

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

LUC VAN DEN BRIL

Exactitude dans les Yoneda-structures

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 23, n° 2 (1982), p. 215-224

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1982__23_2_215_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXACTITUDE DANS LES YONEDA-STRUCTURES

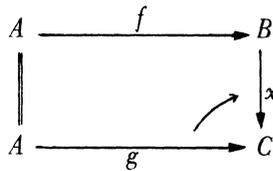
par Luc Van den BRIL

1. Les carrés exacts dans *Cat* et dans les 2-catégories munies d'une Yoneda-structures sont introduits et étudiés dans Guitart [2]. Pour les définitions et propriétés des carrés exacts dans une 2-catégorie, voir Guitart [2, 3], Van den Bril [12]. Ici, on montre que, dans une 2-catégorie représentable munie d'une Yoneda-structure, le pseudo-foncteur de Yoneda préserve et réfléchit les carrés exacts.

Cette propriété unifie les résultats obtenus par Street [10] et subsiste dans un contexte généralisant les Yoneda-structures de Street-Walters [11] et englobant les théories algébriques de Lawvere [6] (nous appelons encore Yoneda-structure un tel contexte - cf. n° 5; nous conservons les notations de Street [10]). De ce point de vue, la propriété précédente relie l'exactitude syntaxique et l'exactitude sémantique.

Dans ce qui suit, *K* désignera une 2-catégorie représentable.

2. DÉFINITION. Si *f* et *g* sont deux 1-morphismes de même source, on écrira $f \ll g(x)$ s'il existe un carré exact [3] de la forme



(si *g* est dense, *x* est unique à isomorphisme près, car *x* est alors une extension ponctuelle de *g* le long de *f*). On dira alors que *f* est *g*-admissible. Cette terminologie est justifiée par le fait que, dans les Yoneda-structures de Street-Walters (ou celles plus générales introduites plus loin) on a $f \ll \gamma_A$ (flèche de Yoneda) ssi *f* est admissible au sens de la Yo-

neda-structure.

Il est évident qu'on obtient ainsi un préordre vérifiant :

$$f \ll g \text{ entraîne } fp \ll gp \text{ pour tout } p : X \rightarrow A.$$

Exemples : $f \ll id_A$ ssi f a un adjoint à droite, et f pleinement fidèle entraîne $id_A \ll f$.

En utilisant essentiellement la propriété qu'une extension ponctuelle surmontée d'un carré exact est encore une extension, on obtient aisément les résultats suivants :

3. THÉORÈME. Soit dans K les 1-morphismes

$$A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{t} \end{array} C$$

où f est dense. Alors, $s \dashv t$ ssi les deux conditions suivantes sont réalisées :

a) Il existe un carré exact

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{sf} & C \\ \parallel & & \downarrow t \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

c'est-à-dire $sf \ll f$.

b) s conserve la densité de f , c'est-à-dire

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \swarrow sf & \xrightarrow{id} & \searrow s \\ & C & \end{array}$$

est une extension ponctuelle.

4. COROLLAIRE (Théorie des modèles). Soit dans K les 1-morphismes

$$B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{m} C$$

où f est pleinement fidèle et dense.

1) Si $m \ll f(s)$, alors s possède un adjoint à gauche r ssi il existe

$r: B \rightarrow C$ qui soit une extension ponctuelle de m le long de f . Dans ce cas, $r \dashv s$.

2) Si r est une extension ponctuelle de m le long de f , alors r possède un adjoint à droite ssi $m \ll f(s)$. Dans ce cas, $r \dashv s$.

Dans *CAT*, f représente le plongement de Yoneda, m un foncteur modèle et $r \dashv s$ est l'adjonction

réalisation géométrique \dashv foncteur singulier.

On appliquera ces adjonctions aux situations suivantes :

5. DÉFINITION. Une *Yoneda-structure* sur \mathbf{K} est la donnée, pour certains objets A de \mathbf{K} , dits *admissibles*, d'une flèche $y_A: A \rightarrow PA$ de sorte que :

1) y_A est pleinement fidèle et dense.

2) Si $f: A \rightarrow B$ est *admissible*, c'est-à-dire $f \ll y_A$, alors $y_B f \ll y_A$.

En d'autres termes, le composé de deux admissibles est admissible.

Les objets admissibles avec les flèches admissibles déterminent donc une sous-2-catégorie $Ad(\mathbf{K})$ 2-pleine de \mathbf{K} et P se prolonge en un pseudo-2-foncteur 2-pleinement fidèle $Ad(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}^{op}$ si on choisit Pf de manière que le carré suivant soit exact :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{y_B} & PB \\
 \parallel & & & & \downarrow Pf \\
 A & \xrightarrow{y_A} & PA & &
 \end{array}$$

Si pour tout $f: A \rightarrow B$, on choisit $\sigma f: B \rightarrow PA$ tel que le carré

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \parallel & & \downarrow \sigma f \\
 A & \xrightarrow{y_A} & PA
 \end{array}$$

soit exact, alors

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{y_B} & PB \\
 \sigma f \searrow & \curvearrowright & \swarrow Pf \\
 & PA &
 \end{array}$$

est une extension ponctuelle.

En appliquant la théorie des modèles, on obtient :

6. THÉORÈME (*Street [10]*). 1) Si les extensions ponctuelles au-dessus de PB le long des flèches admissibles existent, alors Pf a un adjoint à gauche : $\exists f \dashv Pf$.

2) Pf possède un adjoint à droite ssi σf est admissible, ssi Pf est admissible (lorsque PB est admissible).

7. APPLICATION AUX THÉORIES ALGÈBRIQUES.

Considérons dans une 2-catégorie \mathbf{K} de catégories, limitée au moyen d'univers choisis, les catégories A telles que les préfaisceaux d'ensembles sur A restent confinés dans \mathbf{K} . En attachant à ces objets la restriction $\gamma_A : A \rightarrow PA$ du plongement de Yoneda aux préfaisceaux transformant les I -colimites en I -limites (I étant un diagramme fixé), on obtient une Yoneda-structure dans laquelle les flèches admissibles sont les foncteurs conservant les I -colimites. En effet, un foncteur $f : A \rightarrow B$ conserve les I -colimites ssi le foncteur singulier $B \rightarrow [A^0, \text{ENS}]$ associé se factorise sous la forme :

$$B \xrightarrow{\sigma f} PA \hookrightarrow [A^0, \text{ENS}].$$

Comme $PA \hookrightarrow [A^0, \text{ENS}]$ est pleinement fidèle, $\gamma_A : A \rightarrow PA$ est dense et $f \ll \gamma_A$ (σf). Réciproquement, si $f \ll \gamma_A$, alors f conserve toutes les colimites préservées par γ_A et γ_A préserve les I -colimites en raison d'un résultat classique. Ces propriétés subsistent lorsque, au lieu de considérer les I -colimites, on considère par exemple les coproduits finis. Dans ce dernier contexte, si $f^0 : A^0 \rightarrow B^0$ est un morphisme de théories algébriques au sens de Lawvere, $f : A \rightarrow B$ est admissible et $Pf : PB \rightarrow PA$ est le foncteur algébrique correspondant.

Soit $N : 0, 1, 2, \dots$ la catégorie des cardinaux finis et $j_i : 1 \rightarrow n$ les n injections du coproduit qui deviennent les projections du produit $p_i : n \rightarrow 1$ dans la duale N^{op} . $\gamma_B(n) = B[\cdot, n]$ s'identifie à la B -algèbre libre sur l'ensemble fini n , de support l'ensemble $B[1, n]$ des opérations n -aires.

Comme $\sigma f \approx P f \circ \gamma_B$, $\sigma(f)$ se identifie à la A -algèbre sous-jacente à $\gamma_B(n)$ de sorte que

$$\begin{array}{ccc}
 & P A & \\
 \sigma f \nearrow & = & \searrow \text{oubli} \\
 B & \xrightarrow{B[1, \cdot]} & ENS
 \end{array}$$

commute. Le théorème précédent entraîne alors :

8. PROPOSITION (Lair [5], Lawvere [6]). Soit $f^0 : A^0 \rightarrow B^0$ un morphisme de théories algébriques. Les conditions ci-dessous sont équivalentes :

- 1) $P f$ a un adjoint à droite $\exists f$.
- 2) $P f$ conserve les coproduits finis, i. e. est admissible.
- 3) σf conserve les coproduits finis, i. e. est admissible.

Ceci équivaut à dire que $P f$ conserve les coproduits finis des B -algèbres libres de type fini. De manière explicite, $B[1, 0]$ est initial dans A et, pour tout $n \geq 1$, les

$$B[1, 1] \xrightarrow{B[1, i]} B[1, n],$$

$i = 1, 2, \dots, n$, définissent un coproduit dans A .

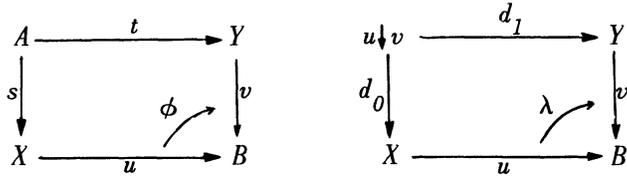
9. CAS PARTICULIERS. Lorsque $A = N$, on obtient $B[1, 0] = \emptyset$ (pas de constante) et toute opération n -aire avec $n \geq 1$ s'écrit de manière unique comme la composée d'une projection et d'une opération 1-aire. $P B$ est alors équivalente à la catégorie des $B[1, 1]$ -ensembles.

Lorsque A^0 est la théorie algébrique des groupes abéliens, on obtient $B[1, 0] = 0$ (une seule constante) et toute opération n -aire v avec $n \geq 1$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$v = u_1 p_1 + \dots + u_n p_n$$

où les u_i sont des opérations 1-aires. $P B$ est alors équivalente à la catégorie des $B[1, 1]$ -modules à gauche.

10. DEFINITION (Guitart [3]). Soit dans une 2-catégorie représentable K



où λ définit un carré comma; soit $k: A \rightarrow u \downarrow v$ tel que

$$d_0 k = s, \quad d_1 k = t \quad \text{et} \quad \lambda k = \phi.$$

On dira que $f: X \rightarrow M$ est une réalisation de ϕ et on écrira $f \models \phi$ lorsque pour tout $g: Y \rightarrow M$, l'application

$$(f d_0 \xrightarrow{a} g d_1) \mapsto (f s \xrightarrow{a k} g t)$$

est bijective. Si l'extension ponctuelle (r, θ) de f le long de u existe, $f \models \phi$ ssi le triangle θ surmonté du carré ϕ est une extension.

11. EXEMPLES. 1) ϕ est exact ssi $f \models \phi$ pour tout $f: X \rightarrow Z$.

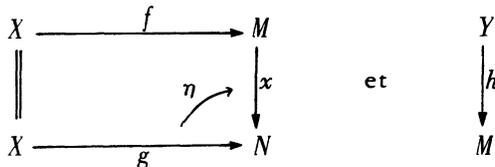
2) Soit $r: C \rightarrow X$; ϕ est r -exact ssi $f \models \phi$ pour tout $f: X \rightarrow Z$ qui est une extension ponctuelle le long de r .

3) Si u est dense et si (v, ϕ) est une extension de $u s$ le long de t , alors $u \models \phi$.

Si $f \ll g$, on sait que tout triangle transformé en extension par g est aussi transformé en extension par f . Cette propriété est généralisée au moyen de la

12. PROPOSITION. Si $f \ll g$ et $g \models \phi$, alors $f \models \phi$.

DÉMONSTRATION.



entraîne

$$\begin{array}{ccc}
 [f d_0, h d_1] & \xrightarrow{\Gamma} & [f s, h t] \\
 \Lambda \downarrow & = & \downarrow \Phi \\
 [g d_0, x h d_1] & \xrightarrow{\Pi} & [g s, x h t]
 \end{array}$$

où

$$\Gamma\alpha = \alpha k, \quad \Phi\alpha = x\alpha \circ \eta s, \quad \Lambda\alpha = x\alpha \circ \eta d_0 \quad \text{et} \quad \Pi\alpha = \alpha k.$$

Si η est exact et $g \vDash \phi$, alors Λ, Π, Γ sont bijectives.

13. COROLLAIRE (Guitart [2]). Si K est munie d'une Yoneda-structure et si X est admissible, alors $y_X \vDash \phi$ ssi $f \vDash \phi$ pour toute flèche admissible f de source X .

La proposition qui suit fournira un critère pour que ϕ soit exact dès que $y_X \vDash \phi$.

14. PROPOSITION. Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow v \\ X & \xrightarrow{u} & B \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

avec ψ exact. Alors, ϕ est exact ssi $u \vDash \phi$ et $f \vDash \phi$.

DÉMONSTRATION. Soit $\theta: fe_0 \rightarrow ge_1$ un carré comma et $l: A \rightarrow f \downarrow g$, le morphisme induit. Il existe alors

$$fd_0 \xrightarrow{\alpha} gd_1 \quad \text{tel que} \quad \alpha k = \psi \quad \text{et} \quad ue_0 \xrightarrow{\beta} ve_1 \quad \text{tel que} \quad \beta l = \phi.$$

On en déduit

$$u \downarrow v \xrightarrow{i} f \downarrow g \quad \text{et} \quad f \downarrow g \xrightarrow{j} u \downarrow v \quad \text{tels que} \quad \theta i = \alpha \quad \text{et} \quad \lambda j = \beta,$$

et on obtient $ji = id$ et $ij = id$.

15. REMARQUE. On a montré en fait que

$$u \vDash \phi, \quad f \vDash \phi, \quad u \vDash \psi \quad \text{et} \quad f \vDash \psi$$

entraînent que $u \downarrow v$ et $f \downarrow g$ sont isomorphes et par suite $h \vDash \phi$ ssi $h \vDash \psi$.

16. COROLLAIRE. S'il existe un carré exact de la forme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{y_X} & P X \end{array}$$

et si u est admissible, alors $\gamma_X \models \phi$ ssi ϕ est exact.

En particulier, si u et t sont admissibles, les carrés

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{t} & Y \\ \parallel & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{u} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xlongequal{\quad} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

sont exacts ssi $\gamma_X \models \phi$.

On démontre maintenant le théorème annoncé dans l'introduction.

17. THÉORÈME. On suppose \mathbf{K} munie d'une Yoneda-structure telle que les extensions ponctuelles le long des flèches admissibles au-dessus des objets de la forme PX existent. Dans ce cas, $P: Ad(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}^{Op}$ conserve et réfléchit l'exactitude. Plus précisément, soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & Y & \xrightarrow{\gamma_Y} & PY \\ \downarrow s & & \downarrow v & \nearrow \beta(v) & \downarrow v \\ X & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{\gamma_B} & PB \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} PB & \xrightarrow{Pu} & PX \\ \downarrow Pv & & \downarrow Ps \\ PY & \xrightarrow{Pt} & PA \end{array}$$

1) Si $P\phi$ est exact, alors $\gamma_X \models \phi$.

2) Si γ_X réalise le composé horizontal de ϕ et $\beta(v)$, alors $P\phi$ est exact.

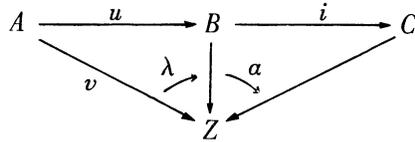
Il en résulte que $\gamma_X \models \phi$ équivaut à $P\phi$ exact dès que σu est admissible ou $\beta(v)$ est exact, ce qui est le cas pour les théories algébriques (voir n° 19).

DÉMONSTRATION. En raison des hypothèses, $\exists s \dashv Ps$ et $\exists v \dashv Pv$. Le compagnon ϕ_1 de $P\phi$ s'insère alors dans la relation

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & Y & \xrightarrow{\gamma_Y} & PY \\ \parallel & & \downarrow v & \nearrow \beta v & \downarrow Pv \\ A & \xrightarrow{\gamma_A} & PA & \xrightarrow{Pt} & PB \\ \downarrow \gamma_X \cdot s & & \downarrow \exists s & \nearrow \phi_1 & \downarrow Pv \\ & & PX & \xrightarrow{Pu} & PX \end{array} = \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & Y & \xrightarrow{\gamma_Y} & PY \\ \downarrow s & & \downarrow v & \nearrow \beta v & \downarrow Pv \\ X & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{\gamma_B} & PB \\ \downarrow \gamma_X & & \downarrow \lambda & \nearrow \sigma u & \downarrow Pv \\ & & PX & \xrightarrow{Pu} & PX \end{array}$$

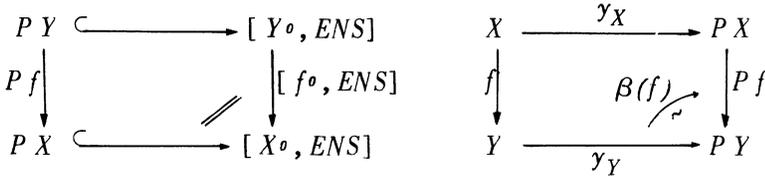
Il en résulte que γ_X est un isomorphisme, i.e. $P\phi$ est exact, ssi le diagramme de gauche est une extension. Ceci démontre 2 et 1 résulte alors du :

18. LEMME. Soit dans K le diagramme



où le triangle composé est une extension ponctuelle, i est pleinement fidèle et α est un isomorphisme. Si l'extension ponctuelle de v le long de u existe, alors λ et α définissent des extensions ponctuelles.

19. PROPOSITION. Pour la Yoneda-structure conduisant aux théories et catégories algébriques (Section 7) les carrés suivants sont exacts, pour tout foncteur $f: X \rightarrow Y$ conservant les coproduits finis :



En effet, l'exactitude du premier équivaut à dire que, si

$$ENS \xleftarrow{g} X_0 \xrightarrow{f^0} Y_0$$

g préserve les produits finis, il en est de même pour l'extension ponctuelle de g le long de f^0 (Borceux [1]). L'exactitude du second résulte de celle du premier, compte tenu du lemme précédent.

20. REMARQUES. 1) Dans la situation du Théorème 17, $P\phi$ est exact ssi $\exists \phi : \exists u \exists s \rightarrow \exists v \exists t$ est exact.

2) On peut formuler des résultats analogues en supposant l'existence d'adjoints à droite $P s \dashv \forall s, \dots$

3) Si $\phi : u s \rightarrow v t$ est un carré exact dont les sommets sont des «petites catégories» et si C est une catégorie cocomplète, alors $C^\phi : C^s C^u \rightarrow C^t C^v$ est encore exact, i.e. l'exponentiation conserve l'exactitude.

BIBLIOGRAPHIE.

1. F. BORCEUX, Universal algebra in a closed category, *Séminaire Math. Pures* Louvain-la-Neuve, Rapport 64 (1976).
2. R. GUITART, Relations et carrés exacts, *Ann. Sc. Math. Québec* IV-2 (1980) 103-125.
3. R. GUITART, a) Qu'est-ce que la logique dans une catégorie? Ce Volume.
b) Introduction à la logique exacte fibrée, en préparation.
4. G.M. KELLY & R. STREET, Review of the elements of 2-categories, *Lecture Notes in Math.* 420, Springer (1974).
5. C. LAIR, Conditions syntaxiques de plongement, *Diagrammes* 2, Paris (1979).
6. W. LAWVERE, Functorial semantics of algebraic theories, *Proc. Nat. Ac. Sc.* 50 (1963), 869-872.
7. W. LAWVERE, Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories, *Lecture Notes in Math.* 61, Springer (1968).
8. S. MACLANE, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.
9. R. STREET, Fibrations and Yoneda's Lemma in a 2-category, *Lecture Notes in Math.* 420, Springer (1974).
10. R. STREET, Elementary cosmoi I, *Lecture Notes in Math.* 420, Springer (1974).
11. R. STREET & WALTERS, Yoneda structures on 2-categories, Preprint.
12. L. VAN DEN BRIL, Carrés exacts de Hilton dans des contextes non abéliens, *Ann. Sc. Math. Québec* IV-2 (1980), 153-173.

28 rue de la Sapinière
1170 BRUXELLES. Belgique