DIAGRAMMES

F. CURY

# Systèmes de générateurs et relations pour les catégories enrichies

*Diagrammes*, tome 1 (1979), exp. nº 1, p. C1-C21

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1979__1__A1_0>

Diagrammes, vol. 1 , 1979.

# SYSTEMES DE GENERATEURS ET RELATIONS POUR LES CATEGORIES ENRICHIES

F. CURY

## 1. Introduction.

Ce texte présente, très brièvement, la notion de graphe multiplicatif enrichi (par une catégorie monoïdale), c'est-à-dire la notion de système de générateurs et relations pour une catégorie enrichie. Il se contente de résumer le travail effectué en (G.M.E.N.) où l'on pourra trouver toutes les démonstrations (souvent purement techniques) des résultats énoncés ici.

Au même titre que la notion de graphe multiplicatif (ensembliste) est le point de départ de la théorie des esquisses, i.e. de la théorie des descriptions "économiques" des structures algébriques (voir, par exemple, (E.T.S.A.) ), la notion de graphe multiplicatif enrichi est le point de départ de la théorie des esquisses enrichies (qui reste à développer) permettant de décrire "économiquement" certains types de structures "enrichies" (voir, par exemple, les §§8 et 9).

Après avoir rappelé la définition (§3) d'un graphe multiplicatif enrichi, nous énonçons avec précision des conditions suffisantes (toujours réalisées dans la pratique) assurant l'existence de limites projectives et inductives dans la catégorie des graphes multiplicatifs enrichis (§4). Nous montrons ensuite à quelles conditions suffisantes un foncteur monoïdal permet le changement d'enrichissement (§5) et à quelles conditions suffisantes un tel foncteur changement d'enrichissement possède un adjoint à gauche (§6). Enfin, nous concluons cette présentation formelle en justifiant l'idée de départ, i.e. en montrant qu'un graphe multiplicatif enrichi engendre une catégorie enrichie (§7). Au §8 sont fournis des exemples élémentaires et motivants des conditions d'application des résultats précédents et au §9 nous introduisons une notion originale de transformation naturelle enrichie entre foncteurs enrichis allant d'une catégorie ou d'un graphe multiplicatif enrichis vers une catégorie enrichie: il est nécessaire d'introduire cette notion (plus générale que celle utilisée habituellement) pour que les graphes multiplicatifs enrichis servent non seulement à décrire des structures algébriques mais aussi leurs homomorphismes. Le §2, quant à lui, ne sert qu'à fixer les notations.

2. <u>Notations</u>.

On note $(\underline{V},\otimes,I,ung,und,ass)$ une catégorie monoïdale de catégorie sous-jacente $\underline{V}$ , d'unité $I$ (pour le produit tensoriel $\otimes$ ) et pour laquelle

- ung est l'isomorphisme d'unitarité à gauche,
- und est l'isomorphisme d'unitarité à droite,
- ass est l'isomorphisme d'associativité,

on note aussi $\underline{V}_o$ la classe de ses objets.
Le plus souvent, une telle catégorie monoïdale sera confondue avec $\underline{V}$ , la structure monoïdale ne prêtant pas à confusion.

On note $(\underline{C}_o,\underline{\underline{C}},j,k)$ une $\underline{V}$-catégorie dont la classe des objets est $\underline{C}_o$ , dont le Hom à valeurs dans $\underline{V}$ est $\underline{\underline{C}}$ , dont l'application "sélection des identités" est $j$ (i.e. pour tout objet $C$ , on a $j_C: I \longrightarrow \underline{\underline{C}}(C,C)$ ) et dont l'application "lois de composition" est $k$ (i.e. pour tout triplet $(C'',C',C)$ d'objets, on a

$$k_{C'',C',C} : \underline{\underline{C}}(C',C'')\otimes\underline{\underline{C}}(C,C') \longrightarrow \underline{\underline{C}}(C,C'') ).$$

Le plus souvent, on identifiera une telle $\underline{V}$-catégorie à $\underline{\underline{C}}$

et l'on notera $\underline{C}$ sa catégorie (ensembliste) sous-jacente.

On note $(\underline{F}_o,\underline{\underline{F}})$ un $\underline{V}$-foncteur de la $\underline{V}$-catégorie $\underline{\underline{C}}$ vers la $\underline{V}$-catégorie $\underline{\underline{D}}$ pour lequel $\underline{F}_o$ est la restriction aux objets et $\underline{\underline{F}}$ est la restriction aux Hom à valeurs dans $\underline{V}$. Le plus souvent, on le notera simplement $\underline{\underline{F}}: \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{D}}$ et le foncteur (ensembliste) sous-jacent sera noté $\underline{F}$.

On note $(\underline{Q},q,e)$ un foncteur monoïdal d'une catégorie monoïdale $\underline{V}$ (d'unité $I$) vers une catégorie monoïdale $\underline{W}$ (d'unité $J$) pour lequel $\underline{Q}$ est le foncteur sous-jacent, $q: J \longrightarrow \underline{Q}(I)$ dans $\underline{W}$ et $e$ est la transformation naturelle comparant les produits tensoriels $e: (-\boxtimes-).QxQ \longrightarrow Q.(-\boxtimes-)$.

On appelle <u>univers</u> (voir (T.H.E.N.)) tout ensemble $U$ d'ensembles possédant comme élément:

- avec un ensemble, toute partie de cet ensemble et l'ensemble de ces parties,
- avec deux ensembles, leur produit cartésien,
- avec une famille d'ensembles indexée par un élément de $U$, sa réunion
- l'ensemble des entiers naturels.

On dit qu'une catégorie est $U$-<u>petite</u> si la classe de ses objets et la classe de ses flèches sont éléments de $U$.

On dit qu'une catégorie est <u>relative à</u> $U$ si ses Hom (ensemblistes) sont à valeurs dans $U$.

Dans toute la suite, on raisonne dans un bon modèle de la théorie des ensembles avec axiome des univers: "tout ensemble est élément d'au-moins un univers" (en particulier, tout univers $U$ est élément d'un univers $U'$ pour lequel $U \subset U'$).

## 3. <u>Graphes multiplicatifs enrichis</u>.

Un graphe multiplicatif ensembliste est un graphe muni d'une composition très partielle: deux flêches consécutives (sauf si l'une d'entre elle est un objet ou, ce qui revient au même, une identité) ne sont pas nécessairement composables. Autrement dit, il s'agit d'un système de générateurs (les éléments du graphe) et de relations (les égalités définissant la composition) pour une catégorie (car tout graphe multiplicatif engendre une catégorie). C'est cette idée qu'il s'agit de traduire dans le cas enrichi.

Si $\underline{V}$ est une catégorie monoïdale, nous dirons que $(\underline{A}_o, \underline{\underline{A}}, j, m, k)$ est un $\underline{V}$-graphe multiplicatif si, et seulement si:

- $\underline{A}_o$ est un ensemble (des objets),
- $\underline{\underline{A}}$: $\underline{A}_o \times \underline{A}_o \longrightarrow \underline{V}_o$ est une application (Hom à valeurs dans $\underline{V}$ ),
- j: $\underline{A}_o \longrightarrow \underline{V}$ est une application (sélection des identités) associant à tout objet $A$ un $j_A : I \longrightarrow \underline{\underline{A}}(A,A)$ ,
- m: $\underline{A}_o \times \underline{A}_o \times \underline{A}_o \longrightarrow \underline{V}$ est une application associant à tout triplet $(A'',A',A)$ d'objets un monomorphisme (sous-objet des couples composables)

$$m_{A'',A',A} : \underline{\underline{A}}(A',A'') * \underline{\underline{A}}(A,A') \longrightarrow \underline{\underline{A}}(A',A'') \boxtimes \underline{\underline{A}}(A,A') \ ,$$

- k: $\underline{A}_o \times \underline{A}_o \times \underline{A}_o \longrightarrow \underline{V}$ est une application (composition) associant à tout triplet $(A'',A',A)$ d'objets un morphisme

$$k_{A'',A',A} : \underline{\underline{A}}(A',A'') * \underline{\underline{A}}(A,A') \longrightarrow \underline{\underline{A}}(A,A'') \ ,$$

- (axiome d'unitarité à droite) pour tout couple $(A',A)$ d'objets, on dispose d'une factorisation $d_{A',A}$ (nécessairement unique) rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
& \underline{\underline{A}}(A,A') \boxtimes \underline{\underline{A}}(A,A) & \\
\underline{\underline{A}}(A,A') \boxtimes I \arrow[ur, "\underline{\underline{A}}(A,A') \boxtimes j_A"] \arrow[rr, "d_{A',A}"'] \arrow[dr, "\wr", "\mathrm{und}_{\underline{\underline{A}}(A,A')}"'] & & \underline{\underline{A}}(A,A') * \underline{\underline{A}}(A,A) \arrow[ul, "m_{A',A,A}"'] \arrow[dl, "k_{A',A,A}"] \\
& \underline{\underline{A}}(A,A') &
\end{tikzcd}$$

- (axiome d'unitarité à gauche) pour tout couple $(A',A)$ d'objets, on dispose d'une factorisation $g_{A',A}$ (nécessairement unique) rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\underline{A}}(A',A') \boxtimes \underline{\underline{A}}(A,A') & \\
I \boxtimes \underline{\underline{A}}(A,A') \arrow[ur, "j_{A'}\boxtimes\underline{\underline{A}}(A,A')"] \arrow[rr, "g_{A',A}"'] \arrow[dr, "ung_{\underline{\underline{A}}(A,A')}"'] & & \underline{\underline{A}}(A',A')*\underline{\underline{A}}(A,A') \arrow[ul, "m_{A',A',A}"'] \arrow[dl, "k_{A',A',A}"] \\
 & \underline{\underline{A}}(A,A') &
\end{tikzcd}$$

Le plus souvent, on notera plus simplement $\underline{\underline{A}}$ un tel $\underline{V}$-graphe multiplicatif.

Evidemment, une $\underline{V}$-catégorie $(\underline{C}_o,\underline{\underline{C}},j,k)$ s'identifie à un $\underline{V}$-graphe multiplicatif particulier $(\underline{C}_o,\underline{\underline{C}},j,m,k)$ où:

- pour tout triplet $(C'',C',C)$ d'objets de $\underline{\underline{C}}$, on a

$$m_{C'',C',C} = Id_{\underline{\underline{C}}(C',C'')} \boxtimes \underline{\underline{C}}(C,C') \quad .$$

On dit que $(\underline{F}_o,\underline{\underline{F}})$ est un <u>$\underline{V}$-foncteur du $\underline{V}$-graphe multiplicatif $\underline{\underline{A}}$ vers le $\underline{V}$-graphe multiplicatif $\underline{\underline{B}}$</u> si, et seulement si:

- $\underline{F}_o : \underline{A}_o \longrightarrow \underline{B}_o$ est une application,
- $\underline{\underline{F}}: \underline{A}_o \times \underline{A}_o \longrightarrow \underline{V}$ est une application associant à tout couple $(A',A)$ d'objets de $\underline{\underline{A}}$ un morphisme

$$\underline{\underline{F}}(A,A') : \underline{\underline{A}}(A,A') \longrightarrow \underline{\underline{B}}(\underline{F}_oA,\underline{F}_oA') \quad ,$$

- pour tout triplet $(A'',A',A)$ d'objets de $\underline{\underline{A}}$, on dispose d'une factorisation $f_{A'',A',A}$ (nécessairement unique) rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{A}}(A',A'')*\underline{\underline{A}}(A,A') \arrow[r, "f_{A'',A',A}"'] \arrow[d, "m_{A'',A',A}"] & \underline{\underline{B}}(\underline{F}_oA',\underline{F}_oA'')*\underline{\underline{B}}(\underline{F}_oA,\underline{F}_oA') \arrow[d, "m_{\underline{F}_oA'',\underline{F}_oA',\underline{F}_oA}"'] \\
\underline{\underline{A}}(A',A'')\boxtimes\underline{\underline{A}}(A,A') \arrow[r, "\underline{\underline{F}}(A',A'')\boxtimes\underline{\underline{F}}(A,A')"] & \underline{\underline{B}}(\underline{F}_oA',\underline{F}_oA'')\boxtimes\underline{\underline{B}}(\underline{F}_oA,\underline{F}_oA')
\end{tikzcd}$$

Le plus souvent, on notera simplement $\underline{F}: \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ un tel $\underline{V}$-foncteur.

Evidemment, un $\underline{V}$-foncteur entre $\underline{V}$-catégories s'identifie à un $\underline{V}$-foncteur entre les $\underline{V}$-graphes multiplicatifs associés.

Si U est un univers, on note ($\underline{V}$,U)-Cat (resp. ($\underline{V}$,U)-Gramul ) la catégorie pleine de $\underline{V}$-foncteurs entre $\underline{V}$-catégories (resp. $\underline{V}$-graphes multiplicatifs) dont les ensembles d'objets sont éléments de U . On dispose donc d'un foncteur d'oubli canonique plein et fidèle ($\underline{V}$,U)-Cat $\longrightarrow$ ($\underline{V}$,U)-Gramul.

Les §§ qui suivent étudient, très brièvement les propriétés de ($\underline{V}$,U)-Gramul (limites) et de ce foncteur (existence d'un adjoint à gauche). On pourra se reporter dès maintenant au §8 pour voir des exemples de $\underline{V}$-graphes multiplicatifs .

## 4. Limites de graphes multiplicatifs enrichis.

Supposons que $\underline{V}$ est une catégorie monoïdale. Si elle possède suffisamment de limites projectives, on sait construire explicitement les limites projectives de $\underline{V}$-graphes multiplicatifs. Ainsi, nous prouvons en (G.M.E.N.) la:

Proposition 1. *Si* U *est un univers, si* $\underline{X}$ *est une catégorie* U-*petite, si* $\underline{V}$ *est une catégorie monoïdale à produits fibrés et à limites projectives indexées par* $\underline{X}$ , *alors la catégorie* ($\underline{V}$,U)-Gramul *est à limites projectives indexées par* $\underline{X}$ . *Dans ces conditions, le foncteur d'oubli* ($\underline{V}$,U)-Cat $\longrightarrow$ ($\underline{V}$,U)-Gramul *commute avec ces limites*.

A l'aide d'une version raffinée du théorème d'existence de (C.O.S.L.), on prouve aussi qu'il existe, sous certaines conditions, des limites inductives de graphes multiplicatifs enrichis. Pour obtenir un tel résultat, l'utilisation de conditions "de taille" est, comme d'habitude, essentielle.Dans cette optique, nous dirons que l'univers U est *emboité* dans l'univers U' si, et seulement si:

- $U$ est élément de $U'$ ,
- $U$ est une partie de $U'$ .

De même, nous dirons que la catégorie monoïdale $\underline{V}$ est *imbriquée* dans la catégorie monoïdale $\underline{V}'$ si, et seulement si:

- $\underline{V}$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{V}'$ ,
- le foncteur inclusion $\underline{V} \hookrightarrow \underline{V}'$ est monoïdal strict.

Nous dirons que la catégorie monoïdale $\underline{V}$ est *emboitée* dans la catégorie monoïdale $\underline{V}'$ si, et seulement si:

- $\underline{V}$ est imbriquée dans $\underline{V}'$ ,
- tout morphisme de $\underline{V}'$ de source ou de but dans $\underline{V}$ possède une image de source dans $\underline{V}$ .

Alors, nous pouvons énoncer (voir la démonstration, technique, dans (G.M.E.N.) ):

*Proposition* 2. *Si* $U$ *est un univers emboité dans l'univers* $U'$, *si* $\underline{V}$ *est une catégorie monoïdale emboitée dans la catégorie monoïdale* $\underline{V}'$ *et si, de plus*:

- $\underline{V}$ *est* $U'$-*petite*,
- $\underline{V}$ *est à limites projectives et inductives* $U$-*petites*
- $\underline{V}'$ *est à limites projectives et inductives* $U'$-*petites et les limites inductives dénombrablement filtrantes y commutent avec les produits fibrés*,
- *le foncteur inclusion* $\underline{V} \hookrightarrow \underline{V}'$ *commute avec les limites projectives et inductives* $U$-*petites*,
- *pour tout objet* $V'$ *de* $\underline{V}'$ , *les foncteurs* $-\otimes V'$ *et* $V'\otimes -$ *commutent avec les limites inductives* $U'$-*petites*,

*alors, la catégorie* $(\underline{V},U)$-Gramul *est à limites inductives* $U$-*petites*.

On trouvera au §8 un exemple de somme fibrée de graphes multiplicatifs enrichis.

## 5. Changement d'enrichissements.

Supposons que $\underline{Q}: \underline{V} \longrightarrow \underline{W}$ soit un foncteur monoïdal et que U est un univers. On sait que l'on dispose, alors, d'un foncteur "changement d'enrichissements"

$$(\underline{Q},U)\text{-Cat}: (\underline{V},U)\text{-Cat} \longrightarrow (\underline{W},U)\text{-Cat} \;,$$

(en posant, pour tout objet $\underline{\underline{C}}$ de $(\underline{V},U)$-Cat :

$$(\underline{Q},U)\text{-Cat}\,(\underline{\underline{C}}) = (\underline{C}_o, \underline{\underline{C}}', \ldots) \qquad ,$$

de sorte que:

- pour tout couple $(C',C)$ d'objets de $\underline{\underline{C}}$ , on a l'égalité $\underline{\underline{C}}'(C,C') = \underline{Q}(\underline{\underline{C}}(C,C'))$ ).

Dans le cas des graphes multiplicatifs enrichis, il faut spécifier un peu plus le foncteur monoïdal $\underline{Q}$ pour que le changement d'enrichissement soit possible. Précisément, en (G.M.E.N.) nous établissons la:

<u>Proposition</u> 3. <u>Si</u> U <u>est un univers</u>, <u>si</u> $\underline{Q}: \underline{V} \longrightarrow \underline{W}$ <u>est un foncteur monoïdal tel que</u>:

- $\underline{Q}$ <u>commute aux monomorphismes</u>,
- $\underline{W}$ <u>est à produits fibrés</u>,

<u>alors</u>, <u>on peut associer à</u> $\underline{Q}$ <u>un foncteur changement d'enrichissement</u> $(\underline{Q},U)\text{-Gramul}: (\underline{V},U)\text{-Gramul} \longrightarrow (\underline{W},U)\text{-Gramul}$ .

En effet, pour tout objet $(\underline{A}_o, \underline{\underline{A}}, j, m, k)$ de $(\underline{V},U)$-Gramul , il suffit de poser:

$$(\underline{Q},U)\text{-Gramul}\,(\underline{\underline{A}}) = (\underline{A}_o, \underline{\underline{A}}', j', m', k') \;,$$

de sorte que:

- pour tout couple $(A',A)$ d'objets de $\underline{\underline{A}}$ , on a l'égalité $\underline{\underline{A}}'(A,A') = \underline{Q}(\underline{\underline{A}}(A,A'))$ ,
- pour tout triplet $(A'',A',A)$ d'objets de $\underline{\underline{A}}$ , le diagramme ci-dessous est un produit fibré choisi dans $\underline{W}$ :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{A}}'(A',A'')*\underline{\underline{A}}'(A,A') \arrow[r, "m'_{A'',A',A}"'] \arrow[d, "n'_{A'',A',A}"] & \underline{\underline{A}}'(A',A'')\boxtimes\underline{\underline{A}}'(A,A') \arrow[d, "q_{A'',A',A}"'] \\
\underline{Q}(\underline{\underline{A}}(A',A'')*\underline{\underline{A}}(A,A')) \arrow[r, "\underline{Q}(m_{A'',A',A})"] & \underline{Q}(\underline{\underline{A}}(A',A'')\boxtimes\underline{\underline{A}}(A,A'))
\end{tikzcd}$$

(rappelons que le foncteur monoïdal $(\underline{Q},q,e)$ est simplement noté $\underline{Q}$ ; on a posé aussi $q_{A'',A',A} = q_{\underline{\underline{A}}(A',A''),\underline{\underline{A}}(A,A')}$ ; enfin, les hypothèses assurent bien que, par construction, $m'_{A'',A',A}$ est bien un monomorphisme) ,

- pour tout triplet $(A'',A',A)$ d'objets de $\underline{\underline{A}}$ , on a l'égalité $k'_{A'',A',A} = \underline{Q}(k_{A'',A',A}).n'_{A'',A',A}$ .

De même, si $(\underline{F}_o,\underline{\underline{F}}) : \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ est un $\underline{V}$-foncteur entre deux objets de $(\underline{V},U)$-Gramul, on pose:

$$(\underline{Q},U)\text{-Gramul } (\underline{\underline{F}}) = (\underline{F}_o,\underline{\underline{F}}') : \underline{\underline{A}}' \longrightarrow \underline{\underline{B}}' \quad ,$$

de sorte que:

- pour tout couple $(A',A)$ d'objets de $\underline{\underline{A}}$ , on a l'égalité $\underline{\underline{F}}'(A,A') = \underline{Q}(\underline{\underline{F}}(A,A'))$ .

Nous dirons qu'un foncteur monoïdal <u>permet le changement d'enrichissement pour les graphes multiplicatifs enrichis</u> si, et seulement si, il vérifie les deux conditions de la proposition 3.

Supposons, par exemple, que $\underline{V}$ est une catégorie monoïdale relative à l'univers U (i.e. à Hom ensemblistes à valeurs dans U ). Alors, il est clair que le foncteur Hom(I,-) de $\underline{V}$ vers la catégorie cartésienne Ens(U) (pleine d'applications entre éléments de U ) est monoïdal et permet le changement d'enrichissement pour les graphes multiplicatifs enrichis. Ainsi, à tout graphe multiplicatif enrichi par $\underline{V}$ est associé un graphe multiplicatif ensembliste dit <u>sous-jacent</u>.

Enfin, il est trivial de constater que, si $\underline{Q}: \underline{V} \longrightarrow \underline{W}$ est monoïdal et permet le changement d'enrichissement pour les graphes multiplicatifs enrichis (il le permet toujours pour les catégories enrichies):le diagramme ci-dessous commute (où les verticales sont les oublis canoniques et U est un univers):

$$\begin{tikzcd}
(\underline{V},U)\text{-Cat} \arrow[r, "(\underline{Q},U)\text{-Cat}"'] \arrow[d] & (\underline{W},U)\text{-Cat} \arrow[d] \\
(\underline{V},U)\text{-Gramul} \arrow[r, "(\underline{Q},U)\text{-Gramul}"] & (\underline{W},U)\text{-Gramul}
\end{tikzcd}$$

## 6. Existence d'adjoints à gauche pour les foncteurs changement d'enrichissements.

Nous rappelons ici deux résultats (démontrés en (G.M.E.N.)) concernant le "transport" des propriétés d'un foncteur monoïdal à celles, analogues, du foncteur changement d'enrichissement associé (s'il existe).

Il est tout d'abord trivial de constater que:

*Proposition* 4. *Si* U *est un univers, si* $\underline{X}$ *est une catégorie* U-*petite, si le foncteur monoïdal* $\underline{Q}: \underline{V} \longrightarrow \underline{W}$ *permet le changement d'enrichissement pour les graphes multiplicatifs enrichis* (§5) *et si, de plus:*

- $\underline{V}$ *est à limites projectives indexées par* $\underline{X}$ *et à produits fibrés,*
- $\underline{Q}$ *commute avec ces limites projectives,*

*alors, le foncteur changement d'enrichissement* $(\underline{Q},U)$-Gramul *commute avec les limites projectives indexées par* $\underline{X}$ (*et les produits fibrés*).

Pour établir que l'existence d'un adjoint à gauche se transporte, dans certains cas, nous utilisons le théorème d' existence (d'adjoints) de (C.O.S.L.). Bien entendu, il s'agit, essentiellement, de faire intervenir de bonnes conditions de taille (très analogues à la "solution set condition" de Freyd). Pour ce faire, nous dirons que le foncteur monoïdal $\underline{Q}: \underline{V} \longrightarrow \underline{W}$ est *imbriqué* dans le foncteur monoïdal $\underline{Q}': \underline{V}' \longrightarrow \underline{W}'$ si, et seulement si, toutes les conditions suivantes sont vérifiées:

- $\underline{V}$ est emboitée dans $\underline{V}'$ (voir le §4),
- $\underline{W}$ est imbriquée dans $\underline{W}'$ (voir le §4),
- $\underline{Q}$ est une restriction (comme foncteur monoïdal) de $\underline{Q}'$ .

Alors, on prouve que:

*Proposition* 5. *Si* U *est un univers emboité dans l'univers* U', *si* $\underline{Q}: \underline{V} \longrightarrow \underline{W}$ *est un foncteur monoïdal imbriqué dans le foncteur monoïdal* $\underline{Q}': \underline{V}' \longrightarrow \underline{W}'$ , *si* $\underline{Q}$ *admet un adjoint à gauche* $\underline{R}$ *et si, de plus:*

- $\underline{V}$ est U'-*petite*,
- $\underline{V}$ est *àlimites projectives et inductives* U-*petites*,
- $\underline{V}'$ *est à limites projectives et inductives* U'-*petites et les limites inductives dénombrablement filtrantes y commutent avec les produits fibrés*,
- $\underline{W}$ *et* $\underline{W}'$ *sont à produits fibrés et le foncteur inclusion* $\underline{W} \hookrightarrow \underline{W}'$ *commute avec ces produits fibrés*,
- *le foncteur inclusion* $\underline{V} \hookrightarrow \underline{V}'$ *commute avec les limites projectives et inductives* U-*petites*,
- *pour tout objet* V' *de* $\underline{V}'$ , *les foncteurs* $-\otimes V'$ *et* $V'\otimes-$ *commutent avec les limites inductives* U'-*petites*,
- *le foncteur* $\underline{Q}'$ *commute avec les limites projectives* U'-*petites*,
- *pour tout objet* W *de* $\underline{W}$ *les foncteurs* $\mathrm{Hom}_{\underline{W}'}(W,\underline{Q}'-)$ *et* $\mathrm{Hom}_{\underline{V}'}(\underline{R}W,-)$ *sont naturellement équivalents*,

*alors, le foncteur changement d'enrichissement* (*qui existe en vertu de la proposition* 3) ($\underline{Q}$,U)-Gramul *possède un adjoint à gauche*.

Remarquons aussi que les conditions de la proposition 5 assurent aussi que le foncteur changement d'enrichissements $(\underline{Q},U)$-Cat: $(\underline{V},U)$-Cat $\longrightarrow$ $(\underline{W},U)$-Cat possède également un adjoint à gauche.

Tant dans le cas des graphes multiplicatifs enrichis que dans celui des catégories enrichies, il est assez facile (mais non trivial) de prouver que les adjoints aux foncteurs changement d'enrichissements conservent les classes d'objets. Enfin, insistons sur le fait que les catégories monoïdales considérées ne sont nullement supposées bi-fermées.

## 7. Catégorie enrichie engendrée par un graphe multiplicatif enrichi.

On a motivé l'introduction des graphes multiplicatifs enrichis en les présentant comme des systèmes de générateurs et relations pour les catégories enrichies. La proposition qui suit (démontrée en (G.M.E.N.)) justifie tout à fait ce point de vue:

Proposition 6. *Si* $U$ *est un univers, si* $\underline{V}$ *est une catégorie monoïdale et si, de plus:*

- $\underline{V}$ *est à limites inductives* $U$-*petites,*
- *pour tout objet* $V$ *de* $\underline{V}$ *les foncteurs* $-\otimes V$ *et* $V\otimes -$ *commutent avec les limites inductives* $U$-*petites,*

*alors, le foncteur d'oubli canonique*

$$(\underline{V},U)\text{-Cat} \longrightarrow (\underline{V},U)\text{-Gramul}$$

*possède un adjoint à gauche.*

(La construction explicite de la $\underline{V}$-catégorie engendrée par un $\underline{V}$-graphe multiplicatif est, formellement, assez longue à écrire. Néanmoins, elle est très inspirée du cas ensembliste: on commence par prendre la catégorie engendrée par le graphe sous-jacent au graphe multiplicatif considéré - i.e. on oublie les composés - puis on quotiente cette catégorie par une relation qui identifie un chemin (x,y) - qui est un morphisme de cette catégorie - au chemin (x.y) lorsque le composé x.y est défini dans le graphe multiplicatif de départ.)

En tout cas, on prouve facilement que l'adjoint à gauche, dont l'existence est assurée par la proposition 6, conserve les classes d'objets.

8. Exemples.

Dans tout ce §8 , U désigne un univers fixé et les catégories de structures considérées ont leurs objets ayant pour ensembles sous-jacents des éléments de U . Comme on raisonne dans un bon modèle de la théorie des ensembles avec axiome des univers, il existe nécessairement un autre univers U' de telle sorte que U soit emboité dans U' . Alors, on est assuré que les conditions de tailles telles que celles utilisées dans les propositions 2, 4, 5 sont vérifiées dès lors qu'on utilise des catégories monoïdales de structures algébriques usuelles relatives à U puis à U' . Il en est de même des foncteurs monoïdaux usuels que nous utilisons. Enfin, on sait bien que ces catégories et ces foncteurs ont de "bonnes" propriétés tant en ce qui concerne l'existence de limites qu'en ce qui concerne l'existence d'adjoint. Nous ne le préciserons donc pas à chaque fois.

8.1. Générateurs et relations pour les monoïdes.

Une Ens-catégorie à un seul objet est un monoïde. Un Ens-graphe multiplicatif à un seul objet engendre donc un monoïde. Il s'identifie bien à un système de générateurs et de relations pour un monoïde puisque, si $(\underline{M}_o, \underline{\underline{M}}, j, m, k)$ est un tel Ens-graphe multiplicatif (où $\underline{M}_o$ n'a qu'un objet .M ), on lui associe:

- l'ensemble (de générateurs) $\underline{\underline{M}}(M,M)$ ,
- l'ensemble de relations x.y = z , dès lors que:

+ $(x,y)$ est élément de $\underline{\underline{M}}(M,M)*\underline{\underline{M}}(M,M)$ (que l'on identifie à une partie de $\underline{\underline{M}}(M,M) \times \underline{\underline{M}}(M,M)$ ),

+ $k(x,y) = x.y = z$ .

Une Ab-catégorie à un seul objet est un anneau unitaire. Un Ab-graphe multiplicatif à un seul objet engendre donc un anneau unitaire. Evidemment, il s'identifie, de la même manière que précédemment, à un groupe abélien (additif) muni de relations multiplicatives.

Le foncteur monoïdal d'oubli $Ab \longrightarrow Ens$ montre comment opèrent les propositions 3 et 4 (oubli du groupe abélien additif sous-jacent).

8.2. Générateurs pour les catégories dont les Hom sont munis de relations.

Soit Préord (resp. Equiv) la catégorie cartésienne des préordres (resp. des relations d'équivalence). Un Préord-graphe multiplicatif (resp. un Equiv-graphe multiplicatif) est un graphe multiplicatif ensembliste muni d'une relation de préordre (resp. d'équivalence) telle que:

- deux objets sont en relation si, et seulement si, ils sont égaux,
- si deux flêches sont en relation , leurs sources sont égales de même que leurs buts,
- si deux couples de flêches sont composables et si les flêches de ces couples sont en relation deux à deux, les composés de ces couples sont en relation.

Une Préord-catégorie (resp. une Equiv-catégorie) est un Préord-graphe multiplicatif (resp. un Equiv-graphe multiplicatif) dont le graphe multiplicatif sous-jacent (ensembliste) est une catégorie. C'est donc une catégorie munie d'une relation de préordre (resp. d'équivalence) vérifiant les conditions qui précèdent.

Evidemment, un Préord-graphe multiplicatif engendre un Equiv-graphe multiplicatif (proposition 5 appliquée au foncteur monoïdal d'oubli Equiv $\longrightarrow$ Préord ), il engendre aussi une Préord-catégorie (proposition 6 ). En fin de comte, un tel Préord-graphe multiplicatif engendre une Equiv-catégorie (de deux manières différentes), pusique toute Préord-catégorie engendre une Equiv-catégorie (très rapidement dit: le graphe multiplicatif sous-jacent est regardé comme générateur -contraint par le préordre - de la catégorie et le préordre est regardé comme générateur - contraint par le graphe multiplicatif - de l'équivalence).

8.3. <u>Générateurs pour les 2-catégories</u>.

Soit Gramul la catégorie cartésienne (on montre qu'elle est aussi fermée) des graphes multiplicatifs. On appelle <u>2-graphe multiplicatif</u> un Gramul-graphe multiplicatif. Un tel 2-graphe multiplicatif engendre une Gramul-catégorie (proposition 6) qui engendre une 2-catégorie (proposition 5 , appliquée au foncteur monoïdal d'oubli Cat $\longrightarrow$ Gramul et pour les catégories enrichies). On peut aussi procéder de la manière suivante: le 2-graphe multiplicatif considéré engendre un Cat-graphe multiplicatif (proposition 5 appliquée au foncteur monoïdal Cat $\longrightarrow$ Gramul ) qui, à son tour, engendre une 2-catégorie (proposition 6). En fin de compte, un 2-graphe multiplicatif engendre (de deux manières différentes) une 2-catégorie.

Par exemple, on définit habituellement un triple dans une 2-catégorie $\underline{\underline{D}}$ comme étant un 2-foncteur de but $\underline{\underline{D}}$ et de source la 2-catégorie simpliciale. Il n'est pas difficile de constater que cette 2-catégorie simpliciale est engendrée par un 2-graphe multiplicatif $(\underline{T}_o, \underline{\underline{T}}, j, m, k)$ défini comme suit:

- $\underline{T}_o = \{C\}$,

- $\underline{\underline{T}}(C,C)$ est le graphe multiplicatif dont le graphe sous-jacent est

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "u"'] & T \arrow[r, bend left, "u_1"] \arrow[r, bend right, "u_2"'] & T' \arrow[l, "n"'] & T'' \arrow[l, shift right, "n_1"'] \arrow[l, shift left, "n_2"] \arrow[ll, bend right=40, "n_3"']
\end{tikzcd}$$

et dans lequel les seuls composés non triviaux sont déterminés par les équations $n.u_1 = n.u_2 = Id_T$ et $n.n_1 = n.n_2 = n_3$ ,

- $j(C): \{0\} = 1 \longrightarrow \underline{\underline{T}}(C,C)$ est le foncteur associant $C$ à $0$ ,

- $\underline{\underline{T}}(C,C) * \underline{\underline{T}}(C,C)$ est le sous-graphe multiplicatif de $\underline{\underline{T}}(C,C) \times \underline{\underline{T}}(C,C)$ contenant (outre $\{C\} \times \underline{\underline{T}}(C,C)$ et $\underline{\underline{T}}(C,C) \times \{C\}$) le graphe

$$\begin{tikzcd}
& (T,C) \arrow[d, "(T,u)"] & \\
(C,T) \arrow[r, "(u,T)"'] & (T,T) & (T',T) \arrow[l, "(n,T)"] \\
& (T,T') \arrow[u, "(T,n)"'] &
\end{tikzcd}$$

- $m_{C,C,C}$ est l'injection canonique,
- $k_{C,C,C}$ associe $u_1$ à $(u,T)$ , $u_2$ à $(T,u)$ , $n_1$ à $(n,T)$ et $n_2$ à $(T,n)$.

Il est clair que le 2-graphe multiplicatif $\underline{\underline{T}}$ est la description "la plus économique en termes de 2-diagrammes et 2-foncteurs" de la notion de triple. De plus, elle traduit très exactement les seuls axiomes usuels de définition d'un triple sur une catégorie donnée.

De même, on construit le 2-graphe multiplicatif $\underline{\underline{P}}$ ("minimum") tel que tout 2-foncteur $\underline{\underline{P}} \longrightarrow$ Cat s'identi-

à la donnée d'une paire de foncteurs $\underline{C} \rightleftarrows \underline{D}$ dans Cat. Soit aussi $\underline{\underline{E}}$ le 2-graphe multiplicatif tel que tout 2-foncteur $\underline{\underline{E}} \longrightarrow$ Cat s'identifie à la donnée d'un endofoncteur sur un objet de Cat. Alors, il est évident que la somme fibrée $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{T}} \underset{\underline{\underline{E}}}{+} \underline{\underline{P}}$ ($\underline{\underline{E}}$ s'injectant dans $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{T}}$ ) décrit les paires d'adjoints, i.e. que tout 2-foncteur $\underline{\underline{S}} \longrightarrow$ Cat s'identifie à la donnée d'une paire d'adjoints dans Cat.
Bien sûr, le 2-graphe multiplicatif $\underline{\underline{S}}$ engendre (de deux manières différentes) la 2-catégorie $\underline{\underline{Ad}}$ utilisée par Auderset (par exemple) dans (A.M.C.A.).

9. Complément.

Un graphe multiplicatif où sont distingués certains cônes projectifs (i.e. une esquisse au sens de (E.T.S.A.) par exemple) sert à décrire les structures algébriques d'un certain type. De la même manière, un $\underline{V}$-graphe multiplicatif (où $\underline{V}$ est une catégorie monoïdale) où sont distingués des $\underline{V}$-cônes projectifs permet de décrire d'autres types de structures algébriques ("relatives" à $\underline{V}$ ). Ainsi, on peut appeler le 2-graphe multiplicatif $\underline{\underline{T}}$ du §8 , où l'on précise qu'aucun cône projectif particulier n'est distingué (mais il n'en est pas toujours ainsi dans d'autres exemples, qu'on laisse au lecteur le soin d'imaginer), la Gramul-esquisse (ou la 2-esquisse) des catégories munies d'un triple.
Cependant, dans cet exemple, si les 2-foncteurs de $\underline{\underline{T}}$ vers Cat s'identifient bien aux catégories munies de triples, les 2-transformations naturelles usuelles (i.e. les $\underline{V}$-transformations naturelles, lorsque $\underline{V}$ = Cat ) ne décrivent que des morphismes stricts de triples. Bien sûr, il suffit d'assouplir (i.e. de rendre "lax" ) les transformations naturelles utilisées pour récupérer les morphismes de triples plus généraux usuels. Dans le cas général ($\underline{V}$ au lieu de Cat) cet assouplissement correspond à ce que nous allons décrire, rapide-

ment maintenant.

Nous supposons donc que $\underline{V}$ est une catégorie monoïdale pour laquelle:

- pour tout objet $V$ de $\underline{V}$ les foncteurs $-\otimes V$ et $V\otimes-$ commutent aux sommes fibrées,
- l'unité $I$ du produit tensoriel est l'objet des objets d'une co-catégorie interne

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, shift left=8pt, "c"] \arrow[r, shift right=8pt, swap, "d"] & I' \arrow[l, "i"] \arrow[r, shift left=8pt, "s''"] \arrow[r, "h"] \arrow[r, shift right=8pt, swap, "s'"] & I'' \end{tikzcd}$$

(où: $c$ = co-domaine, $d$ = domaine, $i$ est le morphisme représentant l'injection des objets dans les identités - ici c'est un épi puisqu'il s'agit d'une co-catégorie, $h$ = loi de composition, $I'' = I' \underset{I}{+} I'$ est une somme fibrée de co-projections $s'$ et $s''$ ).

Soit $\underline{\underline{F}}\ ,\ \underline{\underline{G}} : \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ deux $\underline{V}$-foncteurs du $\underline{V}$-graphe multiplicatif $\underline{\underline{A}}$ vers la $\underline{V}$-catégorie $\underline{\underline{C}}$ . On dit que $(\underline{t},\underline{\underline{t}})$ est une <u>$\underline{V}$-transformation naturelle</u> (<u>généralisée</u>, ou encore <u>lax</u>) de $\underline{\underline{F}}$ vers $\underline{\underline{G}}$ si, et seulement si:

- $\underline{t}$ est une application associant à tout objet $A$ de $\underline{\underline{A}}$ un morphisme $\underline{t}_A : I \longrightarrow \underline{\underline{C}}(\underline{F}_o A, \underline{G}_o A)$ ,
- $\underline{\underline{t}}$ est une application associant à tout couple $(A',A)$ d'objets de $\underline{\underline{A}}$ un morphisme $\underline{\underline{t}}_{A',A} : \underline{\underline{A}}(A,A')\otimes I' \longrightarrow \underline{\underline{C}}(\underline{F}_o A, \underline{G}_o A')$,
- pour tout objet $A$ de $\underline{\underline{A}}$ , le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd} I \otimes I' \arrow[r, "j_A \otimes I'"'] \arrow[d, "I \otimes i"] & \underline{\underline{A}}(A,A) \otimes I' \arrow[r, "\underline{\underline{t}}_{A,A}"'] & \underline{\underline{C}}(\underline{F}_o A, \underline{G}_o A) \\ I \otimes I \arrow[rr, "\sim", "\mathrm{und}_I = \mathrm{ung}_I"'] & & I \arrow[u, "\underline{t}_A"'] \end{tikzcd}$$

- pour tout couple $(A',A)$ d'objets de $\underline{\underline{A}}$ le diagramme suivant est commutatif:

$$
\begin{tikzcd}
I\otimes\underline{\underline{A}}(A,A') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\underline{t}_{A'}\otimes \mathrm{Id}_{\dots}"'] & \underline{\underline{A}}(A,A')\otimes I \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\dots}\otimes d"'] & \underline{\underline{A}}(A,A')\otimes I' \arrow[r, "\underline{\underline{t}}_{A',A}"'] & \underline{\underline{C}}(\underline{F}_o A,\underline{G}_o A') \\
\underline{\underline{C}}(\underline{F}_o A',\underline{G}_o A')\otimes\underline{\underline{A}}(A,A') \arrow[rr, "\mathrm{Id}_{\dots}\otimes \underline{\underline{F}}_{A',A}"'] & & \underline{\underline{C}}(\underline{F}_o A',\underline{G}_o A')\otimes\underline{\underline{C}}(\underline{F}_o A,\underline{F}_o A') \arrow[ur, "k_{\underline{G}_o A',\underline{F}_o A',\underline{F}_o A}"] &
\end{tikzcd}
$$

- pour tout couple $(A',A)$ d'objets de $\underline{\underline{A}}$ le diagramme suivant commute:

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\underline{A}}(A,A')\otimes I \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\dots}\otimes c"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\dots}\otimes \underline{t}_A"] & \underline{\underline{A}}(A,A')\otimes I' \arrow[r, "\underline{\underline{t}}_{A',A}"'] & \underline{\underline{C}}(\underline{F}_o A,\underline{G}_o A') \\
\underline{\underline{A}}(A,A')\otimes\underline{\underline{C}}(\underline{F}_o A,\underline{G}_o A) \arrow[r, dash, "\underline{\underline{G}}_{A',A}\otimes \mathrm{Id}_{\dots}"'] & \underline{\underline{C}}(\underline{G}_o A,\underline{G}_o A')\otimes\underline{\underline{C}}(\underline{F}_o A,\underline{G}_o A) \arrow[ur, "k_{\underline{G}_o A',\underline{G}_o A,\underline{F}_o A}"'] &
\end{tikzcd}
$$

- pour tout triplet $(A'',A',A)$ d'objets de $\underline{\underline{A}}$ , le diagramme ci-dessous commute

$$
\begin{tikzcd}
 & \underline{\underline{A}}(A',A'')\otimes\underline{\underline{A}}(A,A')\otimes I' \arrow[dl, "\mathrm{Id}_{\dots}\otimes h"'] \arrow[dr, "k_{A'',A',A}\otimes \mathrm{Id}_{\dots}"] & \\
\underline{\underline{A}}(A',A'')\otimes\underline{\underline{A}}(A,A')\otimes I' \arrow[dr, "z_{A'',A',A}"'] & & \underline{\underline{A}}(A,A'')\otimes I' \arrow[dl, "\underline{\underline{t}}_{A'',A'}"] \\
 & \underline{\underline{C}}(\underline{F}_o A,\underline{G}_o A'') &
\end{tikzcd}
$$

où $z_{A'',A',A}$ est l'unique morphisme de $\underline{\underline{V}}$ rendant commutatif le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \underline{\underline{A}}(A',A'')\boxtimes\underline{\underline{A}}(A,A')\boxtimes I'' \arrow[dd, "z_{A'',A',A}"] & \\
\underline{\underline{A}}(A',A'')\boxtimes\underline{\underline{A}}(A,A')\boxtimes I' \arrow[ur, "\mathrm{Id}_{\cdots}\boxtimes s'"] \arrow[dr, "z'_{A'',A',A}"'] & & \underline{\underline{A}}(A',A'')\boxtimes\underline{\underline{A}}(A,A')\boxtimes I' \arrow[ul, "\mathrm{Id}_{\cdots}\boxtimes s''"'] \arrow[dl, "z''_{A'',A',A}"] \\
 & \underline{\underline{C}}(\underline{F}_oA,\underline{G}_oA'') &
\end{tikzcd}$$

(car, vues les hypothèses, on a la somme f brée

$$\underline{\underline{A}}(A',A'')\boxtimes\underline{\underline{A}}(A,A')\boxtimes I'' = \underline{\underline{A}}(A',A'')\boxtimes\underline{\underline{A}}(A,A')\boxtimes I' \underset{\underline{\underline{A}}(A',A'')\boxtimes\underline{\underline{A}}(A,A')\boxtimes I}{+} \underline{\underline{A}}(A',A'')\boxtimes\underline{\underline{A}}(A,A')\boxtimes I'$$

dans $\underline{V}$ ) diagramme dans lequel:

+ $z''_{A'',A',A}$ rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{A}}(A',A'')\boxtimes\underline{\underline{A}}(A,A')\boxtimes I' \arrow[r, "\underline{\underline{G}}_{A'',A'}\boxtimes\underline{\underline{t}}_{A',A}"'] \arrow[dr, "z''_{A'',A',A}"'] & \underline{\underline{C}}(\underline{G}_oA',\underline{G}_oA'')\boxtimes\underline{\underline{C}}(\underline{F}_oA,\underline{G}_oA') \arrow[d, "k_{\underline{G}_oA'',\underline{G}_oA',\underline{F}_oA}"'] \\
 & \underline{\underline{C}}(\underline{F}_oA,\underline{G}_oA'')
\end{tikzcd}$$

+ $z'_{A'',A',A}$ rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{A}}(A',A'')\boxtimes\underline{\underline{A}}(A,A')\boxtimes I' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "z'_{A'',A',A}"] & \underline{\underline{A}}(A',A'')\boxtimes I'\boxtimes\underline{\underline{A}}(A,A') \arrow[d, "\underline{\underline{t}}_{A'',A'}\boxtimes\underline{\underline{F}}_{A',A}"'] \\
\underline{\underline{C}}(\underline{F}_oA,\underline{G}_oA'') & \underline{\underline{C}}(\underline{F}_oA',\underline{G}_oA'')\boxtimes\underline{\underline{C}}(\underline{F}_oA,\underline{F}_oA') \arrow[l, "k_{\underline{G}_oA'',\underline{F}_oA',\underline{F}_oA}"]
\end{tikzcd}$$

.

Avec cette définition, il n'est pas difficile de constater que l'ensemble $\underline{\underline{C}}^{\underline{\underline{A}}}$ des $\underline{V}$-transformations naturelles généralisées est une catégorie (les $\underline{V}$-transformations naturelles peuvent se composer de nouveau parce que $I$ est l'objet des objets d'une co-catégorie).

De le même manière, on voit sans difficulté que les $\underline{V}$-transformations naturelles généralisées entre $\underline{V}$-foncteurs entre $\underline{V}$-catégories sont les 2-morphismes d'une 2-catégorie dont les 1-morphismes sont les $\underline{V}$-foncteurs entre $\underline{V}$-catégories.

Enfin, si l'on fait $\underline{V}$ = Cat et si la co-catégorie considérée est "définie" par $I = \underline{1}$ , $I' = \underline{2}$ et $I'' = \underline{3}$ (catégories associées aux ordres canoniques), un morphisme usuel de triples s'identifie bien à une $\underline{V}$-transformation naturelle au sens précédent (et compte tenu de ce qui est établi en 8.3 ).

Bibliographie.


(A.M.C.A.) C. Auderset, Adjonctions et monades au niveau des 2-catégories, Cahiers de Top. et Géom. diff., vol. XV,1 , Paris, 1974.

(C.O.S.L.) C. Ehresmann, Construction de structures libres, Lect. Notes 92, Springer, 1969.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et types de structures algébriques, Bul. Instit. Polit. Iaşi, XIV, 1968.

(G.M.E.N.) F. Cury, Graphes multiplicatifs enrichis, Esquisses Math. 27, Amiens 1978.

(T.H.E.N.) A. Bastiani, Théorie des ensembles, C.D.U. , Paris, 1970.

on pourra, aussi, consulter:

S. Eilenberg et G. M. Kelly, Closed categories, Proc. of the Conf. on Categorical Algebra, La Jolla 1965, Springer, New York, 1966.

G. M. Kelly, Adjunction for enriched categories, Lect. Notes 106, Springer, 1969.