CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

KAZEM LELLAHI

Sur les catégories préadditives topologiques

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 19, nº 1 (1978), p. 79-85

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1978__19_1_79_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE *Vol. XIX-1 (1978)*

SUR LES CATEGORIES PREADDITIVES TOPOLOGIQUES

par Kazem LELLAHI

Le but de cet article est de montrer que, si $A = (A, A', T)$ est une catégorie préadditive double topologique et (B, T') une catégorie préadditive topologique, l'ensemble des foncteurs préadditifs continus de (B, T') vers (A', T) est «canoniquement» muni d'une structure de catégorie préadditive topologique. En particulier, en prenant pour A la catégorie double préadditive topologique des quatuors associée à une catégorie préadditive topologique, on définit un «Hom interne» sur la catégorie des foncteurs préadditifs continus. Ces résultats généralisent ceux de [2] au cas des catégories préadditives topologiques.

NOTATIONS ET CONVENTIONS. Si $E = (\underline{E}, T)$ est un espace topologique, les sous-ensembles de $\underline{E}$ sont toujours munis de la topologie induite par T et les produits $\underline{E}^n$ de la topologie produit T^n.

Une catégorie préadditive dont l'ensemble sous-jacent est $\underline{A}$ sera notée par $A = (A^{\cdot}, A^{+})$, $A^{\cdot}$ étant la catégorie et A^{+} le groupoïde sous-jacents. Dans ce cas on désignera par:

- α et β les applications source et but de $A^{\cdot}$,
- ζ l'application $(e', e) \to 0_{e'e}$ de $A_0 \times A_0$ dans $\underline{A}$, où A_0 est l'ensemble des objets de $A^{\cdot}$ et $0_{e'e}$ l'élément neutre du groupe abélien, noté $e'.A.e = Hom_{A^{\cdot}}(e', e)$, sur l'ensemble des flèches de e vers e',
- γ l'application de $\underline{A}$ dans $A_0 \times A_0$ dont les composantes sont α et β (i.e. $\gamma = [\beta, \alpha]$),
- $\xi: \underline{A} \to \underline{A}$ l'application $\xi(x) = -x$.

Si on considère une topologie T sur l'ensemble sous-jacent à une catégorie $C^{\cdot}$, la topologie sur l'ensemble C_0 des objets de C (identifié à l'ensemble des unités) sera la topologie, notée T_0, induite par T.

DEFINITION 1. On appelle *catégorie préadditive topologique* (abrégé en CPT) un couple $\mathrm{A} = (A, T)$ formé d'une catégorie préadditive A et d'une topologie T sur A telle que les applications $\alpha, \beta, \zeta, \xi$, la loi de $A^{\bullet}$ et la loi de A^{+} soient continues. Dans ce cas, on dira que T est compatible avec la structure de A.

EXEMPLES.

1° Tout anneau unitaire topologique, au sens usuel, est une CPT ayant une seule unité.

2° Toute catégorie préadditive munie de la topologie discrète (resp. grossière) est une CPT.

3° Soit $(\underline{X}, T')$ un espace topologique et $\underline{R}$ une relation d'équivalence sur $\underline{X}$. On sait que $\underline{R}$ est muni d'une structure de catégorie $R^{\bullet}$. De plus, en prenant sur $y.R.x = \{(y, x)\}$ la seule structure de groupe possible, $\underline{R}$ est muni d'une structure de catégorie préadditive R. Si T désigne la topologie induite par $T' \times T'$ sur $\underline{R}$, alors (R, T) est une CPT. En particulier, pour tout espace topologique X, le groupoïde des couples de $\underline{X}$ est une CPT.

4° A tout espace fibré vectoriel $E(B, \mathrm{R}^m, G, H)$, on peut associer de manière «canonique» des CPT [3b].

5° L'ensemble des jets infinitésimaux d'ordre 1 de R dans une variété différentielle de dimension finie et de classe C^2 est «canoniquement» muni d'une structure de catégorie préadditive et d'une topologie compatible avec cette structure [3b].

Soit $X = (\underline{X}, T')$ un espace topologique et σ un ensemble de parties compactes de X vérifiant:

(*) La réunion de σ est $\underline{X}$ et, pour tout $S \in \sigma$ et tout $x \in S$, il existe un voisinage V de x dans $(S, T'/S)$ tel que $V \in \sigma$.

On sait alors [1] que, pour tout espace topologique $Y = (\underline{Y}, T)$, l'ensemble $Top(Y, X)$ des applications continues de X dans Y peut être muni de la topologie σ-ouverte. On note $\sigma o(Y, X) = (Top(Y, X), \sigma o(T, T'))$ cet espace topologique. On note $\sigma o(-, X)$ est un foncteur de Top vers Top, qui préserve les limites projectives (loc. cit.).

PROPOSITION 1. *Soit* $X = (\underline{X}, T)$ *un espace topologique muni d'un* σ *vérifiant* (*) *et soit* $A = (A, T)$ *une CPT. Alors l'ensemble* $Top((\underline{A}, T), X)$ *peut être muni d'une structure de catégorie préadditive compatible avec la topologie* $\sigma o(T, T')$.

PREUVE. Les objets de cette catégorie sont les applications continues de X dans (A_0, T_0) et l'unité correspondant à $f: X \to (A_0, T_0)$ est $\iota \circ f$ où ι est l'insertion de A_0 dans $\underline{A}$. Si $f \in Top((\underline{A}, T), X)$, on pose

$$\hat{\alpha} f = \alpha \circ f \quad \text{et} \quad \hat{\beta} f = \beta \circ f.$$

Donc si $\hat{\alpha} f = \hat{\beta} g$, on a

$$\beta(f(x)) = \alpha(g(x)) \quad \text{pour tout} \quad x \in X,$$

de sorte que $g(x).f(x)$ est défini. De plus $g \hat{\cdot} f: x \to g(x).f(x)$ est une application continue, car la multiplication de A est continue. Ainsi

$$(g, f) \to g \circ f \quad \text{ssi} \quad \hat{\alpha} f = \hat{\beta} g.$$

est une loi de catégorie sur $Top((\underline{A}, T), X)$. De même la continuité de l'addition de A entraîne que si f et g ont mêmes source et but, l'application $f \hat{+} g: x \to f(x) + g(x)$ est continue. Muni de cette multiplication, et de cette addition, $Top((\underline{A}, T), X)$ devient une catégorie préadditive. Dans celle-ci, on a :

$$\hat{\zeta}(g, f) = [g, f] \circ \zeta \quad \text{et} \quad \hat{\xi}(f) = \xi \circ f.$$

Pour prouver que $\sigma o(T, T')$ est compatible avec cette structure de catégorie préadditive, il suffit de remarquer que

$$\hat{\alpha} = \sigma o(\alpha, X), \quad \hat{\beta} = \sigma o(\beta, X), \quad \hat{\cdot} = \sigma o(., X) \circ \phi,$$
$$\hat{+} = \sigma o(+, X) \circ \psi, \quad \hat{\zeta} = \sigma o(\zeta, X) \circ \eta, \quad \hat{\xi} = \sigma o(\xi, X),$$

où η, ϕ et ψ sont les homéomorphismes suivants déduits de la préservation des limites projectives par $\sigma o(-, X)$:

$$\eta : (Top((A_0, T_0), X)^2 \longrightarrow Top((A_0 \times A_0, T_0 \times T_0), X),$$
$$\phi : Top((\underline{A}, T), X) * Top((\underline{A}, T), X) \rightarrow Top((A^{\cdot} * A^{\cdot}, T * T), X),$$
$$\psi : Top((\underline{A}, T), X) * Top((\underline{A}, T), X) \rightarrow Top(A^{+} * A^{+}, T \bar{*} T), X),$$

où $T*T$ et $T\bar{*}T$ sont respectivement les topologies induites par $T\times T$ sur $A^{\cdot}*A^{\cdot}$ et $A^{+}*A^{+}$. //

DEFINITION 2. Soit $p: H\to Ens$ un foncteur fidèle qui reflète les isomorphismes [5]. On dit que $\mathrm{A}=(A,s)$ est une *catégorie préadditive p-structurée* si :

1° A est une catégorie préadditive ;

2° $(A^{\cdot},s)$ est une catégorie p-structurée [2] ;

3° il existe un produit $s_0\times s_0$ dans p et $u: s_0\times s_0\to s$ tel que

$$p(u)=\zeta\ ;$$

4° il existe un produit fibré s_+ de (γ,γ) et un $k_+: s_+\to s$ tel que

$$p(k_+)(x,y)=x+y\ ;$$

5° il existe $z: s\to s$ tel que $p(z)=\xi$.

Toute CPT est une catégorie préadditive structurée par le foncteur d'oubli de Top vers Ens.

Supposons que p_a soit le foncteur d'oubli de $\mathcal{F}_a$ vers Ens qui à chaque objet, associe son ensemble sous-jacent, où $\mathcal{F}_a$ est la catégorie des foncteurs préadditifs associée à un univers $\mathfrak{U}$. Une catégorie préadditive p_a-structurée est appelée une *catégorie préadditive double*. Une telle structure est la donnée d'un couple de catégories préadditives sur le même ensemble A, disons $((A^{\cdot},A^{+}),(A^{o},A^{+}))$, vérifiant :

1° A_0 est une sous-catégorie préadditive de (A^{o},A^{+}) ;

2° le domaine de la multiplication (resp. de l'addition) de $(A^{\cdot},A^{+})$ est une sous-catégorie préadditive de $A'\times A'$ où $A'=(A^{o},A^{+})$;

3° les applications $\alpha,\beta,\zeta,\xi,\cdot,+$ associées à A sont des foncteurs préadditifs pour A' et les structures induites par A' et $A'\times A'$ définies dans 1 et 2.

Avec ces propriétés on peut vérifier facilement que, si (A,A') est une catégorie préadditive double, (A',A) l'est aussi.

CAS PARTICULIER: un anneau double (i.e. une catégorie préadditive double ayant une seule unité pour les deux lois) n'est qu'un anneau commutatif (voir [4], exercice).

LEMME 1. *Soit* B, A *et* A' *trois catégories préadditives telles que* (A, A') *soit une catégorie préadditive double. Alors l'ensemble* $\mathcal{F}_a(A', B)$ *des foncteurs préadditifs de* B *dans* A' *muni des lois:*

$(g, f) \to gf$, *où* $gf(x) = g(x).f(x)$ *ssi* $g(x).f(x)$ *a un sens pour tout* x *de* B,

$(h, h') \to h + h'$, *où* $(h+h')(x) = h(x) + h'(x)$ *ssi* $h(x) + h'(x)$ *a un sens pour tout* x *de* B,

est une catégorie préadditive, notée $\mathcal{F}_a(A', B)$.

PREUVE. L'application

$$x \to (g(x), f(x)) \quad (\text{resp. } x \to (h(x), h'(x)))$$

définit un foncteur de B dans $A \times A$ qui prend ses valeurs dans la sous-catégorie préadditive définie par le domaine de la multiplication (resp. de l'addition) de A. On voit que gf est le composé de ce foncteur préadditif avec le foncteur préadditif $\cdot$ (resp. $+$). L'associativité des deux lois est évidente. En posant

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)) \quad \text{et} \quad (\beta f)(x) = \beta(f(x)),$$

on voit que αf et βf sont des foncteurs préadditifs de B dans A_0 (muni des lois de A'). On a donc une structure de catégorie sur $\mathcal{F}_a(A', B)$. On vérifie de même que l'addition donnée en fait une catégorie préadditive. //

CAS PARTICULIER. EXEMPLE. Soit A une catégorie préadditive. Sur l'ensemble des carrés commutatifs de $A^{\cdot}$, on a deux lois, la multiplication latérale et la multiplication longitudinale, qui en font une catégorie double. On a aussi deux lois additives déduites de celles de A. Muni de ces quatre lois, cet ensemble devient une catégorie double préadditive, notée A^2.

Si B est une catégorie préadditive, $\mathcal{F}_a(A^2, B)$ n'est rien d'autre que la catégorie des transformations naturelles entre les foncteurs préadditifs de B dans A, notée A^B.

Dans le cas où A est un anneau commutatif et B un anneau quelconque, A^B est l'anneau des homomorphismes de B dans A.

DEFINITION 3. On dit que *(A, A', T) est une catégorie préadditive double topologique* (abrégé en CPDT) si $\mathrm{A} = (A, T)$ et $\mathrm{A}' = (A', T)$ sont des CPT et (A, A') une catégorie préadditive double.

Par exemple, une CPDT ayant une seule unité est un anneau unitaire commutatif topologique.

LEMME 2. *Si (A, A', T) est une CPDT et si $\mathrm{B} = (B, T')$ est une CPT, l'ensemble des foncteurs préadditifs continus de (B, T') vers (A', T) est une sous-catégorie préadditive de $\mathcal{F}_a(A', B)$, notée $\mathcal{F}_{ac}(\mathrm{A}', \mathrm{B})$, où $\mathrm{A}' = (A', T)$.*

Fn effet, de la continuité des opérations de A on déduit que cet ensemble est stable pour les opérations de $\mathcal{F}_a(A', B)$.

Supposons maintenant B muni d'un σ vérifiant (*).

THEOREME 1. *Avec les notations précédentes le couple $(\mathcal{F}_a(\mathrm{A}', \mathrm{B}), T'')$, où T'' est la topologie induite par $\sigma o(T, T')$ sur $\mathcal{F}_{ac}(\mathrm{A}', \mathrm{B})$, est une catégorie préadditive topologique.*

PREUVE. Si (C, T) est une CPT et si C' est une sous-catégorie préadditive de C, alors C' muni de la topologie T' induite par T est une CPT [3a]. Ici $\mathcal{F}_{ac}(\mathrm{A}', \mathrm{B})$ est une sous-catégorie préadditive de la catégorie préadditive $Top((A, T), (B, T'))$ définie dans le Lemme 1. D'autre part $\sigma o(T, T')$ est une topologie compatible avec les lois de cette catégorie préadditive (Proposition 1), ce qui achève la preuve. //

Soit $\mathrm{A} = (A, T)$ et $\mathrm{B} = (B, T')$ deux CPT et σ un ensemble de compacts de (B, T') vérifiant (*). D'après ce qui précède, on peut munir A^B d'une topologie compatible avec sa structure algébrique. Notons $\mathrm{A}^{\mathrm{B}\sigma}$ cette CPT. Pour B et σ fixés, la correspondance associant $\mathrm{A}^{\mathrm{B}\sigma}$ à A définit un foncteur $(-)^{\mathrm{B}\sigma}$ de $\mathcal{F}_{ac}$ (i.e. catégorie des foncteurs préadditifs continus entre CPT) vers elle-même. Appelons ce foncteur le foncteur Hom de $\mathcal{F}_{ac}$ associé à σ, noté Hom_σ.

PROBLEME. Comment choisir σ pour que le foncteur Hom_σ admette un adjoint?

Il est clair que, pour répondre à cette question, il faut, ayant deux catégories préadditives topologiques

$$\mathrm{A} = (A, T) \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = (B, T'),$$

pouvoir choisir σ et définir une topologie «produit tensoriel» $T \otimes_\sigma T'$, de manière que $(A \otimes B, T \otimes_\sigma T')$ soit une catégorie préadditive topologique, où $A \otimes B$ désigne la catégorie préadditive produit tensoriel des catégories préadditives A et B.

REFERENCES

1. A. BASTIANI, *Topologie*, Cours polycopié (chapitre IV), Amiens, 1973.

2. BASTIANI-EHRESMANN, Catégories de foncteurs structurés, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XI-3 (1969).

3. K. LELLAHI, a) Catégories préadditives structurées, *Esquisses Math.* 7 (1971).

   b) Sur les catégories préadditives structurées, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XII-2 (1971).

4. C. EHRESMANN, Catégories topologiques, I à III, *Indigationes Math.* 28, Amsterdam (1966).

5. S. MACLANE, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.

Département de Mathématiques
Université de Téhéran
P.O. Box 314-1981
TEHERAN. IRAN