

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

RENÉ GUITART

Fonctions d'Euler-Jordan et de Gauß et exponentielle dans les semi-anneaux de Burnside

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome
33, n° 3 (1992), p. 253-260

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1992__33_3_253_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Fonctions d'Euler-Jordan et de Gauß et exponentielle dans les semi-anneaux de Burnside

René Guitart¹

ABSTRACT : In this paper, the arithmetical functions of Euler-Jordan and Gauß are related to explicit computations of internal exponentiation of isomorphic classes of objects in the topos of permutations.

Soit \mathcal{C} une catégorie, et $\hat{\mathcal{C}}$ le topos des foncteurs $X : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{E}ns$ et transformations naturelles entre ces foncteurs. On désigne par $\mathcal{KC} = \mathcal{K}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets de $\hat{\mathcal{C}}$, la classe d'isomorphisme de X étant notée $\#X = x$. Comme $\hat{\mathcal{C}}$ est à sommes et à produits, \mathcal{KC} est un semi-anneau avec, pour $x = \#X$ et $y = \#Y$, $x + y = \#(X + Y)$ et $x.y = \#(X \times Y)$, et l'anneau engendré $K\mathcal{C}$ est un λ -anneau essentiel en combinatoire et en théorie des classes caractéristiques (voir [2] et [4]). Si \mathcal{C} est un groupe \mathbf{G} , alors ainsi $K\mathbf{G}$ est connu comme le semi-anneau de Burnside de \mathbf{G} .

Ici nous voulons introduire une seule nouvelle idée, très simple, qui est la suivante : si $x, y \in \mathcal{KC}$, on pose $x^y = \#(X^Y)$, et alors cette *exponentielle* dans \mathcal{KC} , qui se calcule explicitement, grâce au lemme de Yoneda, via certaines des quantités $x \rightarrow y = \text{card}(\text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(X, Y))$, s'avère combinatoirement significative, liées au petit théorème de Fermat, aux fonctions arithmétiques comme la fonction ϕ d'Euler, les fonctions J_k de Jordan, et les fonctions $F(a, n)$ de Gauss (voir [1], et, pour des références plus récentes, [5], [6], [7]).

Pour $X \in \hat{\mathcal{C}}$ on note $f X$ la catégorie fibrée associée à X , ayant pour objets les (C, u) , $C \in \text{ob}\mathcal{C}$, $u \in X(C)$, et pour morphismes de (C_1, u_1) vers (C_2, u_2) les $f : C_1 \rightarrow C_2 \in \mathcal{C}$ tels que $X(f)(u_2) = u_1$. Si K est une composante

¹Université de Paris 7

connexe de $f X$, on pose $X_K(C) = u \in X(C) ; (C, u) \in obK$. On a $X = \sum_{K \text{ comp. conn. de } f X} X_K$. On dit que X est *connexe* si $f X$ est connexe, ce qui équivaut à ce que $Hom_{\hat{\mathcal{C}}}(X, -)$ commute aux sommes, ce qui équivaut à ce que $X = Y + Z$ dans $\hat{\mathcal{C}}$ implique $Y = 0$ ou $Z = 0$. On dit que $f \in \mathcal{KC}$ est une *figure* de \mathcal{C} si $f = \#F$ avec F connexe et $F \neq 0$. On note $\mathcal{FC} = \mathcal{F}$ l'ensemble des figures de \mathcal{C} . On note par x, y, z des éléments quelconques de \mathcal{KC} , et par f, g, h, k, l, m , des éléments quelconques de \mathcal{FC} . Pour tout x et toute f on pose, avec $x = \#X$,

$$x_f = \text{card}\{K; K \text{ comp. conn. de } \int X, \#X_K = f\}.$$

La fonction $x_- : \mathcal{F} \rightarrow \text{Card}$ détermine x . On a $f_g = \delta_{f,g}$ et $x_- = \sum_{f \in \mathcal{F}} x_f f_-$, ce que l'on écrit

$$x = \sum_{f \in \mathcal{F}(x)} x_f f, \text{ avec } \mathcal{F}(x) = \{f \in \mathcal{F}; x_f \neq 0\}.$$

Proposition 1 *Pour $x, y \in \mathcal{K}$ and $f, g, \dots \in \mathcal{F}$ on a :*

$$(x + y)_f = x_f + y_f,$$

$$(x.y)_f = \sum_{g \in \mathcal{F}(x), h \in \mathcal{F}(y)} x_g y_h (g.h)_f,$$

les $(g.h)_f$ étant solution du système d'équations indexées par les $k \in \mathcal{F}$:

$$\sum_{f \in \mathcal{F}(g.h)} (k \rightarrow f)(g.h)_f = (k \rightarrow g)(k \rightarrow h).$$

On a :

$$(x \rightarrow y) = \prod_{f \in \mathcal{F}(x)} \left[\left(\sum_{g \in \mathcal{F}(y)} y_g (f \rightarrow g) \right)^{x_f} \right].$$

On a :

$$y^x = \sum_{f \in \mathcal{F}(y^x)} (y^x)_f f,$$

les $(y^x)_f$ étant solution du système d'équations indexées par les $k \in \mathcal{F}$:

$$\sum_{f \in \mathcal{F}(y^x)} (k \rightarrow f)(y^x)_f = \prod_{f \in \mathcal{F}(k.x), (f \rightarrow y) \neq 0} \left[\prod_{h \in \mathcal{F}(x)} \left[\left(\sum_{g \in \mathcal{F}(y)} y_g (f \rightarrow g) \right)^{x_h (k.h)_f} \right] \right].$$

On a :

$$x.y = \sum_{f \in \mathcal{F}(x.y)} (x.y)_f f,$$

les $(x.y)_f$ étant solution du système d'équations indexées par les $k \in \mathcal{F}$:

$$\prod_{f \in \mathcal{F}(x.y), (f \rightarrow k) \neq 0} (f \rightarrow k)^{(x.y)_f} = \prod_f \left[\left(\sum_{f \in \mathcal{F}(k^y)} (k^y)_f (g \rightarrow f) \right)^{x_g} \right].$$

En particulier, en notations allégées on a :

$$\prod_f (f \rightarrow k)^{(l.m)_f} = \sum_f (l \rightarrow f)(k^m)_f.$$

Supposons désormais que $\mathcal{C} = \mathbf{G}$ soit un groupe. Alors $X \in \widehat{\mathbf{G}}$ est connexe ssi X est un \mathbf{G} -ensemble transitif, ssi $X \cong \mathbf{G}/\mathbf{H}$ pour un sous-groupe \mathbf{H} de \mathbf{G} . On a $\mathbf{G}/\mathbf{H} \cong \mathbf{G}/\mathbf{K}$ ssi il existe un $g \in \mathbf{G}$ tel que $g^{-1}\mathbf{H}g = \mathbf{K}$, de sorte que $\mathcal{F}\mathbf{G}$ est l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de \mathbf{G} . Si on note $H \in \mathcal{F}\mathbf{G}$ la figure déterminée par \mathbf{H} , on a : $(H \rightarrow K) = \text{card}\{g\mathbf{K}; g^{-1}\mathbf{H}g \subseteq \mathbf{K}\}$.

Proposition 2 Pour $x, y \in \mathcal{K}\mathbf{G}$, l'exponentielle y^x se calcule par la proposition 1, via les valeurs des $(H \rightarrow K)$ ci-avant, et se calcule aussi, en notant EX l'ensemble des éléments de X , comme $\#(EY^{EX}, \circ)$ où \circ est l'action sur EY^{EX} qui est définie par $(g \circ \phi)(x) = g.(\phi(g^{-1}.x))$. Par suite le foncteur $E : \widehat{\mathbf{G}} \rightarrow \text{Ens}$ induit un homomorphisme de semi-anneau $\epsilon : \mathcal{K}\mathbf{G} \rightarrow \mathcal{K}\mathbf{1} = \text{Card}$ qui de plus préserve l'exponentielle.

On désigne par $\mathcal{N}\mathbf{G}$ l'ensemble des éléments $x \in \mathcal{K}\mathbf{G}$ tels que, avec $x = \#X$, EX soit un ensemble fini. Ainsi $\mathcal{N}\mathbf{1} = \mathbf{N}$.

Proposition 3 $\mathcal{N}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ comporte 2 figures, notées 1 et D , 1 étant neutre pour le produit, avec

$$D^2 = 2D$$

et l'exponentielle vérifie

$$(a + bD)^D = (a + 2b) + \frac{(a + 2b)^2 - (a + 2b)}{2} D.$$

En particulier on a :

$$D^D = 2^D = 2 + D$$

et puis :

$$2^{a+bD} = 2^{a+b} + 2^{a+b-1}(2^b - 1)D.$$

On note $\mathcal{R}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ le semi-anneau extension de $\mathcal{N}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ constitué des symboles $a + bD$, avec $a, b \in \mathbf{R}$ (a et b réels). On pose $\frac{D}{2} = U$, de sorte que $U^2 = U$, et si $y = \alpha + \beta U$ est positif, c'est-à-dire si $0 \leq \alpha$ et $0 \leq \alpha + \beta$, on pose, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$y^x = \alpha^x + ((\alpha + \beta)^x - \alpha^x)U,$$

$$y^U = ((\alpha + \frac{\beta}{2}D)^D)^{1/2}.$$

Ainsi l'exponentielle peut s'étendre aux y^x avec y positif. Pour y positif strictement ($\alpha \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$), on pose

$$\log_2(y) = \log_2\left(\frac{\alpha^2}{\alpha + \beta}\right) + \log_2\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha}\right)D.$$

Proposition 4 Avec les notations ci-avant on a, pour y strictement positif,

$$y^x = 2^{x \log_2 y}.$$

Proposition 5 $\mathcal{N}((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2)$ comporte 4 figures, notées 1, H , V , et C , 1 étant neutre pour le produit, avec

$$H^2 = 2H, V^2 = 2V, C^2 = 4C, HV = C, HC = VC = 2C.$$

L'exponentielle vérifie par exemple :

$$H^H = 2 + H, V^V = 2 + V, V^H = H^V = H + V, C^H = 4H + 2V + C.$$

Proposition 6 $\mathcal{N}(\mathcal{S3})$ comporte 4 figures, notées 1, D, T , et H , 1 étant neutre pour le produit, avec

$$D^2 = 2D, T^2 = T + H, H^2 = 6H, DT = H, DH = 2H, TH = 3H.$$

L'exponentielle vérifie par exemple :

$$H^H = 6 + 15D + 210T + 7665H, T^H = 3 + 3D + 24T + 108H ;$$

$\mathcal{N}(\mathcal{S5})$ comporte 19 figures, $\mathcal{N}(\mathcal{S7})$ comporte 96 figures.

Proposition 7 $\mathcal{N}(\mathbf{Z})$ comporte une infinité dénombrable de figures, notées 1, et C_n , pour $n > 0$, où C_n est le cycle à n éléments, et on a

$$(C_u \rightarrow C_v) = (\text{si } v \mid u : v, \text{ sinon } : 0), \quad C_u \cdot C_v = (u \wedge v)C_{(u \vee v)}.$$

Pour tout $x \in \mathcal{N}(\mathbf{Z})$ on a : $(C_u \rightarrow x) = \sum_{d \mid u} dx_d$, en convenant de noter x_{C_n} par simplement x_n .

Pour $x, y \in \mathcal{N}(\mathbf{Z})$ et $r \in \mathbf{N}$ on pose

$$Q(x, y, r) = \prod_{l, x_l \neq 0} [(\sum_{d \mid (l \wedge r)} dy_d)^{x_l(l \wedge r)}]$$

et $R(x, y) = \text{ppcm}\{i; x_i \neq 0 \text{ ou } y_i \neq 0\}$. Alors $z = y^x$ vérifie :

- pour tout n , ($z_n \neq 0$) implique ($n \mid R(x, y)$)
- pour tout r et tout n :

$$\sum_{n \mid r} nz_n = Q(x, y, r),$$

$$z_n = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) Q(x, y, \frac{n}{d})$$

où μ est la fonction de Moebius.

Par exemple on a : $C_2^{C_2} = 2 + C_2, C_2^{C_3} = C_2 + C_6, C_2^{C_4} = 2 + C_2 + 3C_4, C_2^{C_5} = C_2 + 3C_{10}, C_2^{C_6} = 2 + C_2 + 2C_3 + 9C_6$.

Ce calcul sur les "nombre-cycles" et les exponentielles de permutations est amorcé dans [3].

Proposition 8 Soit C_∞ la figure non-finie de $\mathcal{K}(\mathbf{Z})$, c'est-à-dire le cycle infini, et soit $x \in \mathcal{N}(\mathbf{Z})$, avec $x = \#X$ et $EX = \epsilon \cdot x = e$ Alors dans $x^{C_\infty} = \sum_n z_n C_n$, on a, pour tout p premier

$$z_p = \frac{e^p - e}{p} \in \mathbf{N}.$$

Pour a et k entiers, soit $F(a, n)$ la fonction de Gauss et $J_k(d)$ la fonction de Jordan, caractérisées par

$$\sum_{n \mid k} F(a, n) = a^k = \sum_{d \mid a} J_k(d).$$

Ces fonctions sont donc données par :

$$F(a, n) = \sum_{q|n} \mu(q) a^{n/q},$$

$$J_k(d) = \sum_{q|d} \mu(q) \left(\frac{d}{q}\right)^k.$$

Ainsi, avec $n = p_1^{e_1} \dots p_s^{e_s}$ (la décomposition de n en facteurs premiers),

$$F(a, n) = a^n - \sum_{i \leq s} a^{n/p_i} + \sum_{i < j \leq s} a^{n/(p_i p_j)} - \dots + (-1)^s a^{n/(p_1 \dots p_s)}$$

et de même pour $J_k(d)$. On sait que J_k de Jordan vaut :

$$J_k(n) = \text{card}\{(a_1, \dots, a_k); 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n, (a_1, \dots, a_k, n) = 1\}.$$

Pour $k = 1$ on retrouve la fonction ϕ d'Euler :

$$\phi(n) = \text{card}\{a; 1 \leq a \leq n, a \wedge n = 1\}.$$

Proposition 9 Pour $a, m \in \mathbf{N}$, dans $a^{C_m} = \sum_n z_n C_n$, on a, pour p premier :

$$\text{si } p^k \mid m, \text{ alors } z_{p^k} = \frac{a^{p^k} - a^{p^{k-1}}}{p^k} \in \mathbf{N}.$$

Et, plus généralement, on a :

$$a^{C_m} = \sum_{n|m} \frac{F(a, n)}{n} C_n.$$

Alors, de $(a^{C_m})(b^{C_m}) = (ab)^{C_m}$ on tire :

Proposition 10 Pour $a, b, n \in \mathbf{N}$ on a :

$$F(ab, n) = \sum_{n_1 \vee n_2 = n} F(a, n_1) F(b, n_2).$$

Proposition 11 Pour tout $a \in \mathbf{N}$ on définit $\Psi_a \in \mathcal{N}(\mathbf{Z})$ par :

$$\Psi_a = \sum_{d|a} \frac{a}{d} \phi(d) C_d.$$

On a, pour tout $r \in \mathbf{N}$,

$$(C_r \rightarrow \Psi_a) = a(a \wedge r),$$

et, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$(\Psi_a)^k = \sum_{d|a} \frac{a^k}{d} J_k(d) C_d.$$

On note $\mathcal{Q}^+(\mathbf{Z})$ le semi-anneau extension de $\mathcal{N}(\mathbf{Z})$ constitué des symboles $\sum_n z_n C_n$ avec les $z_n \in \mathbf{Q}^+$ (i.e. rationnels positifs ou nuls), et on définit dans ce semi-anneau

$$\Phi = \sum_n \frac{\phi(n)}{n} C_n.$$

Proposition 12 On a

$$\Phi^k = \sum_n \frac{J_k(n)}{n} C_n.$$

Pour tout polynôme P à coefficients entiers et tout entier r on a :

$$(C_r \rightarrow P(\Phi)) = P(r).$$

Pour toute figure $f \in \mathcal{N}(\mathbf{Z})$ on a :

$$(f \rightarrow \Phi) = \epsilon(f).$$

Ainsi Φ représente sur les figures l'augmentation $\epsilon : \mathcal{N}(\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{N}$.

Références

- [1] L.E. Dickson, *History of the theory of numbers*, vol. I, 1919, reprint Chelsea, New York, 1952.
- [2] A. Grothendieck, *La théorie des classes de Chern*, Bull. Soc. Math. France 86 (1958), 137-154.
- [3] R. Guitart, *Miroirs et Ambiguïtés*, 70 p., multigraphié, Université Paris 7, décembre 1987.

- [4] D. Knutson, *λ -Rings and the Representation Theory of the Symmetric Group*, Springer L.N. Math. 308, 1973.
- [5] J. Sandor, *Note on Jordan's arithmetical function*, Sem. Arghiriade, Univ. Timisoara, 1989, 4p.
- [6] E. Schwab and E.D. Schwab, *Total additivity and summation function*, Sem. Arghiriade, Univ. Timisoara, 1990, 7p.
- [7] L. Toth, *Some remarks on a generalisation of Euler's function*, Sem. Arghiriade, Univ. Timisoara. 1990, 9p.

Université de Paris 7
Département de mathématiques
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05