

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

ALFRED FRÖLICHER

Catégories cartésienement fermées engendrées par des monoïdes

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome
21, n° 4 (1980), p. 367-375

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1980__21_4_367_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**CATEGORIES CARTESIENNEMENT FERMEES ENGENDREES
PAR DES MONOÏDES**

par Alfred FRÖLICHER

RESUME.

Tout monoïde d'applications d'un ensemble dans lui-même détermine une catégorie concrète qui est complète et cocomplète. On étudie le problème de savoir si cette catégorie est cartésienement fermée ou pas. Un critère nécessaire et suffisant est donné; il est utilisé ensuite pour résoudre le problème sur différents exemples. Pour plus de détails et des démonstrations, cf. [3].

1. LA CATEGORIE \mathcal{K}_M ASSOCIEE A UN MONOÏDE CONCRET M .

Un monoïde concret M est un sous-monoïde de $Ens(B, B)$, où B est un ensemble qu'on appellera l'ensemble de base. On a donc :

$$(1) 1_B \in M; \quad (2) \sigma, \tau \in M \Rightarrow \sigma \circ \tau \in M.$$

Comme objets d'une catégorie \mathcal{K}_M on prend les triples $X = (E_X, C_X, F_X)$, où E_X est un ensemble,

$$C_X \subset Ens(B, E_X) \text{ et } F_X \subset Ens(E_X, B),$$

pour lesquels on a :

- a) Pour $c \in Ens(B, E_X)$ on a $(c \in C_X) \Leftrightarrow (f \circ c \in M \quad \forall f \in F_X)$;
- b) Pour $f \in Ens(E_X, B)$ on a $(f \in F_X) \Leftrightarrow (f \circ c \in M \quad \forall c \in C_X)$.

Les \mathcal{K}_M -morphisms d'un objet X dans un objet Y sont les applications $\phi: E_X \rightarrow E_Y$ qui satisfont aux conditions équivalentes :

$$\phi^*(C_X) \subset C_Y \text{ et } \phi^*(F_Y) \subset F_X.$$

Avec la composition naturelle des morphismes on obtient ainsi la catégorie \mathcal{K}_M et un foncteur fidèle $E: \mathcal{K}_M \rightarrow Ens$ décrit par

$$E(X) = E_X \text{ et } E(\phi) = \phi .$$

On appellera E_X l'ensemble sous-jacent et (C_X, F_X) la M -structure de l'objet X .

Toutes les M -structures ayant le même ensemble E_0 comme ensemble sous-jacent forment un treillis complet si l'on définit une relation « plus fine ou égale » par :

$$(C, F) \leq (C', F') \Leftrightarrow I_{E_0} : (E_0, C, F) \rightarrow (E_0, C', F') \\ \text{est un } \mathcal{K}_M\text{-morphisme.}$$

En particulier il existe sur tout ensemble E_0 la M -structure la plus fine (resp. la moins fine) appelée la M -structure discrète (resp. grossière). Comme en topologie générale on en déduit l'existence de structures initiales et finales et la

PROPOSITION. \mathcal{K}_M est une catégorie complète et cocomplète. Le foncteur $E : \mathcal{K}_M \rightarrow \text{Ens}$ possède un adjoint et un coadjoint et commute donc avec les limites et les colimites.

Un objet $X = (E_X, C_X, F_X)$ s'appelle séparé si :

pour tout $a \neq b \in E_X$ il existe $f \in F_X$ avec $f(a) \neq f(b)$.

Notons $(\mathcal{K}_M)_{sep}$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{K}_M formée des objets séparés. Pour un objet quelconque X de \mathcal{K}_M on définit par

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \quad \forall f \in F_X$$

une relation d'équivalence sur E_X . En munissant l'ensemble quotient de la M -structure finale par rapport à la projection canonique on obtient un objet séparé sX . Le foncteur $s : \mathcal{K}_M \rightarrow (\mathcal{K}_M)_{sep}$ ainsi décrit est coadjoint à l'inclusion et on a donc :

PROPOSITION. La catégorie $(\mathcal{K}_M)_{sep}$ est aussi complète et cocomplète.

2. MONOÏDES CARTESIENS.

En munissant le singleton $\{0\}$ de la M -structure discrète, resp. grossière, on obtient un objet S , resp. T , de \mathcal{K}_M . On a $E \approx \mathcal{K}_M(S, -)$, c'est-à-dire S fournit une représentation du foncteur $E : \mathcal{K}_M \rightarrow \text{Ens}$. T est

évidemment objet final de \mathcal{K}_M . On peut distinguer deux cas suivant que le monoïde M

contient toutes (cas 1), resp. pas toutes (cas 2)

les applications constantes $B \rightarrow B$. Dans le cas 1, un singleton n'admet qu'une M -structure et on aura donc $S = T$. Dans le cas 2, un singleton possède exactement deux M -structures différentes et on aura donc $S \neq T$. De plus on trouve qu'au cas 2 la structure de produit $X \pi Y$ de deux objets est discrète dès que l'un des facteurs X ou Y a la structure discrète. De ces remarques on déduit : si un foncteur $\mathcal{H} : \mathcal{K}_M^{op} \times \mathcal{K}_M \rightarrow \mathcal{K}_M$ ferme cartésienement la catégorie \mathcal{K}_M , alors on aura

$$E\mathcal{H}(X, Y) \approx \mathcal{K}_M(X, Y) \quad \text{au cas 1,}$$

mais

$$E\mathcal{H}(X, Y) = \text{Ens}(E_X, E_Y) \quad \text{au cas 2.}$$

Afin de pouvoir traiter les deux cas simultanément nous définissons un ensemble M' comme suit :

$$M' = \begin{cases} M & \text{au cas 1} \\ \text{Ens}(B, B) & \text{au cas 2.} \end{cases}$$

Avec la solution $\tilde{\gamma}(x, y) := (\gamma(x))(y)$ nous posons

$$\Gamma_M := \{ \gamma : B \rightarrow M' \mid \tilde{\gamma} \circ (\sigma, \tau) \in M \quad \forall \sigma, \tau \in M \};$$

$$\Phi_M := \{ \phi : M' \rightarrow B \mid \phi \circ \gamma \in M \quad \forall \gamma \in \Gamma_M \}.$$

DEFINITION. Le monoïde M s'appelle *cartésien* si pour tout $\gamma : B \rightarrow M'$ on a

$$\phi \circ \gamma \in M \quad \forall \phi \in \Phi_M \quad \Rightarrow \quad \gamma \in \Gamma_M.$$

Remarquons que ceci est équivalent à la condition que (M', Γ_M, Φ_M) est objet de \mathcal{K}_M .

THEOREME 1. *La catégorie \mathcal{K}_M est cartésienement fermée si et seulement si le monoïde M est cartésien.*

Pour démontrer que la condition est suffisante on construit $\mathcal{H}(Y, Z)$ en munissant $\mathcal{K}_M(Y, Z)$ au cas 1, resp. $\text{Ens}(E_Y, E_Z)$ au cas 2, d'une \mathcal{K}_M -structure convenable et on montre ensuite la propriété universelle sui-

vante :

$\phi: X \rightarrow \mathcal{H}(Y, Z)$ un \mathcal{K}_M -morphisme $\Leftrightarrow \mathfrak{F}: X \pi Y \rightarrow Z$ un \mathcal{K}_M -morphisme.

Pour la réciproque on montre d'abord qu'il est possible de choisir le foncteur \mathcal{H} qui ferme cartésienement la catégorie \mathcal{K}_M de telle sorte qu'on a en plus $E\mathcal{H}(X, Y) = \mathcal{K}_M(X, Y)$ au premier et $E\mathcal{H}(X, Y) = \text{Ens}(E_X, E_Y)$ au deuxième cas et aussi de sorte que la co-unité de l'adjonction soit donnée par les applications d'évaluation.

THEOREME 2. Si M est un monoïde cartésien qui contient toutes les applications constantes $B \rightarrow B$, alors la catégorie $(\mathcal{K}_M)_{sep}$ est aussi cartésienement fermée.

On obtient en effet un foncteur qui ferme cartésienement $(\mathcal{K}_M)_{sep}$ par restriction de celui qui ferme \mathcal{K}_M . Un exemple montre qu'on ne peut pas renoncer à l'hypothèse que M contienne toutes les applications constantes.

3. DUALITE.

Pour tout ce paragraphe 3, M est supposé cartésien. Notons B l'objet suivant de \mathcal{K}_M : $\bar{B} = (B, M, M)$.

A l'aide de \bar{B} et du foncteur \mathcal{H} qui ferme cartésienement la catégorie \mathcal{K}_M on peut former un foncteur de dualité $D: \mathcal{K}_M \rightarrow \mathcal{K}_M^{op}$ comme suit :

$$D = \mathcal{H}(-, \bar{B}).$$

\mathcal{K}_M étant cartésienement fermée, on a une transformation naturelle du foncteur identique de \mathcal{K}_M dans le foncteur «bidual» DD . Mais on obtient toujours le meilleur résultat suivant :

PROPOSITION. La M -structure de tout objet X de \mathcal{K}_M est initiale par rapport au morphisme canonique $X \rightarrow DD X$.

Il y a beaucoup d'exemples où l'ensemble de base B possède une structure supplémentaire qui permet d'améliorer la théorie de dualité. Appelons une structure algébrique sur l'ensemble sous-jacent E_X d'un objet $X = (E_X, C_X, F_X)$ compatible avec la structure de X si toute opération $f: E_X \times E_X \rightarrow E_X$ de la structure considérée est un morphisme $X \pi X \rightarrow X$.

Les objets de \mathcal{K}_M qui sont munis d'une structure compatible d'un certain type (par exemple structure de groupe ou d'anneau) forment une catégorie $\hat{\mathcal{K}}_M$ dont les morphismes sont, par définition, les \mathcal{K}_M -morphisms qui sont homomorphes par rapport à la structure algébrique.

Dès que l'ensemble de base B possède une structure algébrique compatible avec sa \mathcal{K}_M -structure canonique (M, M) , son objet dual DX a aussi une structure algébrique compatible de même type de sorte que le foncteur $D = \mathcal{H}(-, \bar{B})$ aboutit effectivement dans $\hat{\mathcal{K}}_M: D: \mathcal{K}_M \rightarrow \hat{\mathcal{K}}_M^{op}$. D'autre part le foncteur $\hat{\mathcal{K}}_M(-, \bar{B}): \hat{\mathcal{K}}_M^{op} \rightarrow Ens$ se relève en un foncteur $\hat{D}: \hat{\mathcal{K}}_M^{op} \rightarrow \mathcal{K}_M$ et on aura comme avant une transformation du foncteur identique de \mathcal{K}_M dans le foncteur «bidual» $\hat{D}D: \mathcal{K}_M \rightarrow \mathcal{K}_M$. On a encore le résultat que la M -structure de tout objet X est initiale par rapport au morphisme canonique $X \rightarrow \hat{D}DX$, mais il y aura beaucoup plus d'objets réflexifs, c'est-à-dire d'objets X tels que X est isomorphe à son bidual $\hat{D}DX$. Ceci amène aux problèmes suivants :

Quand est-ce que les objets réflexifs forment une sous-catégorie complète et cocomplète?

Quand est-ce que tous les objets sont réflexifs?

Enfin, puisque la même catégorie peut être obtenue à l'aide de différents monoïdes avec différents ensembles de base (cf. Exemple b, n° 4): quel est le meilleur choix de l'ensemble de base pour obtenir une bonne dualité?

4. SOLUTION DU PROBLEME POUR DIVERS MONOÏDES.

a) Pour un ensemble de base à deux éléments.

Soit $B = \{0, 1\}$. Il y a essentiellement cinq sous-monoïdes de $Ens(B, B)$. En notant $c_i: B \rightarrow B$ l'application à valeur constante i , et t la transposition des deux éléments de B , ce sont :

- 1° $M = \{id\}$,
- 2° $M = \{id, c_0\}$ ou $\{id, c_1\}$,
- 3° $M = \{id, t\}$,
- 4° $M = \{id, c_0, c_1\}$,

$$5^{\circ} M = \{ id, c_0, c_1, t \}.$$

Les monoïdes 1 et 3 ne sont pas cartésiens; les autres le sont. Le cas 5 ne donne rien d'intéressant, car dans ce cas \mathcal{K}_M est isomorphe à *Ens*. Au cas 2, \mathcal{K}_M s'identifie à la catégorie des paires d'ensembles (E_1, E_2) , où $E_1 \subset E_2$; on peut directement vérifier qu'elle est cartésienement fermée. L'exemple 2 est utile car on peut vérifier que $(\mathcal{K}_M)_{sep}$ n'est pas cartésienement fermée. Au cas 4, \mathcal{K}_M s'identifie à la catégorie des ensembles préordonnés, $(\mathcal{K}_M)_{sep}$ à celle des ensembles ordonnés; ces deux catégories sont donc, comme on peut aussi vérifier directement, cartésienement fermées.

b) Le monoïde $M = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues.

Ce monoïde est cartésien. On peut baser la preuve sur les résultats suivants: la topologie compacte-ouverte de M possède la propriété universelle bien connue; elle est complètement régulière; et la topologie de \mathbb{R}^2 est déterminée par arcs.

La catégorie \mathcal{K}_M , resp. $(\mathcal{K}_M)_{sep}$, peut être identifiée à une sous-catégorie de *Top*, resp. *Haus*. Pour cela on munit l'ensemble sous-jacent E_X à un objet $X = (E_X, C_X, F_X)$ de la topologie initiale par rapport aux fonctions $f: E_X \rightarrow \mathbb{R}$ de F_X . On obtient ainsi des catégories cartésienement fermées d'espaces topologiques qui sont très maniables et qui semblent utiles pour différentes applications (par exemple pour l'analyse).

Si l'on remplace \mathbb{R} par l'intervalle compact $I = [0, 1]$ ou par le cercle unité

$$S_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

(c'est-à-dire pour $M = C(I, I)$ ou $M = C(S_1, S_1)$), on obtient des catégories \mathcal{K}_M qu'on peut identifier à la précédente. Mais il semble difficile de caractériser les espaces topologiques T pour lesquels le monoïde $C(T, T)$ est cartésien; la compacité locale de T joue un rôle, mais n'est probablement pas suffisante.

c) Le monoïde $M = Hol(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ des fonctions holomorphes.

La preuve que ce monoïde est cartésien se base sur le théorème

de Hartogs selon lequel toute fonction $g: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est partiellement holomorphe est même holomorphe (et en particulier donc continue) dans les deux variables.

d) Le monoïde $M = \text{Pol}(K, K)$ des fonctions polynomiales d'un corps K .

Le lemme suivant est utile pour montrer que pour tout corps K qui n'est pas dénombrable infini ce monoïde est cartésien :

LEMME. Si $\text{card}(K) \neq \text{card}(\mathbb{N})$, alors toute fonction $g: K \times K \rightarrow K$ qui est partiellement polynomiale est aussi polynomiale dans les deux variables.

Ce lemme est faux pour tout corps K qui est infini dénombrable ; $\text{Pol}(K, K)$ pourrait quand même être un monoïde cartésien aussi dans ce cas, mais on ne le sait pas.

e) Le monoïde des fonctions affines d'un corps K .

Ce monoïde est toujours cartésien. Si la caractéristique de K est différente de 2, la catégorie des espaces affines sur K se plonge dans la catégorie \mathcal{K}_M .

f) Le monoïde $M = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions réelles lisses.

Selon un théorème de Boman [1], toute fonction $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui est lisse le long de toute courbe lisse $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Il en résulte :

$$\Gamma_M = \{ \gamma: \mathbb{R} \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \tilde{\gamma} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \}.$$

Les éléments ϕ de Φ_M , que nous appelons dans la suite les fonctionnelles lisses de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, sont par conséquent les applications

$$\phi: C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

pour lesquelles la fonction

$$x \mapsto \phi(g(x, -))$$

appartient, pour tout $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, à $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On ne connaît pas toutes les fonctionnelles lisses, mais toute distribution à support compact en est une, et Van Quê et Reyes [7] ont démontré qu'inversement, toute fonctionnelle lisse qui est en plus linéaire est une distribution à support compact. Le monoïde $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est cartésien ssi pour une fonction

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ les hypothèses

- (i) g partiellement lisse dans la deuxième variable,
- (ii) g telle que pour toute fonctionnelle lisse ϕ la fonction

$$x \mapsto \phi(g(x, -))$$

est dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

impliquent $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Cela nécessite des estimations délicates des accroissements des dérivées partielles successives de g à l'aide de fonctionnelles lisses convenables, et ce sont Lawvere, Schanuel et Zame [5] qui ont réussi: ils n'ont même utilisé l'hypothèse (ii) ci-dessus que pour des fonctionnelles lisses linéaires.

En utilisant encore le théorème mentionné de Boman on montre que \mathcal{K}_M contient toutes les variétés lisses de dimensions finies. La catégorie des variétés classiques lisses est ainsi plongée d'une façon simple et naturelle dans une catégorie cartésienement fermée; $C^\infty(V_1, V_2)$ obtient sa structure différentiable naturelle quelles que soient les variétés lisses V_1, V_2 . Aucune restriction sur V_1 n'intervient, mais si V_1 est compacte, la structure différentiable de $C^\infty(V_1, V_2)$ coïncide avec celle que J. Eells a introduite.

À l'aide d'un résultat récent de Hain [4], le théorème de Boman se généralise aux espaces de Banach; cette généralisation intervient si l'on veut montrer que toute variété banachique qui admet des partitions lisses de l'unité appartient aussi à \mathcal{K}_M .

Pour la théorie de dualité au sens du n°3 on utilise le résultat d'un exercice de Milnor [6] (cf. Dubuc [2]); on déduit: toute variété lisse paracompacte de dimension finie est un objet réflexif de \mathcal{K}_M .

g) Le monoïde $M = C^\infty(S_1, S_1)$ des fonctions lisses du cercle unité S_1 dans lui-même.

Ce monoïde est aussi cartésien; en effet, à l'aide d'un critère donné dans [3] on déduit facilement qu'on obtient la même catégorie que dans l'exemple précédent. S_1 , avec sa structure de groupe, fournit une autre dualité: le dual de X est alors le groupe lisse $C^\infty(X, S_1)$, le bidual de X est formé des homomorphismes lisses de ce groupe dans S_1 .

CATEGORIES CARTESIENNEMENT FERMEES..

1. J. BOMAN, Differentiability of a function and of its compositions with functions of one variable, *Math. Scand.* 20, n° 2 (1967), 249-268.
2. E. J. DUBUC, Sur les modèles de la Géométrie différentielle synthétique, *Cahiers Topo. et Géom. Diff.* XX-3 (1979).
3. A. FRÖLICHER, Durch Monoide erzeugte kartesich abgeschlossene Kategorien, *Seminarberichte aus dem Fachb. Math. Fernuniv. Hagen* 5 (1979), 7-48.
4. R. M. HAIN, A characterization of smooth functions defined on a Banach space, *Proc. Amer. Math. Soc.* 77 (1979), 63-67.
5. F. W. LAWVERE, S. H. SCHANUEL & W. R. ZAME, *Sera publié.*
6. J. MILNOR, *Characteristic classes*, Annals of Math. Studies 76.
7. N. VAN QUE & G. REYES, Théorie des distributions et théorème d'extension de Whitney, Exposé 8, *Géom. Diff. Synth. fasc. 2, Rapport de Recherches DMS 80-12*, Université de Montréal, 1980.

Section de Mathématiques
Université de Genève
2-4 rue du Lièvre
CH-1211 GENEVE 24. SUISSE