappelons quelques points de terminologie.

DEFINITION 3.2. Un **V**-foncteur $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est dit **V**-*fidèle* si tous les morphismes

$$F_{A_1, A_2}: \mathbf{A}(A_1, A_2) \to \mathbf{B}(FA_1, FA_2)$$

sont des monomorphismes.

DEFINITION 3.3. Un objet C d'une **V**-catégorie **A** est appelé un **V**-cogénérateur si le **V**-foncteur

$$\mathbf{A}(-, C): \mathbf{A}^{op} \to \mathbf{V}$$

est **V**-fidèle.

Les propositions suivantes explicitent quelques liens entre les notions de cogénérateur et de **V**-cogénérateur.

PROPOSITION 3.4. *Soit* **A** *une* **V**-*catégorie et C un* **V**-*cogénérateur de* **A**. *Dans ce cas le foncteur*

$$\mathbf{A}(-, C): \mathbf{A}^{op} \to \mathbf{V}$$

est fidèle au sens habituel.

Le morphisme de composition

$$K^C_{A,B} : \mathbf{A}(A,B) \to [\mathbf{A}(B,C), \mathbf{A}(A,C)]$$

est par hypothèse un monomorphisme. En lui appliquant le foncteur d'oubli $\mathbf{V}_0(I,-) : \mathbf{V} \to Ens$, on obtient une injection

$$\mathbf{A}_0(A,B) \to \mathbf{V}_0(\mathbf{A}(B,C), \mathbf{A}(A,C))$$

ce qui prouve que $\mathbf{A}(-,C)$ est fidèle. ∎

PROPOSITION 3.5. *Soit* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{V}$*-catégorie tensorisée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) C *est un* $\mathbf{V}$*-cogénérateur de* $\mathbf{A}$ *;*

(2) le foncteur $\mathbf{A}(-,C) : \mathbf{A}^{op} \to \mathbf{V}$ *est fidèle.*

En vertu de 3.4, il reste à vérifier (2) $\Longrightarrow$ (1), c'est-à-dire que les morphismes $K^C_{A,B}$ de composition sont des monomorphismes sous l'hypothèse (2). Mais ceci est équivalent à prouver que, pour tout $V \in \mathbf{V}$, le morphisme $\mathbf{V}_0(V, K^C_{A,B})$ est injectif, ce qui est le cas vu la commutativité du diagramme suivant et le fait que $\mathbf{V}_0(I, K^C_{A,B})$ est injectif, par hypothèse, pour tous A, B.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}_0(V, \mathbf{A}(A,B)) \arrow[r, "\mathbf{V}_0(V, K^C_{A,B})"] \arrow[dd, dash, "\wr"] & \mathbf{V}_0(V, [\mathbf{A}(B,C), \mathbf{A}(A,C)]) \arrow[d, dash, "\wr"] \\
 & \mathbf{V}_0(\mathbf{A}(B,C), [V, \mathbf{A}(A,C)]) \arrow[d, dash, "\wr"] \\
\mathbf{A}(V \otimes A, B) \arrow[r, "\mathbf{V}_0(I, K^C_{V \otimes A, B})"'] & \mathbf{V}_0(\mathbf{A}(B,C), \mathbf{A}(V \otimes A, C))
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION 3.6. *Soit* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{V}$*-catégorie tensorisée. Tout cogénérateur de* $\mathbf{A}$ *est un* $\mathbf{V}$ *cogénérateur.*

Le triangle suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}^{op} \arrow[r, "\mathbf{A}(-,C)"] \arrow[dr, "\mathbf{A}_0(-,C)"'] & \mathbf{V} \arrow[d, "\mathbf{V}_0(I,-)"] \\
 & Ens
\end{tikzcd}$$

d'où $\mathbf{A}(-,C)$ est fidèle dès que $\mathbf{A}_0(-,C)$ l'est; on peut donc conclure par 3.5. ■

PROPOSITION 3.7. *Soit* $\mathbf{V}$ *une catégorie fermée telle que le foncteur d'oubli* $\mathbf{V}_0(I,-):\mathbf{V}\to Ens$ *soit fidèle. Les conditions suivantes sont équivalentes pour toute* $\mathbf{V}$*-catégorie* $\mathbf{A}$ *:*

(1) C *est un* $\mathbf{V}$*-cogénérateur de* $\mathbf{A}$*;*

(2) le foncteur

$$\mathbf{A}(-,C):\mathbf{A}^{op}\to\mathbf{V}$$

est fidèle;

(3) C *est un cogénérateur de* $\mathbf{A}$.

- (1) $\Longrightarrow$ (2) est une conséquence de 3.4.

- (2) $\Longrightarrow$ (3) car $\mathbf{A}_0(-,C)=\mathbf{V}_0(I,-)\circ\mathbf{A}(-,C)$ et le composé de deux foncteurs fidèles est fidèle.

- (3) $\Longrightarrow$ (1), car $\mathbf{V}_0(I,K^C_{A,B})$ est un monomorphisme dans Ens et $\mathbf{V}_0(I,-)$ réfléchit les monomorphismes, car il est fidèle. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'établir notre version du théorème spécial d'existence de $\mathbf{V}$-foncteur adjoint.

THEOREME 3.8. *Soit* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{V}$*-catégorie cotensorisée possédant un* $\mathbf{V}$*-cogénérateur* C *et telle que* $\mathbf{A}_0$ *soit complète et bien pondérée (= «well-powered»). Un* $\mathbf{V}$*-foncteur* $G:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ *admet un* $\mathbf{V}$*-foncteur adjoint à gauche si et seulement si* G_0 *préserve les limites et* G *les cotenseurs.*

La condition est évidemment nécessaire; voyons qu'elle est suffisante. Pour tout objet $A\in\mathbf{A}_0$, notons

$$\alpha_A:A\to[\mathbf{A}(A,C),C]$$

le morphisme correspondant à l'identité $\mathbf{A}(A,C)=\mathbf{A}(A,C)$. α_A est un monomorphisme, car pour tout objet $X\in\mathbf{A}$ le composé

$$\mathbf{A}_0(X,A)\xrightarrow{\mathbf{A}_0(X,\alpha_A)}\mathbf{A}_0(X,[\mathbf{A}(A,C),C])\simeq\mathbf{V}_0(\mathbf{A}(A,C),\mathbf{A}(X,C))$$

est injectif en vertu de 3.4.

Considérons encore le composé suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbf{B}(B,GA) \arrow[dr, "K^{GC}"'] & & \mathbf{V}(\mathbf{A}(A,C),\mathbf{B}(B,GC)) \arrow[dr, "{[\cdot,C]}"] & \\
& \mathbf{V}(\mathbf{B}(GA,GC),\mathbf{B}(B,GC)) \arrow[ur, "{\mathbf{V}(G,1)}"] & & \mathbf{A}([\mathbf{B}(B,GC),C],[\mathbf{A}(A,C),C])
\end{tikzcd}$$

et notons β_A le morphisme correspondant:

$$\beta_A : [\mathbf{B}(B,GC),C] \to [\mathbf{B}(B,GA),[\mathbf{A}(A,C),C]] .$$

Etant donné que les foncteurs $[V,\cdot]$ commutent aux limites à gauche, chaque flèche du type $[V,\alpha_A]$ est un monomorphisme et donc, dans le produit fibré suivant, γ_A est un monomorphisme.

$$\begin{tikzcd}
P_A \arrow[r, tail, dashed, "\gamma_A"] \arrow[d, "\delta_A"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & {[\mathbf{B}(B,GC),C]} \arrow[d, "\beta_A"] \\
{[\mathbf{B}(B,GA),A]} \arrow[r, tail, "{[1,\alpha_A]}"'] & {[\mathbf{B}(B,GA),[\mathbf{A}(A,C),C]]}
\end{tikzcd}$$

G préserve ce produit fibré ainsi que les cotenseurs

$[\mathbf{B}(B,GA),A]$, pour tout $A \in \mathbf{A}$;

donc les cotenseurs de la forme $[\mathbf{B}(B,GA),GA]$ existent dans $\mathbf{B}$, ce qui nous permet de considérer les morphismes

$$\varepsilon_A : B \to [\mathbf{B}(B,GA),GA]$$

correspondant à l'identité $\mathbf{B}(B,GA) = \mathbf{B}(B,GA)$.

Le contour extérieur du diagramme suivant étant commutatif, nous obtenons pour tout $A \in \mathbf{A}$ une factorisation ϕ_A à travers le produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dashed, "\phi_A"] \arrow[drr, dashed, bend left, "\varepsilon_C"] \arrow[ddr, "\varepsilon_A"'] & & \\
& G(P_A) \arrow[r, tail, "G(\gamma_A)"] \arrow[d, "G(\delta_A)"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.f.}"] & {[\mathbf{B}(B,GC),GC]} \arrow[d, "G(\beta_A)"] \\
& {[\mathbf{B}(B,GA),GA]} \arrow[r, tail, "{[1,G\alpha_A]}"'] & {[\mathbf{B}(B,GA),[\mathbf{A}(A,C),GC]]}
\end{tikzcd}$$

Notons $\mathbf{C}$ la $\mathbf{V}$-sous-catégorie pleine de $\mathbf{A}$ ayant pour objets les sous-objets de $[\mathbf{B}(B, GC), C]$; $\mathbf{A}_0$ étant bien pondérée, $\mathbf{C}$ est équivalente à une petite $\mathbf{V}$-catégorie et nous noterons $i : \mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{A}$ l'inclusion canonique. Les hypothèses du théorème ainsi que la proposition 1.9 et son corollaire assurent que $\{\mathbf{B}(B, Gi\cdot), i\}$ existe faiblement dans $\mathbf{A}$ et est faiblement préservé par G; nous poserons

$$FB \underset{\text{déf.}}{=} \{\mathbf{B}(B, Gi\cdot), i\}.$$

Il reste à prouver que F ainsi défini décrit bien l'adjoint du $\mathbf{V}$-foncteur G, c'est-à-dire, en vertu de la proposition 3.1, que

$$FB = \{\mathbf{B}(B, G\cdot), 1_{\mathbf{A}}\}.$$

L'existence de $\{\mathbf{B}(B, Gi\cdot), i\}$ nous fournit une $\mathbf{V}$-transformation naturelle

$$\rho : \mathbf{B}(B, Gi\cdot) \Longrightarrow \mathbf{A}(FB, i\cdot),$$

et par conséquent un morphisme

$$\sigma_A : FB \to [\mathbf{B}(B, GP_A), P_A]$$

pour tout objet $A \in \mathbf{A}$. Ceci nous permet d'obtenir le composé suivant

$$\begin{tikzcd}
FB \arrow[dr, "\sigma_A"'] & & {[\mathbf{B}(B, B), P_A]} \arrow[dr, "{[j_B, 1]}"] & & {[\mathbf{B}(B, GA), A]} \\
& {[\mathbf{B}(B, GP_A), P_A]} \arrow[ur, "{[\mathbf{B}(1, \phi_A), 1]}"'] & & {[1, P_A] \simeq P_A} & A \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

auquel correspond un morphisme

$$\tau_A : \mathbf{B}(B, GA) \to \mathbf{A}(FB, A).$$

C'est un calcul de routine de vérifier que τ est une $\mathbf{V}$-transformation naturelle étendant ρ.

Pour ce qui est du caractère universel de τ, considérons une $\mathbf{V}$-transformation naturelle

$$\psi : \mathbf{B}(B, G\cdot) \Longrightarrow \mathbf{A}(M, \cdot).$$

La définition de FB implique l'existence d'un morphisme $m : M \to FB$ tel que

$$\psi_* i = \mathbf{A}(m, 1) \circ \rho$$

et il résulte de la définition de τ que ceci s'étend en une égalité

$$\psi = \mathbf{A}(m, 1) \circ \tau.$$ ■

COROLLAIRE 3.9. *Soit* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{V}$*-catégorie tensorisée et cotensorisée telle que* $\mathbf{A}_0$ *soit complète, bien pondérée et possède un cogénérateur. Dans ce cas un* $\mathbf{V}$*-foncteur* $G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *admet un* $\mathbf{V}$*-foncteur adjoint à gauche si et seulement s'il préserve les cotenseurs et* G_0*, les limites.*

En vertu de 3.6. ■

4. Remarque à propos des catégories fermées symétriques.

A l'exception (peut-être) du théorème 2.4, tous les autres résultats de cet article restent valables si l'on remplace la catégorie fermée monoïdale symétrique, $\mathbf{V}$, par une catégorie fermée symétrique au sens suivant :

DEFINITION 4.1. Une catégorie fermée symétrique est la donnée d'un couple $(\mathbf{V}, \sigma)$, où :

(1) $\mathbf{V}$ est une catégorie fermée au sens de [6] dans laquelle le bifoncteur $[-,-] : \mathbf{V}^{op} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ préserve les limites.

(2) σ est un isomorphisme naturel en trois variables :

$$[A, [B, C]] \underset{\sigma_{A,B,C}}{\simeq} [B, [A, C]].$$

En particulier $\mathbf{V}$ est $\mathbf{V}$-cotensorisée. Les $\mathbf{V}$-catégories, les $\mathbf{V}$-foncteurs et $\mathbf{V}$-transformations naturelles restent définis comme dans [6]. Le caractère symétrique implique essentiellement le fait suivant :

PROPOSITION 4.2. *Soit* $\mathbf{V}$ *une catégorie fermée symétrique et* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{V}$*-catégorie.* $\mathbf{A}$ *est munie de morphismes de compositions*

$$K^C_{A,B} : \mathbf{A}(A, B) \to [\mathbf{A}(B, C), \mathbf{A}(A, C)]$$

cohérents avec les autres données de la catégorie fermée.

$K^C_{A,B}$ est le correspondant, par σ, de

$$L^{B,C}_A : \mathbf{A}(B, C) \to [\mathbf{A}(A, B), \mathbf{A}(A, C)].$$ ■

Le seul intérêt de cette remarque est d'indiquer le caractère inessentiel de l'existence d'un produit tensoriel dans **V** pour le développement de la théorie. Nous ne connaissons en effet aucun exemple intéressant de catégorie fermée symétrique qui ne soit pas en outre monoïdale. On remarquera cependant que, si p et q sont deux nombres premiers distincts, la sous-catégorie pleine de *Ens* ayant pour objets les ensembles dont le cardinal est soit une puissance de p, soit une puissance de q, est fermée symétrique sans être monoïdale.

Bibliographie

[1] F. BORCEUX, When is Ω a cogenerator in a topos? *Cah. Topo. et Géom. Diff.* XV-4 (1974).

[2] F. BORCEUX and G.M. KELLY, A notion of limit for enriched categories, *Bull. Austr. Math. Soc.* 12 (1975), 49-72.

[3] B. DAY, On closed categories of functors, *Lect. Notes in Math.* 137, Springer (1970), 1-38.

[4] B. DAY and G.M. KELLY, Enriched functor categories, *Lect. Notes in Math.* 106, Springer (1969), 178-191.

[5] E. DUBUC, Kan extensions in enriched category theory, *Lect. Notes in Math.* 145, Springer (1970).

[6] S. EILENBERG and G.M. KELLY, Closed categories. *Proc. Conf. on Categ. Alg., La Jolla* 1965, Springer (1966). 421-562.

[7] F. FOLTZ, Produit tensoriel généralisé, *Cahiers Topo. et Géom. diff.* X-3 (1968), 301-331.

[8] P. FREYD, Algebra valued functors in general categories and tensor products in particular, *Colloq. Math.* 14 (1966).

[9] R. LAVENDHOMME, Limites relatives, *Math. Zeit.* 122 (1971), 275-284.

[10] H. SCHUBERT, *Categories*, Springer, 1972.

Institut de Mathématiques
Université de Louvain
2 Chemin du Cyclotron
1348 LOUVAIN LA NEUVE, BELGIQUE