CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

J. M. BARJA P.

Sur les objets profinis et progénérateurs dans les catégories fermées

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 22, n° 3 (1981), p. 239-247

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_3_239_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Vol. XXII-3 (1981)

3^e COLLOQUE SUR LES CATEGORIES
DEDIE A CHARLES EHRESMANN
Amiens, Juillet 1980

SUR LES OBJETS PROFINIS ET PROGÉNÉRATEURS DANS LES CATÉGORIES FERMÉES

par *J.M. BARJA P.*

L'importance de la théorie des catégories fermées provient, principalement, de l'ample domaine de validité des résultats qu'on peut y obtenir, ce qui se dégage du nombre de théories concrètes qu'elle englobe. Mis à part les exemples d'origine algébrique (A-modules, A anneau commutatif; R-R-bimodules, $R = A$-algèbre; complexes de chaînes de A-modules; H-modules de Hopf, ...), dans tous les problèmes d'origine non-algébrique qui peuvent se poser dans le cadre de la théorie des catégories fermées, c'est de l'utilisation de ses méthodes que provient une certaine algébrisation du langage de la théorie concrète. Il est bien connu que l'usage en topologie de cette théorie permet de réinterpréter et d'analyser, au moyen du langage catégorique, certains problèmes qui ont été considérés comme proprement topologiques [6]. De même, en Analyse fonctionnelle, dans l'étude des espaces de Banach [8, 15] on remplace la catégorie *Ban* (espaces de Banach avec contractions linéaires) par celle des *Ban*-endofoncteurs.

Dans cette ligne, il est possible d'étudier les propriétés des objets qui, dans la théorie des modules sur un anneau commutatif, correspondraient aux modules projectifs de type fini et aux générateurs projectifs de type fini. Cette étude-là, à part sa validité dans le cadre général des catégories fermées, met en évidence le caractère essentiellement non additif de ces résultats (selon l'esprit des travaux de Pareigis [16]).

1.0. Le langage qui, pour l'étude des catégories fermées, surgit naturellement est celui des 2-catégories. Ceci est dû au résultat [5, 10] qui établit que toute catégorie (monoïdale) fermée $\mathcal{C}$ est équivalente à celle de ses endofoncteurs, c'est pourquoi on utilisera la 2-catégorie $\mathfrak{W}$ des $\mathcal{C}$-endofoncteurs avec $\mathcal{C}$-coadjoint (sous-catégorie réflexive de la catégorie des $\mathcal{C}$-endofoncteurs), à unique objet $\mathcal{C}$. Pour chaque objet A de $\mathcal{C}$ on a une paire adjointe

$$(P_A, H_A, \alpha_A, \beta_A), \quad \text{où} \quad P_A = A \otimes - : \mathcal{C} \to \mathcal{C} ;$$

on notera

$$P : \mathcal{C} \to (\mathcal{C}, \mathcal{C})_{\mathfrak{W}} : A \mapsto P_A$$

le foncteur qui est déterminé par l'équivalence entre $\mathcal{C}$ et la catégorie $(\mathcal{C}, \mathcal{C})_{\mathfrak{W}}$ des $\mathcal{C}$-endofoncteurs de $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}$-coadjoint. Le foncteur

$$V : (\mathcal{C}, \mathcal{C})_{\mathfrak{W}} \to \mathcal{C} : F \mapsto F(K),$$

où K est l'objet base de la catégorie (monoïdale) fermée $\mathcal{C}$, est l'inverse de P. Pour tout cela, on utilise la notation suivante : Si $f : F \to G$ est une 2-cellule de $\mathfrak{W}$, alors

$$f \approx P\,V(f) = P\left[\begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "F"'] \arrow[l, phantom, shift right=3, "f"] \arrow[l, shift right=6, "G"] \end{tikzcd} (K) \right] \qquad [1].$$

1.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie (monoïdale) fermée symétrique (la plupart des résultats seraient valables dans le cas non symétrique, avec certaines restrictions : coplatitude,...) avec égalisateurs et coégalisateurs. Soit

$$\mathrm{T} = (P_T, \eta_T, \mu_T) \quad \text{et} \quad \mathrm{S} = (P_S, \eta_S, \mu_S)$$

des triples sur l'objet $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{W}$; pour chaque S-T-algèbre (P_M, ϕ_M, ψ_M) on note ${}^M F_T : {}^{\mathrm{T}}\mathcal{C} \to {}^{\mathrm{S}}\mathcal{C}$ le foncteur défini par le diagramme de coégalisateur (dans ${}^{\mathrm{S}}\mathcal{C}$), où (P_Q, ϕ_Q) est une T-algèbre :

$$P_M P_T P_Q \underset{\psi_M * P_Q}{\overset{P_M * \phi_Q}{\rightrightarrows}} P_M P_Q \xrightarrow{\;{}^M c(P_Q)\;} {}^M F_T(P_Q) = P_{M \otimes_T Q}.$$

Ce foncteur admet pour coadjoint

$${}^M F_T \;\underset{{}^M\beta *}{\overset{{}^M\alpha *}{\dashv}}\; {}^M H_S$$

le foncteur ${}^M H_S : {}^{\mathrm{S}}\mathcal{C} \to {}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}$ défini par le diagramme d'égalisateur :

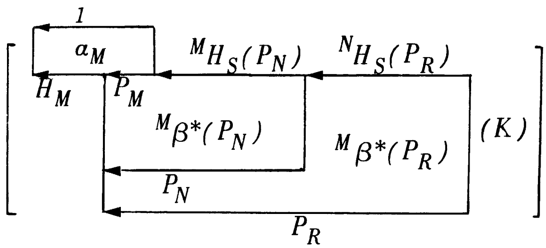
$$I_{M,N} \xrightarrow{\;i_{M,N}\;} H_M P_N \underset{(H_M H_S * \phi_N)(H_M * a_S * P_N)}{\overset{H_{\phi_M} * P_N}{\rightrightarrows}} H_M H_S P_N$$

où

$$^{M}H_S(P_N) = P(I_{M,N}(K)) \quad \text{et} \quad ^{M}i(P_N) = P(i_{M,N}(K)).$$

1.2. Au moyen des propriétés universelles des égalisateurs, si (P_M, ϕ_M), (P_N, ϕ_N), (P_R, ϕ_R) sont des S-algèbres (à gauche), on peut définir un morphisme d_{MNR}: $^{M}H_S(P_N)\,^{N}H_S(P_R) \to {}^{M}H_S(P_R)$ qui vérifie

$$^{M}i(P_R).\,d_{MNR} = P$$



(dans le cas particulier $\mathcal{C}$ = A-modules, A anneau commutatif, d_{MNR} serait la «composition d'homomorphismes de A-modules», pour S une A-algèbre).

1.3. Ce morphisme permet de définir, pour chaque S-algèbre (P_M, ϕ_M), un triple

$$\mathrm{E} = (^{M}H_S(P_M),\ ^{M}a^*_K,\ d_{MMM})$$

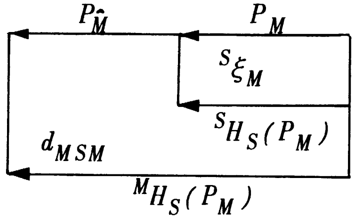
(pour les A-modules, ce serait l'anneau d'endomorphismes d'un S-module), de sorte que (P_M, ϕ_M, ψ_M) soit une S-E-algèbre, où ψ_M coïncide avec d_{SMM} à l'isomorphisme $^{S}\xi_M$: $P_M \to {}^{S}H_S(P_M)$ près. On vérifie aussi que $P_{\hat{M}} = {}^{M}H_S(P_S)$ est une S-E-algèbre $(P_{\hat{M}}, \phi_{\hat{M}}, \psi_{\hat{M}})$, où $\phi_{\hat{M}} = d_{MMS}$.

1.4. Dans ces conditions, il existe deux morphismes de E-E-algèbres et de S-S-algèbres, respectivement,

$$\nabla_{MSM}: P_{\hat{M}} \otimes_S M \to {}^{M}H_S(P_M), \quad \nabla_{SMS}: P_M \otimes_E \hat{M} \to P_S$$

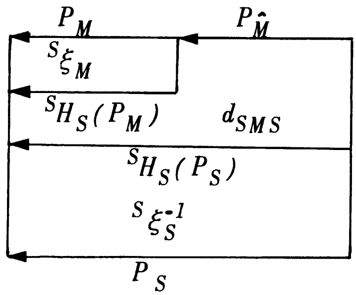
qui sont définis par les deux diagrammes suivants :

$$\nabla_{MSM} \cdot {}^{\hat{M}}c(P_M) =$$



et

$$\nabla_{SMS} \cdot {}^{M}c(P_{\hat{M}}) =$$



1.5. Si ∇_{MSM} est un isomorphisme de E-E-algèbres, on dit que l'objet $(P_M, \phi_M, \psi_M) \in {}^S\mathcal{C}^E$ est S-*profini*. Si en plus ∇_{SMS} est aussi un isomorphisme de S-S-algèbres, alors on dit que (P_M, ϕ_M, ψ_M) est un objet S-*progénérateur.*

1.6. EXEMPLES. 1° Si $\mathcal{C} = Ens$ et S est un monoïde, un objet S-profini est une S-action de la forme Sa, où $a^2 = a$. Si en plus il existe

$$u, v \in S \text{ tels que } au = u \text{ et } vu = e,$$

Sa est un progénérateur [11, 3]. On peut donner des exemples de monoïdes S avec $n+2$ générateurs, qui admettent n progénérateurs non isomorphes [2].

2° Si $\mathcal{C} = A$-modules, A un anneau commutatif, pour un objet S-profini M, ∇_{MSM} est l'homomorphisme de A-modules que produit l'existence de la base duale [9, 17]. ∇_{SMS} est l'application trace, qui est surjective ssi M est un générateur [9, 17].

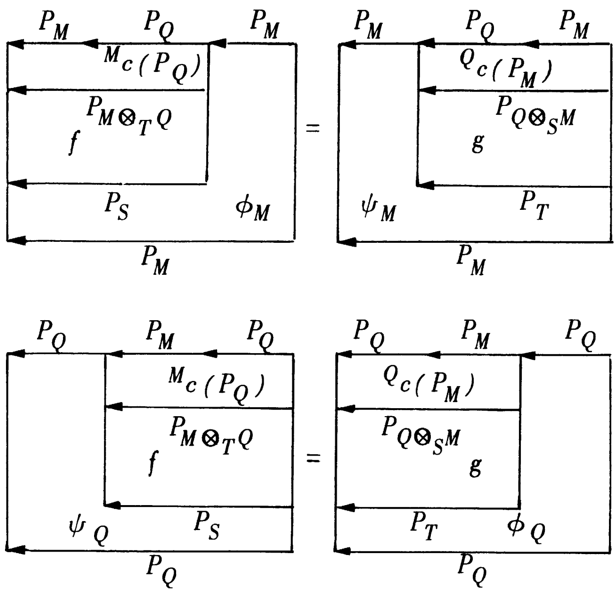
1.7. Toute $\mathcal{C}$-équivalence entre deux $\mathcal{C}$-catégories ${}^S\mathcal{C}$ et ${}^T\mathcal{C}$ détermine un S-progénérateur et un T-progénérateur. Ceci est connu comme le théorème de Morita pour les catégories fermées.

1.8. Etant données une S-T-algèbre (P_M, ϕ_M, ψ_M) et une S-T-algèbre

(P_Q, ϕ_Q, ψ_Q), on dit que deux morphismes

$$f: P_{M\otimes_T Q} \to P_S, \quad g: P_{Q\otimes_S M} \to P_T$$

de S-S-algèbres et T-T-algèbres, respectivement, forment un *contexte de Morita* [4] si les commutativités suivantes sont vérifiées :



Si de plus f et g sont des isomorphismes, le contexte de Morita est appelé *contexte strict*.

1.9. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contexte de Morita (T, S, P_M, P_Q, f, g) soit strict est l'existence de 2-cellules

$$h: P_K \to P_{M\otimes_T Q}, \quad p: P_K \to P_{Q\otimes_S M} \quad \text{telles que } f.h = \eta_S, \ g.p = \eta_T$$

[1], (3.3.14).

1.10. Si (P_M, ϕ_M) est une S-algèbre, les morphismes

$$\nabla_{MSM}: P_{\hat{M}\otimes_S M} \to {}^M H_S(P_M), \quad \nabla_{SMS}: P_{M\otimes_E \hat{M}} \to P_S$$

définissent un contexte de Morita. Par conséquent, si (P_M, ϕ_M) est S-profini et si le foncteur ${}^{\hat{M}}H_S: {}^S\mathcal{C} \to {}^E\mathcal{C}$ reflète les isomorphismes, alors (P_M, ϕ_M) est S-progénérateur.

Dans l'exemple de la théorie des modules, le contexte de Morita $(S, E, P_M, P_{\hat{M}}, \nabla_{MSM}, \nabla_{SMS})$ sera strict si ∇_{MSM} et ∇_{SMS} sont épiques, c'est-à-dire si M est un module générateur projectif de type fini.

1.11. Ce qui précède montre que les conditions suivantes sont équivalentes:

1° (P_M, ϕ_M) est un générateur.

2° $(S, E, P_M, P_{\hat{M}}, \nabla_{MSM}, \nabla_{SMS})$ est un contexte strict de Morita.

3° Les $\mathcal{C}$-catégories ${}^S\mathcal{C}$ et ${}^E\mathcal{C}$ sont $\mathcal{C}$-naturellement équivalentes.

Ce résultat est une autre formulation du théorème de Morita pour les catégories fermées.

2.1. La définition qu'on a donnée correspond, pour les A-modules, au concept de module projectif de type fini. Une définition dans le cadre général des catégories fermées qui permette de séparer l'un et l'autre concept (type fini, projectif) ne semble pas facile à donner sans que le concept de profini y intervienne. Ainsi, on définit une S-*algèbre de type fini* (P_M, ϕ_M) comme une S-algèbre telle qu'il existe un objet S-profini (P_Q, ϕ_Q) et un épimorphisme $(P_Q, \phi_Q) \to (P_M, \phi_M)$ en ${}^S\mathcal{C}$; une S-algèbre (P_M, ϕ_M) sera *projective* en ${}^S\mathcal{C}$ si $Hom_{{}^S\mathcal{C}}(P_M, -): {}^S\mathcal{C} \to Ens$ préserve les épimorphismes.

2.2. Si (P_M, ϕ_M) est une S-algèbre de type fini et projective en ${}^S\mathcal{C}$, alors c'est un objet S-profini [14] (2.1.3). Si S est un triple commutatif et si K est projectif en $\mathcal{C}$, on vérifie la réciproque.

2.3. En faisant usage de la technique exposée et avec les définitions précédentes, les résultats suivants, entre autres, peuvent être prouvés (cf. [14]):

2.4. Pour (P_M, ϕ_M) S-profini (resp. S-progénérateur), le foncteur ${}^M F_E: {}^E\mathcal{C} \to {}^S\mathcal{C}$ préserve les profinis (resp. préserve les progénérateurs et reflète les profinis; de plus si K est projectif en $\mathcal{C}$ il reflète les progénérateurs).

2.5. Toute section d'un objet S-profini est S-profinie.

2.6. Si S et T sont des triples sur l'objet $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{V}$ et si $P_f: P_S \to P_T$ est un morphisme de triples, ${}^{T}F_{S}: {}^{S}\mathcal{C} \to {}^{T}\mathcal{C}$ préserve les objets profinis. Si $(P_T, \mu_T.(P_f * P_T))$ est S-profini, alors le foncteur ${}^{f}\mathcal{C}: {}^{T}\mathcal{C} \to {}^{S}\mathcal{C}$ (adjoint à droite de ${}^{T}F_{S}$) préserve les profinis; et s'il est S-progénérateur ${}^{f}\mathcal{C}$ préserve les progénérateurs et ${}^{T}F_{S}$ reflète les profinis.

2.7. Si S est un triple commutatif et si (P_M, ϕ_M), (P_Q, ϕ_Q) sont des objets S-profinis, alors ${}^{M}F_{S}(P_Q)$ est S-profini.

2.8. Pour (P_M, ϕ_M) S-profini, le foncteur ${}^{M}F_{E}: {}^{E}\mathcal{C} \to {}^{S}\mathcal{C}$ admet comme $\mathcal{C}$-coadjoint le foncteur

$$ {}^{\hat{M}}F_{S}: {}^{S}\mathcal{C} \to {}^{E}\mathcal{C}, \quad {}^{M}F_{E} \dashv {}^{\hat{M}}F_{S}. $$

De plus, $(P_{\hat{M}}, \phi_{\hat{M}})$ est S^{op}-profini.

Posant $P_{\hat{M}} = {}^{\hat{M}}H_{S^{op}}(P_S)$, les foncteurs ${}^{\hat{M}}F_{S}$ et ${}^{M}F_{S}$ sont $\mathcal{C}$-équivalents.

2.9. Si S est un triple commutatif, on a les adjonctions entre endofoncteurs de ${}^{S}\mathcal{C}$:

$$ {}^{M}F_{S} \dashv {}^{\hat{M}}F_{S} \dashv {}^{M}F_{S}. $$

3.0. Les objets profinis et les progénérateurs sont étudiés afin d'établir une théorie de Galois dans le cadre des catégories fermées. Etant donné une caractérisation des H-objets de Galois (H algèbre de Hopf finie commutative avec antipode [12]), on cherche une correspondence biunivoque entre les sous-algèbres admissibles de $\hat{\mathrm{H}}$ (algèbre de Hopf duale de H) et certaines sous-algèbres d'un H-objet de Galois, en suivant une ligne analogue à celle de Chase-Sweedler [7].

3.1. On définit une algèbre de Hopf *finie* H dans la catégorie fermée ${}^{S}\mathcal{C}$ (S triple commutatif sur l'objet $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{V}$) comme étant un triplet $(\mathrm{C}, \mathrm{T}, r^{Q})$ où C et T sont, respectivement, un cotriple et un triple sur le même foncteur ${}^{Q}F_{S}$, P_Q étant S-profini (en plus, ces conditions impliquent que P_Q est S-progénérateur).

3.2. La caractérisation des H-objets de Galois est donnée de la façon suivante :

Soit P_S un projectif dans ${}^{S}\mathcal{C}$, H une algèbre de Hopf finie et (A, P_a)

un H-objet; alors les conditions suivantes sont équivalentes:

1° (A, P_a) est un H-objet de Galois et ${}^{A}F_S : {}^{S}\mathcal{C} \to {}^{A}({}^{S}\mathcal{C})$ reflète les profinis.

2° P_A est S-progénérateur et les triples $A * \hat{H}$ et $\bar{E}_A^{op}$ sont isomorphes.

3° Les triples 1 et $A^{\hat{Q}}$ (dans ${}^{S}\mathcal{C}$) sont isomorphes, et

$$(A^{\hat{Q}}, A * \hat{H}, P_{(A \otimes \hat{Q})^{\hat{Q}}}, P_A, f, g)$$

est un contexte strict de Morita [14] (3.4.1), (3.4.5).

Ainsi, si l'une de ces conditions équivalentes est vérifiée et si H est cocommutative,

$$\begin{tikzcd} {}^{A*\hat{H}}({}^{S}\mathcal{C}) \arrow[r, shift left, "{}^{\hat{Q}}Q_{F_{\hat{Q}}}"] & {}^{S}\mathcal{C} \arrow[l, shift left, "{}^{A}F_S"] \end{tikzcd}$$

sont des catégories équivalentes.

3.3. Finalement, si $\hat{M}_1, \hat{M}_2$ sont des sous-algèbres admissibles de $\hat{H}$ et si l'une quelconque des conditions précédentes est vérifiée, la correspondance décrite s'exprime par l'équivalence des affirmations suivantes (cf. [14], (3.5.12)):

1° Il existe un monomorphisme $P_{\hat{m}}$ d'algèbres de Hopf tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} P_{\hat{M}_1} \arrow[rr, "P_{\hat{m}}"] \arrow[dr] & & P_{\hat{M}_2} \arrow[dl] \\ & P_{\hat{Q}} & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

2° Il existe un monomorphisme $P_{A\hat{m}}$ de triples (sur ${}^{S}\mathcal{C}$) tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} P_{A\hat{M}_1} \arrow[rr, "P_{A\hat{m}}"] \arrow[dr] & & P_{A\hat{M}_2} \arrow[dl] \\ & P_A & \end{tikzcd}$$

Departamento de Algebra y Fund.
Facultad de Matematicas
SANTIAGO DE COMPOSTELA. ESPAGNE

REFERENCES.

1. BARJA P., J.M., Teoremas de Morita para triples en una categoria cerrada, *Alxebra* 20, Dpto. Algebra y Fund., Santiago de Compostela (1978).
2. BARJA P., J.M. & G-RODEJA F., E., Morita equivalence of monoids, *Semigroup Forum* 19 (1980), 101-106.
3. BARJA P., J.M. & G-RODEJA F., E., Los teoremas de Morita en la categoria de conjuntos (V Jorn. Luso-Espanolas de Mat. 1978, Aveiro), *Alxebra* 26, Dep. Algebra y Fund. Santiago (1980), 85-90.
4. BASS, H., *Algebraic K-theory*, Benjamin, 1968.
5. BUNGE, M., Relative functor categories and categories of algebras, *J. Algebra* 11 (1969), 64-101.
6. CATEGORICAL TOPOLOGY, Proc. Conf. Mannheim 1975, *Lecture Notes in Math.* 540, Springer (1976).
7. CHASE, S.U. & SWEEDLER, M.E., Hopf algebras and Galois theory, *Lecture Notes in Math.* 97, Springer (1969).
8. CIGLER, J., Tensor products of functors on categories of Banach spaces, *Lecture Notes in Math.* 540, Springer (1976), 164-187.
9. DEMEYER, F. & INGRAHAM, E., Separable algebras over commutative rings, *Lecture Notes in Math.* 181, Springer (1971).
10. EILENBERG, S. & KELLY, G.M., Closed categories, *Proc. Conf. Categor. Algebra* La Jolla, Springer (1966), 421-562.
11. KNAUER, U., Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids, *Semigroup Forum* 3 (1972), 359-370.
12. LOPEZ L., M.A., Algebras de Hopf respecto a un cotriple, *Alxebra* 17, Depto. Algebra y Fund. Santiago (1976).
13. LOPEZ L., M.A., Algebras de Hopf adjuntas como modulos de Hopf, *Alxebra* 26, Ibid. (1980), 69-84.
14. LOPEZ L., M.P., Objetos de Galois sobre un algebra de Hopf finita, *Alxebra* 25, Ibid. (1980),
15. MICHOR, P.W., Functors and categories of Banach spaces, *Lecture Notes in Math.* 651, Springer (1978).
16. PAREIGIS, B., Non-additive ring and module theory, *Publicationes Math. Debrecen*, I: 24 (1977), 189-204; II: 24 (1977), 351-361; III: 25 (1978), 177-186.
17. RENAULT, G., *Algèbre non commutative*, Gauthiers-Villars, 1975.
18. VILLANUEVA N., E., Modulos de Hopf inducidos sobre un algebra de Hopf con antipodo, *Collect. Math.* (sous presse).