CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

DOMINIQUE BOURN

La tour de fibrations exactes des n-catégories

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 25, nº 4 (1984), p. 327-351

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1984__25_4_327_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

Vol. XXV-4 (1984)

LA TOUR DE FIBRATIONS EXACTES DES n-CATÉGORIES

par Dominique BOURN

Abstract. In this paper, we study the general setting for n-categories, necessary to prove a Dold-Kan theorem for n-categorical abelian groups which will appear subsequently : the equivalence between the category of abelian complexes of length n and the category of internal n-categories in Ab. Given a full subcategory **V'** of a left exact category **V**, reflective by a left exact functor K, we denote by Cat_K(**V**) the full subcategory of the category Cat(**V**) of internal categories in **V**, trivialized by K (the image by K of every structural map is an isomorphism). Then **V** turns out to be a full subcategory of Cat_K(**V**) with the same properties as **V'** for a functor K_1. The aim of this paper is to prove that : - 1. the category of n-categories is the n-th step from $1 \to$ Ens of this basic construction and - 2. K is actually a fibration and if it is an exact fibration (each fiber Barr exact, each change of base an exact functor), this is also the case for K_1. Whence, for every Barr exact category E, a tower of exact fibrations

$$1 \leftarrow E \leftarrow \mathrm{Cat}(E) \leftarrow \dots \leftarrow (n-1)\text{-}\mathrm{Cat}(E) \leftarrow n\text{-}\mathrm{Cat}(E) \dots \infty\text{-}\mathrm{Cat}(E).$$

Les notions d'ensemble simplicial et d'ensemble cubique, structures algébriques de nature pourtant infinitaire, se sont largement et rapidement répandues du fait de leurs positions centrales dans la comparaison entre les théories de l'homotopie et de l'homologie. La notion de n-catégorie (au-delà de $n = 2$) et a fortiori de ∞-catégorie, ne semble pas, jusqu'à présent, avoir eu un tel succès. Cependant, cette notion, quoique plus riche, n'est algébriquement qu'à peine plus complexe. Quelques résultats récents prouvent qu'elle est, géométriquement, au moins aussi intéressante. R. Brown et P.J. Higgins ont, d'une part, mis en évidence pour leur généralisation du théorème de Seifert-van Kampen [5], l'équivalence entre la catégorie des complexes croisés et la catégorie des ∞-groupoïdes [6] et ont souligné l'usage que l'on pouvait faire de ces derniers dans les situations décrivant les homotopies, les homotopies d'homotopies, etc... [4]. L'auteur a démontré d'autre part un théorème de Dold-Kan pour les n-catégories [2] : l'équivalence entre la catégorie des complexes abéliens de longueur n et la catégorie des groupes abéliens n-catégoriques. Il semble bien, de plus, que cette plus grande richesse de structure des n-catégories soit en relation étroite avec le problème non-abélien comme l'indiquent nettement, pour le cas $n = 2$, R. Lavendhomme et J.R. Roisin [10] et comme le suggère, pour n quelconque, R. Brown [4].

La notion de n-catégorie est souvent réduite à un cas particulier de catégorie n-uple [8, 6] ; on la cite comme telle, on pense injustifié d'en faire une théorie propre. La recherche d'une démonstration plus abstraite pour [2] m'a contraint à une analyse plus fine de la situation. Tout l'édifice repose sur le foncteur d'oubli

$$(\ )_0 : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Ens}$$

et ses deux propriétés suivantes :

- il est exact à gauche et admet un adjoint à droite, inverse à gauche ,
- c'est une fibration (scindée) à fibres exactes au sens de Barr et à changements de base exacts.

Incidemment, on peut remarquer que cette fibration est en fait un champ pour la topologie des épimorphismes et, au vu de ces propriétés très fortes, se demander si au lieu de prendre Ens ou Cat comme fondation pour les mathématiques [11], il ne conviendrait pas de considérer ce foncteur. Dans ce contexte, la catégorie 2-Cat des 2-catégories apparaît alors comme la sous-catégorie pleine des catégories internes à Cat (i.e. catégories doubles) trivialisées par $(\ )_0$ (i.e. dont l'image de toutes les flèches structurales sont des identités). De nouveau le foncteur d'oubli 2-Cat → Cat qui associe à une 2-catégorie sa catégorie des 1-morphismes admet les deux propriétés mises en évidence ci-dessus. On est donc amené à considérer la situation de base suivante :

$$\begin{tikzcd}\mathbf{V} \arrow[r, shift left, "K"] & \mathbf{V'} \arrow[l, shift left, "G"]\end{tikzcd}$$

où $\mathbf{V}$ est exacte à gauche, K un foncteur exact à gauche, admettant G comme adjoint à droite, inverse à gauche. On note $\mathrm{Cat}_K(\mathbf{V})$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathrm{Cat}(\mathbf{V})$ des catégories internes à $\mathbf{V}$ dont les objets sont les catégorie internes trivialisées par K (dont les images des flèches structurales sont des isomorphismes). On se retrouve alors dans la situation initiale

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Cat}_K(\mathbf{V}) \arrow[r, shift left, "K_1"] & \mathbf{V} \arrow[l, shift left, "G_1"]\end{tikzcd}$$

où K_1 associe à une catégorie interne son objet des objets. Cette construction s'appelle la construction de base.

Le but de cet article est double :

- Montrer (dans la Partie II) que la n-ième construction de base obtenue à partir de Ens → **1** nous redonne la catégorie des n-catégories.
- Montrer (dans la Partie I) que, dans la situation de base, K est une fibration et que si de plus les fibres sont exactes au sens de Barr, il en est de même pour K_1.

On obtient ainsi une tour de fibrations exactes au sens de Barr :

$$1 \leftarrow \mathrm{Ens} \leftarrow \mathrm{Cat} \leftarrow 2\text{-}\mathrm{Cat} \leftarrow \dots\ n\text{-}\mathrm{Cat} \leftarrow (n{+}1)\text{-}\mathrm{Cat} \leftarrow \dots\ \infty\text{-}\mathrm{Cat}$$

En fait, un groupe abélien n-catégorique étant une n-catégorie interne à Ab, c'est davantage la notion de n-catégorie interne qui est visée ici. Lorsque E est une catégorie exacte à gauche, on voit bien qu'en ce qui concerne les n-catégories internes à E, les résultats précédents permettent de concentrer toute la difficulté dans le passage du niveau 1 au niveau 2. Si de plus E est exacte au sens de Barr, il est clair qu'on obtient, de nouveau, une tour de fibrations exactes :

$$1 \leftarrow E \leftarrow \mathrm{Cat}(E) \leftarrow 2\text{-}\mathrm{Cat}(E) \leftarrow \dots\ n\text{-}\mathrm{Cat}(E) \leftarrow (n{+}1)\text{-}\mathrm{Cat}(E) \dots \infty\text{-}\mathrm{Cat}(E).$$

Cette présentation des n-catégories internes permet de donner une démonstration simple du théorème de Dold-Kan n-catégorique qui paraîtra ultérieurement. La construction de base nous donne les moyens d'un raisonnement par récurrence. La stabilité vis à vis de l'exactitude au sens de Barr nous permet de distinguer parmi les n-catégories qui correspondent aux complexes abéliens de longueur n, celles qui proviennent d'une extension. Il était d'autre part impossible, sans cela, d'espérer développer une théorie n-catégorique de l'homologie.

I. LA CONSTRUCTION DE BASE

1. La situation de base et la fibration associée.

On part de la situation de base suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V}' \arrow[r, shift right, "G"'] & \mathbf{V} \arrow[l, shift right, "K"'] \end{tikzcd}$$

où G est un foncteur pleinement fidèle de $\mathbf{V}'$ dans la catégorie exacte à gauche $\mathbf{V}$ et K un adjoint à gauche de G, exact à gauche. On notera η la transformation naturelle de $1_{\mathbf{V}}$ vers G.K.

Notons $K/\mathbf{V}$ la catégorie ayant pour objets les triplets (X, t, Y) où X est un objet de $\mathbf{V}$, Y un objet de $\mathbf{V}'$ et t un morphisme de X vers G(Y) tel que K(t) soit un isomorphisme. Un morphisme de (X, t, Y) vers (X', t', Y') est un couple (f, g) de morphismes de $\mathbf{V}\times\mathbf{V}'$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "t"'] & X' \arrow[d, "t'"] \\ GY \arrow[r, "G(g)"] & GY' \end{tikzcd}$$

on a alors deux foncteurs

$\underline{K} : K/\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$, défini par $\underline{K}(X, t, Y) = Y$,
$\Sigma_K : K/\mathbf{V} \to \mathbf{V}$, défini par $\Sigma_K(X, t, Y) = X$.

Proposition 1. *Le foncteur* $\underline{K}$ *est une fibration.*

Preuve. Soit $(X, t, Y) \in K/\mathbf{V}$ et $k : U \to Y$; alors $k^*(X, t, Y)$ est donné par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d, "z"'] & X \arrow[d, "t"] \\
GU \arrow[r, "G(k)"] & GY
\end{tikzcd}$$

puisqu'en effet, le foncteur K étant exact à gauche, $K(z)$ est un isomorphisme. On notera $(K/\mathbf{V})_Y$ la fibre en Y de cette fibration. ◊

Proposition 2. *Le foncteur* Σ_K *est une équivalence de catégories.*

Preuve. On définit un foncteur

$$\Theta_K : \mathbf{V} \to K/\mathbf{V} \quad \text{par} \quad \Theta_K(X) = (X, \eta X, KX)$$

qui est clairement un quasi-inverse de Σ_K. ◊

Il est alors naturel de poser les définitions suivantes :

Définition 1. Un morphisme f de $\mathbf{V}$ est dit K-*inversible,* lorsque $K(f)$ est un isomorphisme. Il est dit K-*cartésien,* lorsque le carré suivant et un produit fibré

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta X"'] & X' \arrow[d, "\eta X'"] \\
GKX \arrow[r, "GKf"] & GKX'
\end{tikzcd}$$

Ces deux familles de flèches sont stables par composition et par produits fibrés puisque K est exact à gauche.

Enfin toute flèche qui est à la fois K-cartésienne et K-inversible est clairement un isomorphisme. D'autre part toute flèche de f de $\mathbf{V}$ va se décomposer en $f_2.f_1$, où f_2 est K-cartésien et f_1 K-inversible. Pour cela il suffit de considérer le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"] \arrow[dd, "\eta X"'] & & X' \arrow[dd, "\eta X'"] \\
& {} \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[dl] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \\
GKX \arrow[rr, "GKf"'] & & GKX'
\end{tikzcd}$$

où le carré $(*)$ est un produit fibré. Cette décomposition d'après la remarque précédente est unique à isomorphisme près. Enfin, pour tout objet Y dans $\mathbf{V'}$, toute flèche de la fibre $(K/\mathbf{V})_Y$ est K-inversible.

2. K-exactitude au sens de Barr.

Soit une relation d'équivalence dans **V** sur X :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left=3, "\pi_1"'] \arrow[r, shift right=3, "\pi_2"] & X \arrow[l, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

Définition 2. On dira que cette relation d'équivalence est K-**discrète** lorsque δ est K-inversible. Il est clair qu'alors π_1 et π_2 le sont également.

Définition 3. Dans la situation de base, on dira que **V** est K- *exacte* (au sens de Barr) lorsque toute relation d'équivalence K-discrète admet un quotient (i.e. un conoyau qui la rend effective) universel (i.e. stable par changement de base).

Il est clair que le morphisme quotient $\rho : X \twoheadrightarrow Q$ est K-inversible.

Proposition* 3.** *Si* **V** *est* K *-exacte, alors, pour tout* Y *de* **V', la fibre* $(K/\!\!\!-\mathbf{V})_Y$ *est une catégorie exacte au sens de Barr*[1] *et pour tout morphisme* $k : U \to Y$ *de* **V'** *, le foncteur changement de base* k^* *est exact.*

Preuve. La catégorie $(K/\!\!\!-\mathbf{V})_Y$ est stable dans $K/\!\!\!-\mathbf{V}$ pour les limites à gauche finies et toute relation d'équivalence de $(K/\!\!\!-\mathbf{V})_Y$ étant K-discrète admet un quotient universel. De plus le foncteur k^* est clairement exact à gauche et préserve les quotients car ceux-ci sont universels. ◊

3. Les objets à K-support global.

On sait que la notion d'objet à support global intervient dans la théorie de la cohomologie associée à une catégorie exacte [1]. Dans le cadre du théorème de Dold-Kan pour les groupes abéliens *n*-catégoriques, on a besoin d'une notion analogue pour distinguer les *n*-catégories provenant d'une extension des *n* -catégories provenant d'un complexe quelconque de longueur *n* .

Définition 4. Un objet X de **V** est dit à K-*support global* lorsque $\eta X : X \to GKY$ est un épimorphisme effectif (évidemment K-inversible), c'est-à-dire le quotient de la relation d'équivalence (évidemment K-discrète) associée à ηX que l'on notera de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} X \times_K X \arrow[r, shift left=3, "x_1"] \arrow[r, shift right=3, "x_2"'] & X \arrow[l, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

Notons K-sg(**V**) la sous-catégorie pleine de **V** dont les objets sont à K-support global.

Proposition 4. *Soit $f : X \to X'$ un morphisme de* $\mathbf{V}$ *:*

1. Si f est K-cartésien et X' à K-support global, alors X est à K-support global.

2. Si f est un épimorphisme effectif K-inversible, alors X' est à K-support global ssi X est à K-support global.

Preuve. 1. C'est immédiat car les épimorphismes effectifs K-inversibles sont stables par produits fibrés.

2. On se plonge, par le foncteur Θ_K dans la fibre $(K/\mathbf{V})_{KX}$ qui est exacte et donc dans laquelle, si f est un épimorphisme effectif, on a $g \circ f$ épimorphisme effectif ssi g l'est. ◊

Corollaire. *La catégorie* K-sg($\mathbf{V}$) *est stable dans* $\mathbf{V}$ *pour les produits fibrés le long des morphismes K-cartésiens et le long des épimorphismes effectifs K-inversibles.*

Proposition 5. *Le produit dans* $\mathbf{V}$ *de deux objets X et X' à K-support global est à K-support global.*

Preuve. Le morphisme $\eta_{X \times X'}$ est isomorphe à $\eta_X \times \eta_{X'}$. De plus dans la fibre $(K/\mathbf{V})_{KX \times KX'}$, on a

$$\Theta_K (X \times X') = p^*_{KX}(\Theta_K X) \times p^*_{KX'}(\Theta_K X')$$

où p_{KX} et $p_{KX'}$ sont les projections de $KX \times KX'$ vers KX et KX'. Cette fibre étant exacte, le produit de deux épimorphismes effectifs est un épimorphisme effectif et par conséquent $\eta_{X \times X'}$ en est un. ◊

4. Le principal exemple. Les catégories internes à une catégorie E exacte au sens de Barr :

Soit E une catégorie exacte à gauche, alors Cat(E), la catégorie des catégories internes à E est exacte à gauche et le foncteur $(\ )_0$: Cat(E) → E qui associe à toute catégorie interne $\underline{C}$:

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i" description] & C_1 \arrow[l, shift right=2, "d_1"'] \arrow[l, shift left=2, "d_2"] & C_2 = C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[l, shift right=2, "p_1"'] \arrow[l, "m" description] \arrow[l, shift left=2, "p_2"] \end{tikzcd}$$

l'objet C_0, est exact à gauche.

De plus ce foncteur admet un adjoint à droite, pleinement fidèle, Gr, défini par

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}\, X = X \arrow[r, "\Delta" description] & X \times X \arrow[l, shift right=2, "p_1"'] \arrow[l, shift left=2, "p_2"] & X \times X \times X \arrow[l, shift right=2] \arrow[l] \arrow[l, shift left=2] \end{tikzcd}$$

Si de plus E est exacte au sens de Barr [1] (i.e., toute relation d'équivalence admet un quotient universel), on obtient le résultat suivant :

Proposition 6. *Si* E *est exacte au sens de Barr,* Cat(E) *est* $(\ )_0$*-exacte.*

Preuve. Soit $\underline{C}$ une catégorie interne à E et

$$\begin{tikzcd}
\underline{R} \arrow[r, shift left=2, "\pi_1"] \arrow[r, shift right=2, "\pi_2"'] & \underline{C} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

une relation d'équivalence $(\ )_0$-discrète sur $\underline{C}$. On peut toujours se ramener au cas

$$R_0 = C_0, \quad (\pi_1)_0 = (\pi_2)_0 = 1_{C_0}$$

On obtient alors le diagramme suivant dans E :

$$\begin{tikzcd}
R_2 \arrow[r, shift left=2, "(\pi_1)_2"] \arrow[r, shift right=2, "(\pi_2)_2"'] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & C_2 \arrow[l] \arrow[r, dashed] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & Q_2 \arrow[d, dashed, shift left=2] \arrow[d, dashed] \arrow[d, dashed, shift right=2] \\
R_1 \arrow[r, shift left=2, "(\pi_1)_1"] \arrow[r, shift right=2, "(\pi_2)_1"'] \arrow[dr, shift left, "\delta_1"] \arrow[dr, shift right, "\delta_2"'] & C_1 \arrow[l] \arrow[r, dashed] \arrow[d, shift right, "d_1"'] \arrow[d, shift left, "d_2"] & Q_1 \arrow[dl, dashed, shift right, "k_1"'] \arrow[dl, dashed, shift left, "k_2"] \\
& C_0 &
\end{tikzcd}$$

où Q_1 est le quotient de la relation R_1 sur C_1. La catégorie E étant exacte, la catégorie E/C_0 est exacte. Dans une catégorie exacte les quotients de relations d'équivalence sont compatibles avec les produits. Or C_2 et R_2 sont des produits dans E/C_0, par conséquent le quotient Q_2 de R_2 sur C_2 va être le produit de k_1 et k_2 dans E/C_0, soit le produit fibré de k_1 et k_2 dans E. D'où une structure de catégorie $\underline{Q}$ (grâce à la factorisation de la composition m à travers Q_2) qui va être clairement le quotient de $\underline{R}$ dans Cat(E). Ce quotient est universel par construction.◊

Remarque. Dans le cas de la catégorie Cat des catégories associées à Ens, la décomposition associée à cette adjonction est la décomposition classique d'un foncteur en composé d'un foncteur bijectif sur les objets et d'un foncteur pleinement fidèle (voir par exemple [3]).

Une catégorie **C** est à $(\ )_0$-support global ssi pour tout couple d'objets C et C' de **C**, l'ensemble **C**(C, C') est non vide.

Dans le cas de Cat(E), dire qu'un foncteur est $(\ )_0$-cartésien signifie que le diagramme suivant est un produit fibré

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
GrB_0 \arrow[r, "Gf"] & GrC_0
\end{tikzcd}$$

ce qui est vrai ssi c'est le cas au niveau 0 (qui est trivial) et au niveau 1

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & C_1 \arrow[d] \\
B_0 \times B_0 \arrow[r, "f_0 \times f_0"] & C_0 \times C_0
\end{tikzcd}$$

on retrouve bien ainsi la définition interne de foncteur pleinement fidèle. On dira qu'un foncteur $(\ )_0$-inversible est grossièrement inversible [3]. Si, de plus, E est exacte, une catégorie $\underline{C}$, interne à E, est à $(\ )_0$-support global ssi

$$C_1 \xrightarrow{[d_1,\ d_2]} C_0 \times C_0$$

est un épimorphisme effectif.

5. Les relations d'équivalence K-cartésiennes et la notion de champ.

En fait, on a beaucoup plus que cela. Si E est exacte, le foncteur $(\ )_0$ est un champ. Ce paragraphe a pour but de le prouver.

Le diagramme suivant est dit exact lorsque R' est la relation d'équivalence associée à p' et p' le quotient de R'.

$$\begin{tikzcd}
R' \times_{X'} R' \arrow[r, shift left=2, "\pi'_{12}"] \arrow[r, "\pi'_{13}"] \arrow[r, shift right=2, "\pi'_{23}"'] & R' \arrow[r, shift left=2, "\pi'_1"] \arrow[r, shift right=2, "\pi'_2"'] & X' \arrow[l, "\delta'"'] \arrow[r, "p'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

Supposons maintenant que $F : \mathbf{D} \to \mathbf{D'}$ est une fibration quelconque.

Définition. 5. On dira qu'une relation d'équivalence $\underline{R} = (X, R, \pi_1, \pi_2)$ sur X dans **D** est *F-cartésienne* lorsque son image par F est une relation d'équivalence dans **D'** et le morphisme π_1 est F-cartésien, cette seconde condition étant alors clairement équivalente au fait que toute flèche structurale de cette relation est F-cartésienne.

Rappelons que, si $\underline{R'} = (X', R', \pi'_1, \pi'_2)$ est une relation d'équivalence dans **D'**, une donnée de descente ([9] ; voir aussi [7] et [3] Appendice) relative à R' est la donnée d'un couple (X, τ) tel que

$$F(X) = X' \qquad \text{et} \qquad \tau : \pi'^*_1(X) \to \pi'^*_2(X)$$

vérifiant

$$\delta'^*(\tau) = 1_X \qquad \text{et} \qquad \pi'^*_{23}(\tau).\pi'^*_{12}(\tau) = \pi'^*_{13}(\tau).$$

La notion de morphismes de données de descente est naturelle ; on notera $F^{\underline{R}'}$ la catégorie des données de descente relatives à $\underline{R}'$.

Lemme 1. *Une donnée de descente relative à $\underline{R}'$ est exactement la donnée d'une relation d'équivalence F-cartésienne au-dessus de $\underline{R}'$.*

Preuve. A la donnée de descente (X, τ), on associe la relation d'équivalence suivante :

$$\begin{tikzcd}
\pi'^*_{2\,3}(\pi_1'^*(X)) \arrow[r, shift left=4, "\tilde{\pi}'_{1\,2}\,.\,\pi'^*_{2\,3}[\tau]"] \arrow[r, shift left=1, "\tilde{\pi}'_{1\,3}"] \arrow[r, shift right=1, "\tilde{\pi}'_{2\,3}"'] & \pi_1'^*(X) \arrow[r, shift left=3, "\tilde{\pi}_1'"] \arrow[r, shift right=1, "\tilde{\pi}_2'.\tau"'] & X \arrow[l, shift left=1, "\tilde{\delta}"']
\end{tikzcd}$$

où $\tilde{f}$ est un morphisme F-cartésien au-dessus de f.
Réciproquement, si

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, shift left=3, "\pi_1"] \arrow[r, shift right=3, "\pi_2"'] & X \arrow[l, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

est une relation F-cartésienne de **D** au-dessus de $\underline{R}'$, alors π_2 se factorise au moyen d'un isomorphisme τ à travers $\tilde{\pi}_2'$ et ce couple (X, τ) est une donnée de descente relative à $\underline{R}'$. Il est clair qu'un morphisme de donnée de descente détermine une application commutant avec les relations d'équivalence. ◊

Lorsque **D'** est exacte, on dit que F est un champ pour la topologie des épimorphismes effectifs [1] (ou plus brièvement un champ) si, pour tout épimorphisme effectif $p' : X' \to Y'$ de **D'**, le foncteur canonique $P' : FY' \to F\underline{R}'$ (où $\underline{R}'$ est la relation d'équivalence associée à p') et où FY' est la fibre au-dessus de Y') est une équivalence de catégories.

Lemme 2. *La fibration* F *est un champ ssi :*

1. tout diagramme F *-cartésien au-dessus d'un diagramme exact est exact ;*

2. toute relation d'équivalence F *-cartésienne peut se prolonger en un diagramme cartésien au-dessus du diagramme exact associé à son image par* F *.*

Preuve. Idée de la preuve : on peut montrer grâce au Lemme 1 que :

1 est équivalent à dire que $\underline{P}'$ est pleinement fidèle,
2 est équivalent à dire que $\underline{P}'$ est essentiellement surjectif.

La preuve est uniquement du "diagram chasing". ◊

Considérons la situation suivante, où chacune des lignes est exacte

$$\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "h'"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & K' \arrow[d, "g'"] \\
R' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & X' \arrow[r] & Q'
\end{tikzcd}$$

Notons $\underline{S}'$ la relation d'équivalence associée à la première ligne et $\underline{R}'$ la relation associée à la seconde. Soit $\underline{R}$ une relation d'équivalence F-cartésienne au-dessus de $\underline{R}'$, alors h' et f' détermine une relation d'équivalence $\underline{S}$, F-cartésienne au-dessus de $\underline{S}'$.

Supposons F être un champ. Notons Q le quotient F-cartésien de $\underline{R}$ au-dessus de Q' et K le quotient F-cartésien de $\underline{S}$ au-dessus de K'.

Lemme 3. *Si* F *est un champ, l'unique factorisation* $g : K \to Q$ *au-dessus de* g' *est* F *-cartésienne.*

Preuve. Notons $\bar{K} = g'^{*}(Q)$. Alors le diagramme F-cartésien déterminé par K au-dessus de la première ligne est exact. Sa partie "relation d'équivalence" étant isomorphe à $\underline{S}$, $\bar{K}$ est isomorphe à K et g est F-cartésien. ◊

Considérons la situation de base suivante :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "j"'] & D^2 \arrow[l, bend right, "b"'] \end{tikzcd}$$

où D^2 est la catégorie dont les objets sont les flèches de D et les morphismes les carrés commutatifs de **D**. Le foncteur b associe à chaque flèche son but et j associe à tout point X de **D** le morphisme 1_X. On sait que si **D** est exacte à gauche, b est la fibration "canonique" associée à **D**. Un morphisme b-cartésien est alors un produit fibré de **D**. La fibre en I est notée généralement D/I. Une relation d'équivalence b-cartésienne est un morphisme $\underline{R}' \to \underline{R}''$ qui, considéré en tant que foncteur, est une fibration discrète. Si **D** est exacte, b est un champ ([7]. ou voir [1] page 73 et Lemme 2). Le Lemme 3 appliqué à cette fibration donne le résultat suivant :

Lemme 4. *Si* E *est exacte, le foncteur quotient* Q *:* Rel(E) $\to$ E *préserve les produits fibrés dont un des bords est une fibration discrète.*

Proposition 7. *Si* E *est exacte, le foncteur* $(\ )_0$: Cat(E)$\to$ E *est un champ.*

Preuve. 1. Soit

$$\begin{tikzcd} \underline{R} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \underline{C} \arrow[r, two heads] & \underline{Q} \end{tikzcd}$$

un diagramme $(\ )_0$-cartésien tel que le diagramme suivant soit exact :

$$\begin{tikzcd} R_0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & C_0 \arrow[r, two heads] & Q_0 \end{tikzcd}$$

Alors dans le diagramme suivant la ligne supérieure est exacte puisque la ligne inférieure l'est et que tous les carrés sont des produits fibrés (toutes les flèches étant pleinement fidèles)

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & C_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d] & Q_1 \arrow[d] \\ R_0 x R_0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & C_0 x C_0 \arrow[r, two heads] & Q_0 x Q_0 \end{tikzcd}$$

et $\underline{Q}$ est bien le quotient de la relation $\underline{R} \rightrightarrows \underline{C}$.

2. Soit maintenant

$$\begin{tikzcd} \underline{R} \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & \underline{C} \end{tikzcd}$$

une relation d'équivalence $(\ )_0$-cartésienne. Considérons le diagramme suivant dont les lignes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
R_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, bend right, "r_1"'] \arrow[d, bend left, "r_2"] & C_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, bend right, "d_1"'] \arrow[d, bend left, "d_2"] & Q_1 \arrow[d, bend right, "q_1"'] \arrow[d, bend left, "q_2"] \\
R_0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & C_0 \arrow[r, two heads] & Q_0
\end{tikzcd}$$

On notera $\underline{R}_i$ la relation d'équivalence associée à la ligne *i*.

Les foncteurs π_1 et π_2 étant pleinement fidèles, on a une fibration discrète $\underline{R}_1 \longrightarrow \underline{R}_0 \times \underline{R}_0$ et donc le diagramme suivant est un produit fibré

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & Q_1 \arrow[d] \\
C_0 \times C_0 \arrow[r] & Q_0 \times Q_0
\end{tikzcd}$$

Considérons maintenant les produits fibrés suivants dans la catégorie Rel(E) des relations d'équivalence de E :

$$\begin{tikzcd}
\underline{R}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \underline{R}_1 \times \underline{R}_0 \arrow[r, "\underline{p}_1"'] \arrow[d, "\underline{r}_2 \times \underline{R}_0"] & \underline{R}_1 \arrow[d, "\underline{r}_2"] \\
\underline{R}_1 \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\underline{r}_1"'] & \underline{R}_0 \times \underline{R}_0 \arrow[r, "\underline{p}_1"'] & \underline{R}_0
\end{tikzcd}$$

Son image par le foncteur quotient Q est la suivante, où Q_2 est le quotient de $\underline{R}_2$: $R_2 \rightrightarrows C_2$:

$$\begin{tikzcd}
Q_2 \arrow[r] \arrow[d] & Q_1 \times Q_0 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "q_2 \times Q_0"] & Q_1 \arrow[d, "q_2"] \\
Q_1 \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "q_1"] & Q_0 \times Q_0 \arrow[r, "p_1"] & Q_0
\end{tikzcd}$$

Ces deux carrés sont des produits fibrés, celui de gauche l'étant car $\underline{R}_1 \to \underline{R}_0 \times \underline{R}_0$ est une fibration discrète. Il y a donc une structure de catégorie naturelle $\underline{Q}$ au-dessus de Q_0, telle que $\underline{C} \to \underline{Q}$ soit pleinement fidèle ((*) est un produit fibré). ◊

6. La construction de base.

On se place dans la situation de base.

Définition 6. On appelle K-discrète une catégorie interne $\underline{C}$ à **V**, telle que K(*i*) soit un isomorphisme. On note $\mathrm{Cat}_K(\mathbf{V})$ la sous-catégorie pleine de Cat(**V**) dont les objets sont les catégories internes K-discrètes.

On a donc un foncteur $K_1 : \mathrm{Cat}_K(\mathbf{V}) \to \mathbf{V}$ qui associe C_0 à $\underline{C}$. De plus on peut construire un foncteur $G_1 : \mathbf{V} \to \mathrm{Cat}_K(\mathbf{V})$ qui associe à tout objet X de **V** la catégorie interne soulignée suivante :

$$\begin{tikzcd}
G_1X : G.K(X) & X \arrow[l, "\eta X"'] \arrow[r, "\Delta" description] \arrow[rr, dash, bend right] & X\times_K X \arrow[l, shift right=2, "p_0"'] \arrow[l, shift left=2, "p_1"] & X\times_K X\times_K X \arrow[l, shift right=2] \arrow[l] \arrow[l, shift left=2]
\end{tikzcd}$$

où le diagramme total ci-dessus est exact, c'est-à-dire où $X\times_K X$ désigne le produit fibré de ηX par lui-même.

***Proposition 8.** La catégorie* $G_1 X$ *est* K *-discrète.*

Preuve. K est exact à gauche. Par suite le diagramme suivant est exact

$$\begin{tikzcd}
K.G.K(X) & KX \arrow[l, "K(\eta X)"'] & K(X\times_K X) \arrow[l, shift right=3, "K(p_0)"'] \arrow[l, "K(\Delta)" description] \arrow[l, shift left=3, "K(p_1)"]
\end{tikzcd}$$

La flèche $K(\eta X)$ étant un isomorphisme, $K(\Delta)$ est un isomorphisme et G_1X est K-discrète. ◊

***Proposition 9.** Le foncteur* K_1 *est un adjoint à gauche, inverse à gauche exact à gauche de* G_1 *.*

Preuve. Il est clair, K étant exact à gauche, que $\mathrm{Cat}_K(\mathbf{V})$ est exacte à gauche puisqu'elle a les mêmes limites à gauche finies que Cat(**V**). Par conséquent, le foncteur K_1 est exact à gauche. De plus, on vérifie que $K_1.G_1 = \mathrm{Id}\mathbf{V}$. Considérons enfin le diagramme suivant dans **V** :

$$\begin{tikzcd}
 & & C_1 \arrow[dll, shift right=2, "d_0"'] \arrow[dll, shift left=2, "d_1"] \arrow[d, dashed, "\eta_1 \underline{C}_1"] & C_2 \arrow[l, shift right=3, "m"'] \arrow[l] \arrow[l, shift left=3] \arrow[d, dashed, "\eta_1 \underline{C}_2"] \\
G.K(C_0) & C_0 \arrow[l, "\eta C_0"'] \arrow[ur, "i" description] \arrow[dr] & & \\
 & & C_0\times_K C_0 \arrow[ul, shift right=3] \arrow[ul, shift left=3] & C_0\times_K C_0\times_K C_0 \arrow[l, shift right=3] \arrow[l] \arrow[l, shift left=3]
\end{tikzcd}$$

où $\underline{C}$ est K-discrète. Alors

$$\eta C_0 . d_0 = \eta C_0 . d_1$$

puisqu'en effet

$$\eta C_0 . d_0 = K(d_0).\eta C_1 \quad \text{et} \quad \eta C_0 . d_1 = K(d_1).\eta C_1$$

et que $K(d_0) = K(d_1)$ est l'inverse de $K(i)$. D'où une factorisation

$$\eta_1 \underline{C}_1 : C_1 \to C_0 \times_K C_0 \quad \text{et} \quad \eta_1 \underline{C}_2 : C_2 \to C_0 \times_K C_0 \times_K C_0$$

Il s'agit clairement d'un foncteur interne $\eta_1 : \underline{C} \to G_1 C_0$, dont la donnée est naturelle en $\underline{C}$. De plus

$$(\eta_1 \underline{C})_0 = \mathrm{Id}\, C_0 \quad \text{et} \quad \eta_1 G_1 X = \mathrm{Id}\, G_1 X.$$

D'où le résultat. ◊

On se retrouve par conséquent dans la situation de base avec les foncteur suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, shift right, "G_1"'] & \mathrm{Cat}_K(\mathbf{V}) \arrow[l, shift right, "K_1"'] \end{tikzcd}$$

et l'on peut itérer cette construction.

On notera n-Cat$_K$(**V**) la n-ième catégorie obtenue à partir de cette construction et K_n et G_n les foncteurs suivants

$$\begin{tikzcd} (n\text{-}1)\text{-}\mathrm{Cat}_K(\mathbf{V}) \arrow[r, shift right] & n\text{-}\mathrm{Cat}_K(\mathbf{V}). \arrow[l, shift right] \end{tikzcd}$$

7. Les n-catégories internes. Les ∞-catégories internes.

En partant de la situation initiale ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, shift left] & \mathrm{Ens} \arrow[l, shift left, "T"] \end{tikzcd}$$

où T désigne un objet final de Ens, on notera n-Cat la n-ième catégorie obtenue. Il est clair que 1-Cat est équivalente à Cat et 2-Cat à la catégorie usuelle des 2-catégories ; on montrera dans la partie II que cette notation est bien justifiée et que n-Cat est bien équivalente à la catégorie usuelle des n-catégories.

On obtient ainsi une tour de fibrations :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ens} & \mathrm{Cat} \arrow[l, "(\ )_0"'] & 2\text{-}\mathrm{Cat} \arrow[l, "(\ )_1"'] & \dots & (n\text{-}1)\text{-}\mathrm{Cat} & n\text{-}\mathrm{Cat} \arrow[l, "(\ )_{n-1}"'] & \dots \end{tikzcd}$$

Définition 7. On note ∞-Cat la limite projective de ce diagramme et on appelle *∞-catégories* et *∞-foncteurs* respectivement les objets et les morphismes de cette catégorie.

Si E est une catégorie exacte à gauche, en partant de la situation initiale suivante :

$$\begin{tikzcd}1 \arrow[r, shift right, "\ulcorner 1 \urcorner"'] & E \arrow[l, shift right]\end{tikzcd}$$

où 1 désigne un objet final de E, on notera n-Cat(E) la n-ième catégorie obtenue. Il est clair que 1-Cat(E) est exactement Cat(E).

Définition 8. On appelle *n-catégorie interne* à E un objet de n-Cat(E).

On démontre dans [2] que lorsque E = Ab, la catégorie n-Cat(Ab) des n-catégories internes à Ab est équivalente à la catégorie $C_{\bullet}^{n}$(Ab) des complexes de chaînes abéliens de longueur n .

On obtient ainsi une tour de fibrations :

$$\begin{tikzcd}E & \mathrm{Cat}(E) \arrow[l, "(\ )_0"'] & 2\text{-}\mathrm{Cat}(E) \arrow[l, "(\ )_1"'] & \dots & n\text{-}1\text{-}\mathrm{Cat}(E) & n\text{-}\mathrm{Cat}(E) \arrow[l, "(\ )_{n-1}"'] & \dots\end{tikzcd}$$

Définition 9. On note ∞-Cat(E) la limite projective de ce diagramme et on appelle *∞-catégorie interne* à E et *∞-foncteur interne* à E, respectivement, les objets et les morphismes de cette catégorie.

On démontre dans [2] que la catégorie ∞-Cat(Ab) des groupes abéliens ∞-catégoriques est équivalente à la catégorie $C_{\bullet}$(Ab) des complexes de chaînes abéliens.

8. Naturalité de la construction de base.

On ne peut utiliser cette construction sans connaître son effet sur les morphismes. Considérons donc la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}V' \arrow[r, shift right, "G"'] \arrow[d, "F'"'] & V \arrow[l, shift right, "K"'] \arrow[d, "F"] \\ \bar{V}' \arrow[r, shift right, "\bar{G}"'] & \bar{V} \arrow[l, shift right, "\bar{K}"']\end{tikzcd}$$

où chaque ligne vérifie les conditions de la situation de base, où F est exact à gauche, où $\bar{K}.F = F'.K$ et où enfin la transformation naturelle entre F.G et $\bar{G}.F'$ déterminée par l'égalité précédente et les adjonctions horizontales est un isomorphisme.

Etant donné les circonstances particulières (les adjoints étant des inverses), cette transformation naturelle γ est $\bar{\eta}_{F.G}$.

Lemme 5. *Pour tout objet* X *de* **V**, *le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
F.G.K(X) \arrow[dd, "\gamma\, K(X)"'] & \\
 & F(X) \arrow[ul, "F(\eta\, X)"'] \arrow[dl, "\bar{\eta}\, F(X)"] \\
\bar{G}.\bar{K}.F(X) &
\end{tikzcd}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\gamma\, K(X).F(\eta\, X) &= \bar{\eta}F.G.K(X)\ .\ F(\eta X) = \bar{G}.\bar{K}.F(\eta X).\bar{\eta}F(X)\\ &= \bar{G}.F'.K(\eta\, X).\, \bar{\eta}F(X) = \bar{\eta}\ F(X)\end{aligned}$$

car $K(\eta\, X) = \mathrm{Id}\ K(X)$. ◊

Proposition 10. *Le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[d, "F"'] & \mathrm{Cat}_K(\mathbf{V}) \arrow[l, "K_1"'] \arrow[d, "\mathrm{Cat}_{F'}(F)"] \\
\bar{\mathbf{V}} & \mathrm{Cat}_{\bar{K}}(\bar{\mathbf{V}}) \arrow[l, "\bar{K}_1"']
\end{tikzcd}$$

et la transformation naturelle entre $\mathrm{Cat}_{F'}(F).\ G_1$ *et* $G_1.F$ *déterminée par cette commutation et les adjonctions horizontales est un isomorphisme.*

Preuve. Soit $\underline{C}$ une catégorie interne à **V**, K-discrète, alors $F(\underline{C})$ est K-discrète. En effet $\bar{K}(F(i)) = F'(K(i))$ est un isomorphisme puisque $K(i)$ en est un. Ainsi le diagramme précédent commute. Il reste à vérifier que $\bar{\eta}_1.\mathrm{Cat}_{F'}(F).G_1$ est un isomorphisme. Pour cela considérons le diagramme suivant pour tout objet X de **V**

$$\begin{tikzcd}
F.G.K(X) \arrow[d, "\gamma K(X)"', "\wr"] & F(X) \arrow[l, "F(\eta X)"'] \arrow[r, "F(\Delta)"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & F(X\ x_K\ X) \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2] \arrow[d, dash, "\bar{\eta}_1(F(G_1X))_1"] & \cdots \arrow[l, shift right=2] \arrow[l] \arrow[l, shift left=2] \\
\bar{G}.\bar{K}.F(X) & F(X) \arrow[l, "\bar{\eta}F(X)"] \arrow[r, "\Delta"] & F(X)\ x_{\bar{K}}F(X) \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2] & \cdots \arrow[l, shift right=2] \arrow[l] \arrow[l, shift left=2]
\end{tikzcd}$$

Le foncteur F étant exact, les deux lignes sont exactes. De plus $\gamma K(X)$ est un isomorphisme, par conséquent $\bar{\eta}_1(F(G_1X))_1$ est un isomorphisme. D'où le résultat. ◊

Lemme 6. *Si de plus* F *est pleinement fidèle,* $\mathrm{Cat}_{F'}(F)$ *est pleinement fidèle.*

Preuve. Cat(F) est pleinement fidèle, puisque F l'est. Il en est donc ainsi de $\mathrm{Cat}_{F'}(F)$. On remarquera au passage qu'alors F' est nécessairement pleinement fidèle. ◊

Proposition 11. *Si* F *est une équivalence de catégories, alors* $\mathrm{Cat}_{F'}(F)$ *est une équivalence de catégories.*

Preuve. Soit T l'équivalence inverse de F. Alors Cat(T) est l'équivalence inverse de Cat(F) : $\mathrm{Cat}(\mathbf{V}) \to \mathrm{Cat}(\bar{\mathbf{V}})$. Or la restriction de Cat(T) à $\mathrm{Cat}_{\bar{K}}(\bar{\mathbf{V}})$ est à valeurs dans $\mathrm{Cat}_K(\mathbf{V})$. En effet, soit $\underline{C}$ une catégorie interne à $\bar{\mathbf{V}}$, $\bar{K}$-discrète. Alors $K(i)$ est un isomorphisme. Il reste à vérifier que $T(\underline{C})$ est K-discrète, soit que $K.T(i)$ est un isomorphisme. Le foncteur F étant pleinement fidèle, F' l'est aussi et il suffit que $F'.K.T(i)$ soit un isomorphisme. Or ce dernier morphisme vaut $\bar{K}.F.T(i)$. Or i et $F.T(i)$ sont liés par des isomorphismes, il en est de même de $\bar{K}(i)$ et $\bar{K}.F.T(i)$. Le premier étant un isomorphisme, le second l'est aussi. ◊

9. Stabilité pour la construction de base de la K-exactitude.

Proposition 12. *Si* **V** *est* K*-exacte, alors* $\mathrm{Cat}_K(\mathbf{V})$ *est* K_1*-exacte.*

Preuve. $\mathrm{Cat}_K(\mathbf{V})$ est stable dans $\mathrm{Cat}(\mathbf{V})$ pour les limites à gauche finies car K est exact à gauche. Soit $\underline{R} \rightrightarrows \underline{C}$ une relation d'équivalence K_1-discrète dans $\mathrm{Cat}_K(\mathbf{V})$. On peut toujours se ramener aux conditions de la preuve de la Proposition 6 et considérer le même diagramme. Or $\underline{R}$ et $\underline{C}$ étant K-discrètes, la relation R_1 sur C_1 est K-discrète et admet donc un quotient Q_1. En fait, l'image par Θ_K de ce diagramme tout entier se trouve dans la catégorie exacte $(K\backslash\mathbf{V})_{KX}$. On est donc de nouveau dans les conditions précises de la Proposition 6. La catégorie $\underline{Q}$ est le quotient de $\underline{R}$; elle appartient à $\mathrm{Cat}_K(\mathbf{V})$, car elle est dans $(K\backslash\mathbf{V})_{KX}$ et est clairement universelle. ◊

II. LES *n*-CATÉGORIES DANS LE CAS ENSEMBLISTE

On montre dans cette partie que la définition précédente des *n*-catégories correspond dans le cas ensembliste à la définition usuelle. On utilisera ici la notation $\underline{n}$-catégorie pour distinguer cette dernière. En effet, la définition la plus courante des $\underline{n}$-catégories se fait par récurrence à partir de la catégorie Cat des catégories qui est exacte à gauche et cartésienne fermée. On considère alors les catégories cartésiennement enrichies dans Cat, que l'on nomme $\underline{2}$-catégories et dont le premier exemple est bien sûr Cat elle-même. Les $\underline{2}$-catégories forment à nouveau une catégorie notée $\underline{2}$-Cat qui, par les théorèmes généraux sur les catégories enrichies, se trouve être encore exacte à gauche et cartésienne fermée. D'où par itération du procédé, la définition d'une n-catégorie comme catégorie enrichie dans la catégorie $\underline{(n\text{-}1)}$-Cat des $\underline{(n\text{-}1)}$-catégories.

1. Comparaison entre les catégories enrichies et les catégories internes.

Soit **V** une catégorie exacte à gauche et cartésienne fermée. Notons **V**-Cat la catégorie des catégories cartésiennement enrichies dans **V** (on dit **V**-catégories) et dont la classe des objets est un ensemble. Cette catégorie est exacte à gauche et cartésienne fermée. De plus on a un foncteur exact à gauche ob : **V**-Cat → Ens qui associe à **A** l'ensemble ob(**A**) de ses objets.

D'autre part on a considéré la catégorie Cat(**V**) des catégories internes à **V** (I, 4). La catégorie Cat(**V**) est aussi exacte à gauche et détermine trois foncteurs exacts à gauche

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cat}(\mathbf{V}) \arrow[r, shift left=2, "(\ )_2"] \arrow[r, "(\ )_1"] \arrow[r, shift right=2, "(\ )_0"'] & \mathbf{V}
\end{tikzcd}$$

qui associent à $\underline{C}$ les objets C_0, C_1, C_2 dans **V**. Il y a aussi des transformations naturelles évidentes entre ces trois foncteurs.

Ces trois foncteurs respectent en particulier les produits et déterminent donc trois nouveaux foncteurs :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cat}(\mathbf{V})\text{-}\mathrm{Cat} \arrow[r, shift left=2, "(\ )_2\text{-}\mathrm{Cat}"] \arrow[r, "(\ )_1\text{-}\mathrm{Cat}"] \arrow[r, shift right=2, "(\ )_0\text{-}\mathrm{Cat}"'] & \mathbf{V}\text{-}\mathrm{Cat}
\end{tikzcd}$$

En effet, soit **A** une Cat(**V**)-catégorie ; alors pour tout couple d'objets X, X' de **A**, l'objet **A**(X, X') est une catégorie interne à **V** :

$$\begin{tikzcd}
(1) \quad \mathbf{A}(X, X')_0 \arrow[r, "i_{X,X'}" description] & \mathbf{A}(X, X')_1 \arrow[l, shift right=3, "d_{1X,X'}"'] \arrow[l, shift left=3, "d_{2X,X'}"] & \mathbf{A}(X, X')_2 \arrow[l, shift right=3, "p_{1X,X'}"'] \arrow[l, "m_{X,X'}" description] \arrow[l, shift left=3, "p_{2X,X'}"]
\end{tikzcd}$$

Alors $(\ )_i$-Cat(**A**) est la **V**-catégorie notée $\mathbf{A}_i$, ayant le même ensemble d'objets que **A** et telle que $\mathbf{A}_i(X, X') = \mathbf{A}(X, X')_i$. D'où le diagramme interne à **V**-Cat :

$$\begin{tikzcd}
(2) \qquad \underline{A} : \mathbf{A}_0 \arrow[r, "i" description] & \mathbf{A}_1 \arrow[l, shift right=3, "d_1"'] \arrow[l, shift left=3, "d_2"] & \mathbf{A}_2 \arrow[l, shift right=3, "p_1"'] \arrow[l, "m" description] \arrow[l, shift left=3, "p_2"]
\end{tikzcd}$$

Or toutes ces **V**-catégories ont les mêmes objets et tous ces **V**-foncteurs les respectent. Par conséquent, le diagramme (1) étant un produit fibré dans **V**, le diagramme (2) est un produit fibré dans **V**-Cat et détermine donc une catégorie interne à **V**-Cat.

Cette observation s'étend naturellement aux Cat(**V**)-foncteurs. En effet si F est un tel foncteur entre deux Cat(**V**)-catégories **A** et **B**, ses composantes $(F_{X,X'})_0$, $(F_{X,X'})_1$, $(F_{X,X'})_2$ déterminent des **V**-foncteurs

$$F_0 : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0, \qquad F_1 : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}_1 \quad \text{et} \quad F_2 : \mathbf{A}_2 \to \mathbf{B}_2$$

qui définissent un foncteur interne $\underline{F}$ entre $\underline{\mathbf{A}}$ et $\underline{\mathbf{B}}$. On vient ainsi de construire un foncteur $k_{\mathbf{V}}$:

$$\mathrm{Cat}(\mathbf{V})\text{-}\mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Cat}(\mathbf{V}\text{-}\mathrm{Cat}) : \quad \mathbf{A} \longmapsto \underline{\mathbf{A}} .$$

Ce foncteur est pleinement fidèle et injectif sur les objets. On peut même identifier Cat(**V**)-Cat à la sous-catégorie pleine de Cat(**V**-Cat) des catégories internes $\underline{\mathbf{A}}$ à **V**-Cat :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_0 \arrow[r, "i"] & \mathbf{A}_1 \arrow[l, shift right=3] \arrow[l, shift left=3] & \mathbf{A}_2 \arrow[l] \arrow[l, shift right=3] \arrow[l, shift left=3]
\end{tikzcd}$$

telles que $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{A}_1$ ont les mêmes objets, respectés par le **V**-foncteur *i*. Autrement dit, des catégories internes $\underline{\mathbf{A}}$ telles que ob(i) soit une fonction identité.

La construction précédente précise même, de façon évidente, que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cat}(\mathbf{V})\text{-}\mathrm{Cat} \arrow[rr, "k_{\mathbf{V}}"] \arrow[dr, shift right=3, "(\ )_0\text{-}\mathrm{Cat}"'] \arrow[dr, "(\ )_1\text{-}\mathrm{Cat}"] \arrow[dr, shift left=3, "(\ )_2\text{-}\mathrm{Cat}"] & & \mathrm{Cat}(\mathbf{V}\text{-}\mathrm{Cat}) \arrow[dl, shift right=3, "(\ )_2"'] \arrow[dl, "(\ )_1"] \arrow[dl, shift left=3, "(\ )_0"] \\
& \mathbf{V}\text{-}\mathrm{Cat} &
\end{tikzcd}$$

Remarque. Considérons la sous-catégorie pleine $\mathrm{Cat}_{\mathrm{ob}}$(**V**-Cat) de Cat(**V**-Cat) dont les objets sont tels que ob(i) soit une bijection. Alors ob(d_0) = ob(d_1) est l'inverse de ob(i) et

$$\mathrm{ob}\,(m) = \mathrm{ob}\,(p_1) = \mathrm{ob}\,(p_2)$$

est une bijection.

Proposition 13. Cat(**V**)-Cat *est équivalente à* $\mathrm{Cat}_{\mathrm{ob}}$(**V**-Cat).

Preuve. Soit

$$\begin{tikzcd} \underline{A} : A_0 & A_1 \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2] & A_2 \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, "m"'] \arrow[l, shift left=2] \arrow[from=1-1, to=1-2, "i"] \end{tikzcd}$$

une catégorie interne à **V**-Cat, telle que ob(i) soit une bijection. On construit alors une Cat(**V**)-catégorie X qui a pour objets les objets de A_0 et telle que **X**(X, X') vaut

$$\begin{tikzcd} A_0(X, X') \arrow[r, "i_{X,X'}"] & A_1(iX, iX') \arrow[l, shift right=3, "d_{1iX,iX'}"'] \arrow[l, shift left=3, "d_{2iX,iX'}"] & A_2(m^{-1}(iX), m^{-1}(iX')) \arrow[l, shift right=3] \arrow[l, "m_{(m^{-1}iX, m^{-1}iX')}"'] \arrow[l, shift left=3] \end{tikzcd}$$

Il reste à prouver que $k_V(X) = \underline{X}$ est isomorphe à $\underline{A}$. Or on a

$$\begin{tikzcd} \underline{X} : A_0 \arrow[r, "\iota"] & \bar{A} \arrow[l, shift right=3, "\delta_1"'] \arrow[l, shift left=3, "\delta_2"] & \bar{\bar{A}} \arrow[l, shift right=3, "\pi_1"'] \arrow[l, "\mu"'] \arrow[l, shift left=3, "\pi_2"] \end{tikzcd}$$

avec

$$\bar{A}(X, X') = A_1(iX, iX'), \qquad \bar{\bar{A}}(X, X') = A_2(m^{-1}(iX), m^{-1}(iX')).$$

Notons γ le **V**-foncteur **A** → A_1 tel que $\gamma(X) = iX$ et

$$\gamma_{X,X'} : \bar{A}(X, X') = A_1(iX, iX') \xrightarrow{id} A_1(iX, iX').$$

C'est un isomorphisme, puisque bijectif sur les objets et que pour tout (X, X'), $\gamma_{X,X'}$ est un isomorphisme. De plus

$$d_1.\gamma = \delta_1 \qquad \text{et} \qquad d_2.\gamma = \delta_2$$

Enfin $\gamma.\iota = i$. D'où un morphisme $\bar{\gamma} : \bar{\bar{A}} \to A_2$ qui détermine l'isomorphisme cherché. ◊

On trouvera un résultat analogue avec des conditions un peu différentes dans [8], § III.

2. Naturalité de la comparaison k_V.

Il reste à étudier si cette comparaison s'étend aux morphismes.

Soit F un foncteur exact à gauche de **V** vers $\bar{\mathbf{V}}$, toutes deux exactes à gauche et cartésiennes fermées. Il respecte le produit et détermine donc un foncteur F-Cat, exact à gauche de **V**-Cat vers $\bar{\mathbf{V}}$-Cat associant à **A** la $\bar{\mathbf{V}}$-catégorie, notée F(**A**), ayant les mêmes objets que **A** et telle que

$$F(\mathbf{A})(X, X') = F(\mathbf{A}(X, X')).$$

D'autre part, F définit aussi un foncteur exact à gauche

$$\mathrm{Cat}(F) : \mathrm{Cat}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathrm{Cat}(\bar{\mathbf{V}}),$$

associant à $\underline{C}$ la catégorie interne, notée

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(i)"] & F(C_1) \arrow[l, shift right=3] \arrow[l, shift left=3] & F(C_2). \arrow[l, "F(m)"'] \arrow[l, shift right=3] \arrow[l, shift left=3] \end{tikzcd}$$

Apparaissent, de même, les foncteurs Cat(F)-Cat et Cat(F-Cat).

Proposition 14. *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cat}(\mathbf{V})\text{-}\mathrm{Cat} \arrow[r, "k_{\mathbf{V}}"] \arrow[d, "\mathrm{Cat}(F)\text{-}\mathrm{Cat}"'] & \mathrm{Cat}(\mathbf{V}\text{-}\mathrm{Cat}) \arrow[d, "\mathrm{Cat}(F\text{-}\mathrm{Cat})"] \\ \mathrm{Cat}(\mathbf{V})\text{-}\mathrm{Cat} \arrow[r, "k_{\bar{\mathbf{V}}}"] & \mathrm{Cat}(\bar{\mathbf{V}}\text{-}\mathrm{Cat}) \end{tikzcd}$$

Preuve. Soit **A** une Cat(**V**)-catégorie. Alors $k_{\mathbf{V}}(\mathbf{A}) = \underline{A}$ est donné par

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "i"] & A_1 \arrow[l, shift right=3] \arrow[l, shift left=3] & A_2 \arrow[l, "m"'] \arrow[l, shift right=3] \arrow[l, shift left=3] \end{tikzcd}$$

et Cat(F-Cat)(A) par

$$\begin{tikzcd} F(A_0) \arrow[r, "F(i)"] & F(A_1) \arrow[l, shift right=3] \arrow[l, shift left=3] & F(A_2) \arrow[l, "F(m)"'] \arrow[l, shift right=3] \arrow[l, shift left=3] \end{tikzcd}$$

D'autre part, Cat(F)(**A**) est la Cat($\bar{\mathbf{V}}$)-catégorie ayant les mêmes objets que **A** et telle que Cat(F)(**A**(X, X')) = Cat(F)(**A**(X, X')). Soit

$$\begin{tikzcd} F(\mathbf{A}(X, X')_0) \arrow[r, "F_{iX,X'}"] & F(\mathbf{A}(X, X')_1) \arrow[l, shift right=3] \arrow[l, shift left=3] & F(\mathbf{A}(X, X')_2). \arrow[l, "F_{mX,X'}"'] \arrow[l, shift right=3] \arrow[l, shift left=3] \end{tikzcd}$$

On reconnaît alors que $k_{\bar{\mathbf{V}}}(\mathrm{Cat}(F)(\mathbf{A}))$ est

$$\begin{tikzcd} F(A_0) \arrow[r, "F(i)"] & F(A_1) \arrow[l, shift right=3] \arrow[l, shift left=3] & F(A_2). \arrow[l, "F(m)"'] \arrow[l, shift right=3] \arrow[l, shift left=3] \end{tikzcd}$$

Cette preuve s'étend aisément aux morphismes. ◊

3. La construction de base et le cas enrichi.

La dernière étape à franchir avant le théorème est de montrer que la comparaison du 1 et la construction de base s'articulent harmonieusement.

Plaçons-nous dans la situation de base. Alors le foncteur G-Cat : **V**'-Cat → **V**-Cat admet K-Cat comme adjoint à gauche, inverse à gauche, exact à gauche. D'où le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Cat}\,(\mathbf{V})\text{-}\mathrm{Cat} \arrow[r] \arrow[dd, dashed, "k_{K,\mathbf{V}}"] \arrow[dl, shift right, "K_1\text{-}\mathrm{Cat}"'] & \mathrm{Cat}(\mathbf{V})\text{-}\mathrm{Cat} \arrow[dd, "k_{\mathbf{V}}"] \\
\mathbf{V}'\text{-}\mathrm{Cat} \arrow[r, shift right, "G\text{-}\mathrm{Cat}"'] & \mathbf{V}\text{-}\mathrm{Cat} \arrow[l, shift right, "K\text{-}\mathrm{Cat}"'] \arrow[ur, shift right] \arrow[dr, shift right] & & \\
 & & \mathrm{Cat}_{K\text{-}\mathrm{Cat}}\,(\mathbf{V}\text{-}\mathrm{Cat}) \arrow[r] \arrow[ul, shift right, "K\text{-}\mathrm{Cat}_1"'] & \mathrm{Cat}(\mathbf{V}\text{-}\mathrm{Cat})
\end{tikzcd}$$

Proposition 15. *Il existe un foncteur* $k_{K,\mathbf{V}}$ *qui rend commutatifs les diagrammes précédents. Ce foncteur est une équivalence de catégories. De plus* K-Cat₁ .$k_{K,\mathbf{V}}$ = K₁-Cat *et* $k_{K,\mathbf{V}}$.G₁-Cat *est canoniquement isomorphe à* G-Cat₁.

Preuve. 1. Les bords pleins du carré de droite étant pleinement fidèles, il suffit de définir $k_{K,\mathbf{V}}$ sur les objets. Le caractère pleinement fidèle de ce foncteur en découlera. De même que la commutation avec K-Cat₁ et K₁ -Cat qui est déjà vérifiée par $k_{\mathbf{V}}$. (En effet, $(\ )_0 . k_{\mathbf{V}} = (\ )_0$-Cat.)

Soit **A** une Cat$_K$(**V**)-catégorie ; alors pour tout couple X, X' d'objets de **A**, **A**(X, X') est une catégorie interne à **V**, K-discrète :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}(X, X')_0 \arrow[r, "i_{X,X'}"] & \mathbf{A}(X, X')_1 \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2] & \mathbf{A}\,(X, X')_2 \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2]
\end{tikzcd}$$

Par suite K($i_{X,X'}$) est un isomorphisme. La catégorie interne $\underline{\mathbf{A}}$ associéeest

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_0 \arrow[r, "i"] & \mathbf{A}_1 \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2] & \mathbf{A}_2 \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2]
\end{tikzcd}$$

Il reste à montrer qu'elle est K-Cat-discrète. Calculons

$$K(\underline{i}) : K(\mathbf{A}_0) \to K(\mathbf{A}_1).$$

Le foncteur i se comporte comme l'identité sur les objets communs de $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{A}_1$ il en est donc de même pour K(i). Enfin

$$K(i)_{X,X'} : K(\mathbf{A}_0(X, X')) \longrightarrow K(\mathbf{A}_1(X, X'))$$

est K($i_{X,X'}$) et donc un isomorphisme. Par conséquent K(i) est un isomorphisme.

2. Montrons que $k_{K,\mathbf{V}}$.G₁-Cat est isomorphe à G-Cat₁. Soit **A** une **V**-catégorie, alors la Cat (**V**)-catégorie G₁-Cat(**A**) est la Cat (**V**)-catégorie ayant les mêmes objets que **A** et telle que

$$G_1(\mathbf{A})(X, X') = G_1(\mathbf{A}(X, X')) ;$$

soit la catégorie interne à **V** soulignée suivante :

$$\begin{tikzcd}(1)\ G.K(\mathbf{A}(X, X')) & \mathbf{A}(X, X') \arrow[l, "\eta \mathbf{A}(X, X')"'] \arrow[r, shift left=2, leftarrow] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, leftarrow] & \mathbf{A}(X, X') \times_K \mathbf{A}(X, X') \arrow[r, shift left=2, leftarrow] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2, leftarrow] \arrow[from=1-2, to=1-4, dash, bend right] & {} \end{tikzcd}$$

Ce diagramme détermine dans **V**-Cat le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}(2)\quad G.K(\mathbf{A}) & \mathbf{A} \arrow[l, "\eta \mathbf{A}"'] \arrow[r, shift left=2, leftarrow] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, leftarrow] & \bar{\mathbf{A}} \arrow[r, shift left=2, leftarrow] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2, leftarrow] & \bar{\bar{\mathbf{A}}}\ . \end{tikzcd}$$

Mais le **V**-foncteur $\eta(\mathbf{A})$ étant l'identité sur les objets communs de **A** et G.K(**A**) et (1) étant exact, alors (2) est aussi exact et la catégorie déterminée par ce diagramme est clairement isomorphe à $G_1(\mathbf{A})$.

3. Il reste à montrer que $k_{K,\mathbf{V}}$ est une équivalence. Ce foncteur est pleinement fidèle. Il reste à prouver qu'il est essentiellement surjectif ; c'est-à-dire qu'il faut construire, pour toute catégorie interne $\underline{\mathbf{A}}$ à **V**-Cat, K-Cat-discrète, une catégorie enrichie X dans $\mathrm{Cat}_K(\mathbf{V})$ et un isomorphisme entre $\underline{\mathbf{A}}$ et $k_{K,\mathbf{V}}(X) = \underline{X}$. Soit donc $\underline{\mathbf{A}}$ une catégorie interne à **V**-Cat, K-Cat-discrète. Alors $K(i)$ est un isomorphisme et $\mathrm{Ob}(K(i))$ une bijection. Or $\mathrm{ob}(K(i)) = \mathrm{ob}(i)$ et $\underline{\mathbf{A}}$ est un objet de la catégorie Cat_{ob}(**V**-Cat) (cf. Proposition 13). Soit $\underline{X}$ la Cat(**V**)-catégorie associée à $\underline{\mathbf{A}}$ dans la Proposition 13. On sait que $\underline{\mathbf{A}}$ est isomorphe à $\underline{X}$. Il reste à prouver que X est une Cat_K (**V**)-catégorie, c'est-à-dire que $K(\iota_{X,X'})$ est un isomorphisme. Or $\iota_{X,X'} = i_{X,X'}$ et $\underline{\mathbf{A}}$ étant K-Cat-discrète, $K(i)$ est un isomorphisme et donc $K(i_{X,X'})$. ◊

4. Equivalence entre les n-catégories internes et les n-catégories usuelles.

L'adjonction

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Ens} \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{Gr}"'] & \mathrm{Cat} \arrow[l, shift right=2, "(\ )_0"'] \end{tikzcd}$$

détermine une adjonction

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Cat} \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{Gr\text{-}Cat}"'] & 2\text{-}\mathrm{Cat} \arrow[l, shift right=2, "(\ )_0\text{-}\mathrm{Cat}"'] \end{tikzcd}$$

et ainsi de suite. Posons

$$\mathrm{Gr}_{\underline{1}} = \mathrm{Gr\text{-}Cat} \quad \text{et} \quad (\ )_{\underline{1}} = (\ )_0\text{-}\mathrm{Cat};$$

$$\mathrm{Gr}_{\underline{n-1}} = \mathrm{Gr}_{\underline{n-2}}\text{-}\mathrm{Cat} \quad \text{et} \quad (\ )_{\underline{n-1}} = (\ )_{\underline{n-2}}\text{-}\mathrm{Cat}.$$

Proposition 16. *La catégorie* $\underline{n}$- Cat *est équivalente à la catégorie* $\mathrm{Cat}_{(\ )_{\underline{n-2}}}$ $(n\text{-}1)$- Cat *des catégories internes aux* $(\underline{n-1})$*-catégories qui sont* $(\ )_{\underline{n-2}}$*-discrètes.*

Preuve. Il est clair que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & & \underline{2}\text{-Cat} \arrow[dll, shift right] \arrow[d, "t_2"] \arrow[dr] & \\
\mathrm{Ens} \arrow[r, shift right, "\mathrm{Gr}"'] & \mathrm{Cat} \arrow[l, shift right, "(\ )_0"'] \arrow[ur, shift right] \arrow[dr, shift right] & & \mathrm{Cat}(\mathrm{Cat}) \\
 & & \mathrm{Cat}_{(\ )_0}(\mathrm{Cat}) \arrow[ul, shift right] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

et que t_2 est une équivalence d'après la Proposition 13.

L'hypothèse de récurrence est que le diagramme suivant commute (à isomorphisme près pour les Gr) jusqu'à l'ordre n-1, avec t_k une équivalence :

$$\begin{tikzcd}
 & & \underline{k}\text{-Cat} \arrow[dl, shift right] \arrow[d, "t_k"] \\
\underline{(k-2)}\text{-Cat} \arrow[r, shift right, "\mathrm{Gr}_{\underline{k-2}}"'] & \underline{(k-1)}\text{-Cat} \arrow[l, shift right, "(\ )_{\underline{k-2}}"'] \arrow[ur, shift right] \arrow[dr, shift right] & \\
 & & \mathrm{Cat}_{(\ )_{k-2}}(\underline{(k-1)}\text{-Cat}) \arrow[ul, shift right]
\end{tikzcd}$$

Prouvons ce résultat à l'ordre n. Pour cela considérons le diagramme de la page suivante. Le diagramme (*) commute et t_{n-1} -Cat est une équivalence : c'est la traduction de l'hypothèse de récurrence au cas enrichi d'ordre supérieur. Le diagramme (**) commute et

$$k_{(\ )_{\underline{n-3}},\ (\underline{n-2})\text{-Cat}}$$

est une équivalence d'après la Proposition 15. ◊

Corollaire. *La catégorie* $\underline{n}$-Cat *des* $\underline{n}$-*catégories au sens enrichi est canoniquement équivalente à la catégorie* n-Cat *des* n-*catégories au sens interne dans* Ens.

Preuve. Dans les deux cas, on part de la situation suivante

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ens} \arrow[r, shift right] & \mathrm{Cat} \arrow[l, shift right]
\end{tikzcd}$$

et on fait le même nombre de constructions qui sont équivalentes d'après la proposition précédente. ◊

$$\begin{tikzcd}
n\text{-Cat} = [(n\text{-}1)\text{-Cat}]\text{-Cat} \arrow[r, "t_{n-1}\text{-Cat}"] \arrow[dd, xshift=-36pt, "(\ )(\ )_{n-1}"'] \arrow[dd, xshift=12pt, "(\ )_{n-2}\text{-Cat}"'] & {[\mathrm{Cat}_{(\ )_{n-3}}((n\text{-}2)\text{-Cat}]\text{-Cat}} \arrow[r, "k_{(\ )_{n-3},(n-2)\text{-Cat}}"] \arrow[ddl, shift right, "(\ )_o\text{-Cat}"'] & \mathrm{Cat}_{(\ )_{n-2}}((n\text{-}1)\text{-Cat} \arrow[ddll, shift right, "(\ )_o"'] \\
 & * & ** \\
(n\text{-}1)\text{-Cat} = [(n\text{-}2)\text{-Cat}]\text{-Cat} \arrow[uu, xshift=-24pt, "\mathrm{Gr}_{n-1}"'] \arrow[uu, xshift=24pt, "\mathrm{Gr}_{n-2}\text{-Cat}"'] \arrow[uur, shift right, "\mathrm{Gr}\text{-Cat}"'] \arrow[uurr, shift right, "\mathrm{Gr}"'] \arrow[d, xshift=-36pt, "(\ )_{n-2}"'] \arrow[d, xshift=12pt, "(\ )_{n-3}\text{-Cat}"'] & & \\
(n\text{-}2)\text{-Cat} = [(n\text{-}3)\text{-Cat}]\text{-Cat} \arrow[u, xshift=-24pt, "\mathrm{Gr}_{n-2}"'] \arrow[u, xshift=24pt, "\mathrm{Gr}_{n-3}\text{-Cat}"'] & &
\end{tikzcd}$$

RÉFÉRENCES

1. M. BARR, Exact categories, Lecture Notes in Math. **236**, Springer (1971), 1-120.
2. D. BOURN, Méthode n-catégorique d'interprétation des complexes et des extensions abéliennes de longueur n, Rapport **45** Inst. Math. Pures et Appl. Univ. Cath. de Louvain, Juillet 1982.
3. D. BOURN & J. PENON, 2-catégories réductibles, U.E.R. Math., Univ. Picardie, Amiens, Janvier 1978.
4. R. BROWN, Some non-abelian methods in homotopy theory and homological algebra, Pure Math. Preprint 83.15, Univ. of Wales, Bangor.
5. R. BROWN & P. J. HIGGINS, Colimit theorems for relative homotopy groups, J. Pure Appl. Algebra **22** (1981), 11-41.
6. R. BROWN & P. J. HIGGINS, The equivalence of crossed complexes and ∞-groupoids, Cahiers Top. et Géom. Diff. **XXII**-4 (1981), 370-386.
7. M. BUNGE & R. PARE, Stacks and equivalence of indexed categories, Cahiers Top. et Géom. Diff. **XX**-4 (1979), 373-399.
8. A. & C. EHRESMANN, Multiple functors, Cahiers Topo. et Géom. Diff. : II, **XIX**-3 (1978), 295-333 ; III, **XIX**-4 (1978), 387-443 ; IV, **XX**-1 (1979), 59-104.
9. A. GROTHENDIECK, Technique de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique, Séminaire Bourbaki 1959, Exposé 190.
10. R. LAVENDHOMME & J.R. ROISIN, Cohomologie non abélienne de structures algébriques J. Algebra **67** (1980), 385-414.

U.E.R. de Mathématiques
33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS Cedex. FRANCE