ANDRÉE CHARLES EHRESMANN

Catégories localement triviales. Catégories microtransitives

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 23, n° 4 (1982), p. 379-388

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1982__23_4_379_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XXIII-4 (1982)*
ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

CATÉGORIES LOCALEMENT TRIVIALES
CATÉGORIES MICROTRANSITIVES

par Andrée CHARLES EHRESMANN

INTRODUCTION.

Ses recherches sur les espaces fibrés et la Géométrie Différentielle ont conduit Charles Ehresmann à introduire, dans les années 50, les notions générales de catégorie topologique et de catégorie différentiable, c'est-à-dire, en termes modernes, de catégorie interne à la catégorie *Top* des topologies et à la catégorie des variétés r-différentiables. Plus précisément, comme nous le rappelons ci-après, il a prouvé que la théorie des espaces fibrés localement triviaux est équivalente à la théorie des actions de certains groupoïdes topologiques qu'il appelle groupoïdes localement triviaux. Ce résultat a trouvé récemment des applications en Géométrie Différentielle Synthétique.

Par ailleurs, dans un long article sur les catégories topologiques, il a défini les catégories microtransitives qui généralisent les catégories localement triviales. Nous allons prouver qu'une catégorie microtransitive, C, dont la topologie est «assez régulière», est en fait localement triviale. En particulier si une catégorie différentiable, ou une catégorie topologique compacte métrisable, est microtransitive, elle est localement triviale. La démonstration utilise un théorème de Sélection de Michael.

1. ESPACES FIBRÉS ET GROUPOÏDES LOCALEMENT TRIVIAUX.

Charles Ehresmann a introduit en 1941 les espaces fibrés localement triviaux [2, 3] et a développé leur théorie et leurs applications dans une série d'articles. Parmi ses principaux résultats figurent : la construction de l'espace fibré principal associé H et des espaces fibrés associés à un espace fibré localement trivial $E(B, F, G, H)$, où E est l'espace total, B la base, G le groupe structural topologique [3] ; le théorème de relèvement des homotopies [2, 6, 7] qui a conduit à l'étude des fibrations de Serre et de Hurewicz ; le problème de la restriction du groupe structural [4, 7]; l'utilisation des espaces fibrés en Géométrie Différentielle [5, 10 à 15], en particulier la construction des espaces fibrés de jets infinitésimaux qui jouent un rôle essentiel dans la théorie des objets géométriques, des prolongements de variétés et des connexions infinitésimales [9,16].

C'est l'étude des connexions qui a conduit à utiliser, dans [9], au lieu de l'espace fibré principal H formé des isomorphismes de la fibre type F sur une fibre variable F_b, $b \in B$, le groupoïde HH^{-1} des isomorphismes entre les fibres, qui admet B pour classe d'objets. Dans [15] ce groupoïde L est muni d'une topologie vérifiant les conditions suivantes :

1 . Les applications source α et but β sont continues $L \to L_0$, où L_0 est la classe des unités munie de la topologie induite par celle de L .

2. La loi de composition k est continue $L * L \to L$, où $L * L$ est la classe des couples composables, munie de la topologie induite par la topologie produit $L \times L$.

3. L'application d'inversion $f \mapsto f^{-1}$ est continue $L \to L$.

4. L_0 est homéomorphe à B . Pour toute unité e $(= Id_{F_b})$, il existe une application continue $s : U \to L$, définie sur un certain voisinage U de e dans L_0 telle que $s(x) : e \to x$ pour tout $x \in U$. On dit que s est une *section locale de* β de source constante sur e.

Soit p l'application associant l'unité Id_{F_b} à $x \in E$, si $x \in F_b$.

5. $p : E \to L_0$ est une application continue et L opère continuement sur E pour la loi :

$$(f, x) \mapsto f(x) \quad \text{ssi} \quad p(x) = \alpha(f).$$

Un groupoïde L muni d'une topologie vérifiant les conditions 1, 2, 3 est appelé dans [17] un *groupoïde topologique* (c'est donc un groupoïde interne à *Top*) ; si la condition 4 est aussi vérifiée, L est un *groupoïde localement trivial* ; enfin un espace E sur lequel un groupoïde topologique

L opère (condition 5) est appelé un *espace fibré sur* L.

Le but de [17] est de montrer que la théorie des espaces fibrés localement triviaux est équivalente à celle des espaces fibrés dans ce sens sur des groupoïdes localement triviaux.

D'une manière précise, soit L un groupoïde localement trivial transitif (i.e. les Hom sont non vides), opérant sur un espace topologique E ; on lui associe l'espace fibré localement trivial $\mathrm{E} = E(B, F, G, H)$ construit comme suit: la fibre F est la fibre $p^{-1}(e)$ sur une unité e choisie; la base B est la classe (topologique) des unités L_0 ; le groupe structural G est le groupe topologique quotient du sous-groupe $Hom(e, e)$ de L par le groupe d'isotropie :

$$S = \{ f : e \to e \mid f \in \mathrm{L},\ fx = x \text{ pour tout } x \in F \},$$

et le groupoïde des isomorphismes entre fibres de E est isomorphe au groupoïde topologique quotient L/S.

Par exemple, à l'action de L sur lui-même correspondant à la projection but $\beta : \mathrm{L} \to \mathrm{L}_0$ est associé l'espace fibré principal de base L_0 et de groupe structural $Hom(e, e)$ opérant sur lui-même à droite.

Cette présentation des espaces fibrés localement triviaux sous la forme d'actions de groupoïdes localement triviaux, aussi valable dans le cas différentiable, simplifie nettement l'étude des connexions d'ordre supérieur. Peu connue pendant longtemps, elle a repris toute son actualité dans le cadre de la Géométrie Différentielle Synthétique (cf. Kock [20]) où elle s'adapte sans difficultés.

2. CATÉGORIES TOPOLOGIQUES.

Les résultats rappelés ci-dessus ont conduit Charles à considérer, plus généralement les catégories dont l'ensemble des morphismes est muni d'une topologie vérifiant les conditions 1 et 2 de la Section 1 ; il les appelle *catégories topologiques* dans [17]; ce sont donc les catégories internes à la catégorie *Top* des topologies.

Une *catégorie localement triviale* est une catégorie topologique dont le groupoïde des isomorphismes est un groupoïde localement trivial pour la topologie induite [17].

L'article [18] contient une étude générale des catégories topologiques, et il introduit une notion intermédiaire entre les catégories localement triviales et les catégories topologiques générales, à savoir celle de catégorie microtransitive. Celles-ci interviennent lorsqu'on veut définir une structure analogue à la structure uniforme d'un groupe topologique.

Un *groupoïde microtransitif* est un groupoïde topologique L dans lequel l'application

$$[\beta, \alpha]: f \mapsto (\beta(f), \alpha(f)): \mathrm{L} \to \mathrm{L}_0 \times \mathrm{L}_0$$

est ouverte. Une *catégorie microtransitive* est une catégorie topologique dont le groupoïde des isomorphismes est un groupoïde microtransitif.

Dans [18] on montre (Théorème 4) que, si L est un groupoïde microtransitif, un système fondamental de voisinages de $f: e \to e'$ est formé des ensembles

$$U'fU = \{ g'fg \mid g' \in U', \ g \in U \},$$

où U et U' sont des voisinages de e et de e' respectivement dans L. Si C est une catégorie microtransitive, un système fondamental de voisinages de $h: e \to e'$ est formé des ensembles

$$U'VU = \{ g'fg \mid g' \in U', \ g \in U, \ f \in V \},$$

où U et U' sont des voisinages de e et de e' dans le groupoïde des isomorphismes et où V est un voisinage de h dans $Hom(e, e')$ muni de la topologie induite par L.

3. LE THÉORÈME DE SELECTION.

Pour donner une autre caractérisation des catégories microtransitives qui permettra de les comparer aux catégories localement triviales, nous utiliserons un théorème de Michael que nous allons rappeler.

Soit A et B des espaces topologiques. Une *application multivoque*

$F: B \to A$ est une application F de B dans l'ensemble des parties de A. On dira que F *est semi-continue inférieurement* si :

(a) $F(b) \neq \emptyset$ pour tout $b \in B$;

(b) Pour tout ouvert V de A l'ensemble des $b \in B$ tels que l'on ait $F(b) \cap V \neq \emptyset$ est ouvert dans B.

Le problème de *sélection continue* pour F consiste à chercher une application continue $s: B \to A$ telle que $s(b) \in F(b)$ pour tout $b \in B$. Ce problème a été étudié par divers auteurs, en particulier par Michael qui a obtenu le résultat suivant [21] :

THÉORÈME DE SÉLECTION *(Michael). Si A est à bases dénombrables de voisinages (= first-countable) et si B est un espace topologique régulier à base dénombrable d'ouverts (= countable), alors toute application multivoque $F: B \to A$ semi-continue inférieurement admet une sélection continue.*

4. UNE CARACTÉRISATION DES GROUPOÏDES MICROTRANSITIFS.

Soit L un groupoïde topologique et L_0 l'espace topologique de ses objets. Il est prouvé dans [18] (Proposition 8) que L est microtransitif ssi la condition suivante est vérifiée :

(m) pour tout objet e de L et pour tout voisinage V de e dans L, l'ensemble $\beta(Ve)$ des buts des morphismes dans V de source e est un voisinage de e dans L_0.

A l'aide de cette caractérisation, nous obtenons la :

PROPOSITION 4.1. *Le groupoïde topologique* L *est microtransitif ssi il vérifie la condition suivante :*

(m') Pour tout objet e, il existe un voisinage U de e dans L_0 *tel que la restriction à U de $Hom(e,-)$ soit une application multivoque semi-continue inférieurement $U \to$* L.

PREUVE. Dire que $Hom(e,-): U \to$ L est semi-continue inférieurement sur un certain voisinage U de e dans L_0 signifie que $Hom(e,e') \neq \emptyset$ pour tout $e' \in U$ et que, pour tout ouvert V de L l'ensemble

$$\beta(Ve)\cap U = \{ x \in U \mid Hom(e,x)\cap V \neq \emptyset \}$$

est ouvert dans L_0.

1. Supposons la condition (m') de l'énoncé vérifiée; montrons que (m) est satisfaite. Soit e un objet et V un voisinage ouvert de e dans L. Par hypothèse, il existe un voisinage U de e dans L_0 tel que $Hom(e,-)$ soit semi-continue inférieurement sur U ; alors $\beta(Ve)\cap U$, et a fortiori $\beta(Ve)$, est un voisinage de e dans L_0. Ainsi L est microtransitif.

2. Supposons L microtransitif et soit e un objet. D'après la condition (m), l'ensemble $\beta(Le)$ des buts des morphismes de source e contient un voisinage ouvert U de e dans L_0. Montrons que $Hom(e,-): U \to L$ est semi-continue inférieurement. Le choix de U entraîne que

$$Hom(e,e') \neq \emptyset \text{ pour tout } e' \in U.$$

Soit V un ouvert de L et prouvons que $\beta(Ve)\cap U$ est ouvert dans L_0. On peut supposer cet ensemble non vide, sans quoi il est a fortiori ouvert; il existe donc un $f: e \to x$ dans V tel que $x \in U$. Par définition d'un groupoïde microtransitif, $[\beta,\alpha](V)$ est ouvert dans $L_0 \times L_0$, de sorte qu'il contient un voisinage $U' \times U''$ de $(x,e) = [\beta,\alpha](f)$, où U' et U'' sont des voisinages de x et de e respectivement dans L_0 ; a fortiori

$$U' \times \{e\} \subset [\beta,\alpha](V), \quad \text{d'où} \quad U' \subset \beta(Ve).$$

Il en résulte que $U \cap U'$ est aussi un voisinage de x dans L_0, contenu dans $\beta(Ve)\cap U$, lequel est donc ouvert. Ceci achève la preuve. ∇

5. GROUPOÏDES LOCALEMENT TRIVIAUX.

En rapprochant la Proposition 4.1 et le Théorème de sélection de la Section 3, on obtient:

THÉORÈME 5.1. *Soit* L *un groupoïde microtransitif. Si la topologie de* L *est à bases dénombrables de voisinages et si tout objet* e *admet un voisinage ouvert* U_e *dans* L_0 *dont la topologie soit régulière et à base dénombrable d'ouverts, alors* L *est un groupoïde localement trivial.*

PREUVE. Soit e un objet. D'après la Proposition 4.1, il existe un voisinage ouvert U de e dans L_0 tel que $Hom(e, \cdot): U \to L$ soit semi-continue inférieurement, et l'on peut choisir U contenu dans U_e. Comme la topologie de U_e est régulière et à base dénombrable, il en est de même pour son ouvert U. Ainsi les hypothèses du Théorème de Sélection sont vérifiées, et ce théorème assure l'existence d'une application continue

$$s: U \to L \quad \text{telle que} \quad s(x) \in Hom(e, x) \text{ pour tout } x \in U.$$

Donc s est une section locale de β de source constante sur e. Ceci entraîne que L est localement trivial. ∇

COROLLAIRE 5.2. *Soit* L *un groupoïde microtransitif dans lequel tout morphisme a un voisinage métrisable ; si* L_0 *est localement compact,* L *est localement trivial.*

En effet, les conditions du Théorème 5.1 sont vérifiées : L est à bases dénombrables de voisinages ; tout objet e admet un voisinage dans L_0 compact et métrisable, donc (Dieudonné [1]) à base dénombrable d'ouverts et régulier. ∇

COROLLAIRE 5.3. *Si* L *est un groupoïde microtransitif et si les topologies de* L *et de* L_0 *sont sous-jacentes à des structures de variétés, alors* L *est un groupoïde localement trivial.* ∇

6. CATÉGORIES LOCALEMENT TRIVIALES.

Dans cette section, C est une catégorie topologique, L le groupoïde de ses isomorphismes muni de la topologie induite. Si L vérifie la condition (m) de la Section 4, alors L est microtransitif dès que l'inversion est continue.

THÉORÈME 6.1. *Si* C *est une catégorie différentiable et si son groupoïde* L *vérifie la condition (m), alors* C *est localement triviale.*

PREUVE. Il est prouvé dans [17] (Théorème 1) que L est ouvert dans C, que l'inversion est continue et que L_0 définit une sous-variété. Donc L est un groupoïde microtransitif vérifiant les conditions du Corollaire 5.3. D'après ce corollaire, L, et a fortiori C, est localement trivial. ∇

Plus généralement, la preuve précédente s'applique dans le cas où C est une *catégorie topologique régulière* au sens de [17], c'est-à-dire une catégorie topologique dont la topologie est celle d'une variété, qui est une variété feuilletée pour les feuilletages définis par les applications source et but; dans ce cas, le groupoïde L est encore ouvert et l'inversion continue (Théorème 1' de [17]). Par suite :

THÉORÈME 6.2. *Si* C *est une catégorie topologique régulière dont le groupoïde des isomorphismes* L *vérifie la condition (m), alors* C *est une catégorie localement triviale.* ∇

La dernière application utilisera la proposition suivante, dont le résultat figure (avec une preuve différente) dans J. Klasa [19].

PROPOSITION 6.3. *Soit* C *une catégorie topologique dont la topologie est compacte, et soit* L *le groupoïde de ses isomorphismes. Alors* L *est compact, et l'inversion est continue.*

PREUVE. La topologie de C étant séparée, la classe $C_0 = L_0$ des objets est fermée ([18], Proposition 1). Par suite son image réciproque

$$D = \{ (f, g) \in C \times C \mid \alpha(f) = \beta(g),\ fg \in C_0 \}$$

par la loi de composition continue $k : C * C \to C$ est fermée dans $C * C$. Ce produit fibré de (α, β) étant compact, D l'est aussi.

1. Un morphisme appartient à L ssi il a un inverse à droite et un inverse à gauche ; ainsi L est l'intersection des images du compact D par les projections continues $pr_1, pr_2 : C * C \to C$. Ces images étant compactes, L est compact, donc fermé dans C.

2. L'inversion $I : L \to L$ est une bijection qui est son propre inverse, et L est compact ; il en résulte que I sera continue si $I(A)$ est compact pour tout compact A contenu dans L. Or $I(A)$ est l'image par la projection continue pr_2 de l'ensemble

$$M = \{(f, g) \mid f \in A,\ g \in L,\ fg \in L_0 \}$$

lequel est l'intersection de D avec le produit fibré $A * L$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "P.B."] & A * \mathrm{L} \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathrm{L}_0 & \mathrm{L} \arrow[l, "\beta"] \end{tikzcd}$$

Comme $A * \mathrm{L}$ et D sont compacts, M est compact, ainsi que son image $I(A)$ par pr_2. ∇

THÉORÈME 6.4. *Soit* C *une catégorie topologique dont la topologie est compacte et métrisable. Si son groupoïde des isomorphismes* L *vérifie la condition* (*m*), C *est une catégorie localement triviale.*

PREUVE. L étant un groupoïde topologique d'après la Proposition 6.3, il est microtransitif. Comme L est métrisable et L_0 compact, il résulte du Corollaire 5.2 que L, et a fortiori C, est localement trivial. ∇

RÉFÉRENCES.

1. J. DIEUDONNE, *Eléments d'Analyse* 1, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
2. C. EHRESMANN & J. FELDBAU, Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés, *C.R.A.S. Paris* 212 (1941), 945-948.
3. C. EHRESMANN, Espaces fibrés associés, *Idem* 213 (1941), 762-764.
4. C. EHRESMANN, Espaces fibrés de structures comparables, *Idem* 214 (1942), 144-147.
5. C. EHRESMANN, Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable, *Idem* 216 (1943), 628-630.
6. C. EHRESMANN, Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré ou dans un revêtement, *Bull. Soc. Math. France* 72 (1944), 27-54.
7. C. EHRESMANN, Sur la théorie des espaces fibrés, *Colloque Intern. Topologie Algébrique Paris*, C. N. R. S. (1947), 3-15.
8. C. EHRESMANN, Sur les espaces fibrés différentiables, *C.R.A.S. Paris* 224 (1947), 444-445.
9. C. EHRESMANN, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Colloque Topologie Bruxelles*, C. B. R. M. (1950), 29-55.
10. C. EHRESMANN, Les prolongements d'une variété différentiable, *Atti IV Cong. Unione Mate. Italiana Taormina* (1951), 1-9.

11. C. EHRESMANN, Les prolongements d'une variété différentiable, *C.R.A.S.* I, 233 (1951), 598 ; II, Idem, 777 ; III, Idem, 1081; IV, 234 (1952), 1028 ; V, 1424.

12. C. EHRESMANN, Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie, *Coll. Int. Géo. Dif. Strasbourg*, C.N.R.S. (1953), 97.

13. C. EHRESMANN, Extension du calcul des jets aux jets non holonomes, *C.R. A.S.* 239 (1954), 1762-1764.

14. C. EHRESMANN, Applications de la notion de jet non holonome, *Idem* 240 (1955), 397 - 399.

15. C. EHRESMANN, Les prolongements d'un espace fibré différentiable, *Id.* 1755.

16. C. EHRESMANN, Sur les connexions d'ordre supérieur, *Atti V Con. Unione Mate. Italiana Pavia - Torino* (1956), 326 - 328.

17. C. EHRESMANN, Catégories topologiques et catégories différentiables, *Coll. Géo. Diff. Globale Bruxelles*, C.B.R.M. (1959), 137-150.

18. C. EHRESMANN, Catégories topologiques I, II, III, *Indig. Math.* 28 (1966), 133 -175.

19. J. KLASA, Thése 3e cycle Université Paris VII, 1972.

20. A. KOCK, *Synthetic Differential Geometry,* Cambridge Un. Press L.N. 51, 1981.

21. E. MICHAEL, Some results on continuous selections, *Math. Centre Tracts* 115 (1979), 161 -163.

NOTE. Les articles de C. Ehresmann sont reproduits dans *Charles Ehresmann, Oeuvres complètes et commentées*, Amiens; les articles 2 à 17 seront dans la Partie I, l'article 18 se trouve dans la Partie II-2.

Université de Picardie
U.E.R. de Mathématiques
33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS CEDEX
FRANCE.