L. COPPEY

Quelques problèmes typiques concernant les graphes multiplicatifs

Diagrammes, tome 3 (1980), exp. nº 2, p. C1-C46

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1980__3__A2_0>

Diagrammes, Vol. 3 , 1980.

QUELQUES PROBLEMES TYPIQUES CONCERNANT LES GRAPHES MULTIPLICATIFS.

L. Coppey.

Introduction.

Dans cet article, nous étudions d'un point de vue catégorique la structure de graphe multiplicatif qui est plus générale que celle de catégorie, en ce sens que la loi de composition des flèches n'est pas supposée associative et que la condition "source de y = but de x " n'implique pas a priori l'existence du composé $y.x$.

Les graphes multiplicatifs interviennent à plusieurs titres en mathématiques: principalement en tant que "systèmes de générateurs et de relations" pour les catégories. Ainsi, ils permettent de "présenter" les types de structures et de les étudier efficacement, c'est-à-dire d'obtenir des résultats d'algèbre universelle qui ne soient pas des tautologies. On rencontre aussi les graphes multiplicatifs dans les problèmes d'associativité ou de cohérence.

L'étude qui suit ne prétend pas être exhaustive, ni même procéder d'un ordre immuable. Elle tend cependant à suggérer que certaines questions sont à ce point typiques des graphes multiplicatifs qu'elles ne se posent même pas quand il s'agit des deux cas extrêmes que constituent les catégories et les graphes orientés; par exemple, la classification des produits tensoriels (unitaires) fermés, la non naturalité du plongement de Yoneda, la "vraie notion" d'associativité.

Dans ce numéro de Diagrammes, on trouvera le début de cette étude. Une suite, avec des applications, paraîtra dans d'autres volumes.

1. Graphes multiplicatifs, foncteurs, transformations naturelles.

Un graphe multiplicatif G est la donnée d'un ensemble (noté aussi G) et d'une loi de composition binaire partielle (notée en général par un point) sur G , satisfaisant les deux conditions suivantes:

- unitarité: chaque élément f de G possède une unique unité à droite, dite source de f et notée $d(f)$, et une unique unité à gauche, dite but de f et notée $c(f)$,

- cohérence: lorsque le composé $g.f$ est défini, on doit avoir $d(g.f) = d(f)$, $c(g.f) = c(g)$ et $d(g) = c(f)$.

Si l'ensemble des couples composables de G est réduit aux seuls couples triviaux du type $(f,d(f))$ ou $(c(f),f)$, alors on dit que G est un graphe orienté.

Les catégories, de ce point de vue, sont des graphes multiplicatifs satisfaisant en outre les deux axiomes suivants:

- associativité forte: si $h.(g.f)$ ou $(h.g).f$ est défini, alors ces deux composés sont définis et égaux,

- <u>composabilité</u>: si $d(g) = c(f)$, alors $g.f$ est défini.

Si l'axiome de composabilité seul n'est pas satisfait, on dit qu'on a une <u>précatégorie</u>.

Introduisons les notations particulières suivantes. Si G est un graphe multiplicatif, on désigne par:

- G_o l'ensemble de ses unités,
- $G*G$ l'ensemble de ses couples composables, ($G \underset{\top}{*} G$, si l'on veut préciser "pour la loi $\top$ "),
- $\underline{G}$ le graphe orienté sous-jacent à G (oubli des couples composables non triviaux),
- d et c : $G \longrightarrow G_o$ les applications "source" et "but" ($d_\top$ et $c_\top$, si l'on veut préciser "pour la loi $\top$ "),
- $f: e \longrightarrow e'$ un élément f de G de source e et de but e' (et f s'appelle aussi une <u>flèche de</u> G).

On emploie, de préférence, les lettres G , H , K , X , Y , Z , pour désigner des graphes multiplicatifs ou des précatégories et on réserve les lettres A , B , C , D pour désigner des catégories. La lettre E désigne "la catégorie des ensembles" sans préjuger de sa taille.

Soient G et G' deux graphes multiplicatifs. On dit que $\theta: G \longrightarrow G'$ est une <u>application</u> si c'est, en fait, un homomorphisme entre les graphes orientés sous-jacents, i. e. si θ commute avec d et c . Il s'agit là d'une convention pratique de terminologie (voir le paragraphe concernant le plongement de Yoneda).

Une application $\Theta: G \longrightarrow G'$ est un <u>foncteur</u> si, chaque fois que $g.f$ est défini dans G, alors $\Theta(g).\Theta(f)$ est défini dans G' et égal à $\Theta(g.f)$.

Les applications et les foncteurs se composent de façon évidente; on désigne par $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{F}$) la catégorie des applications (resp. des foncteurs) entre graphes multiplicatifs.

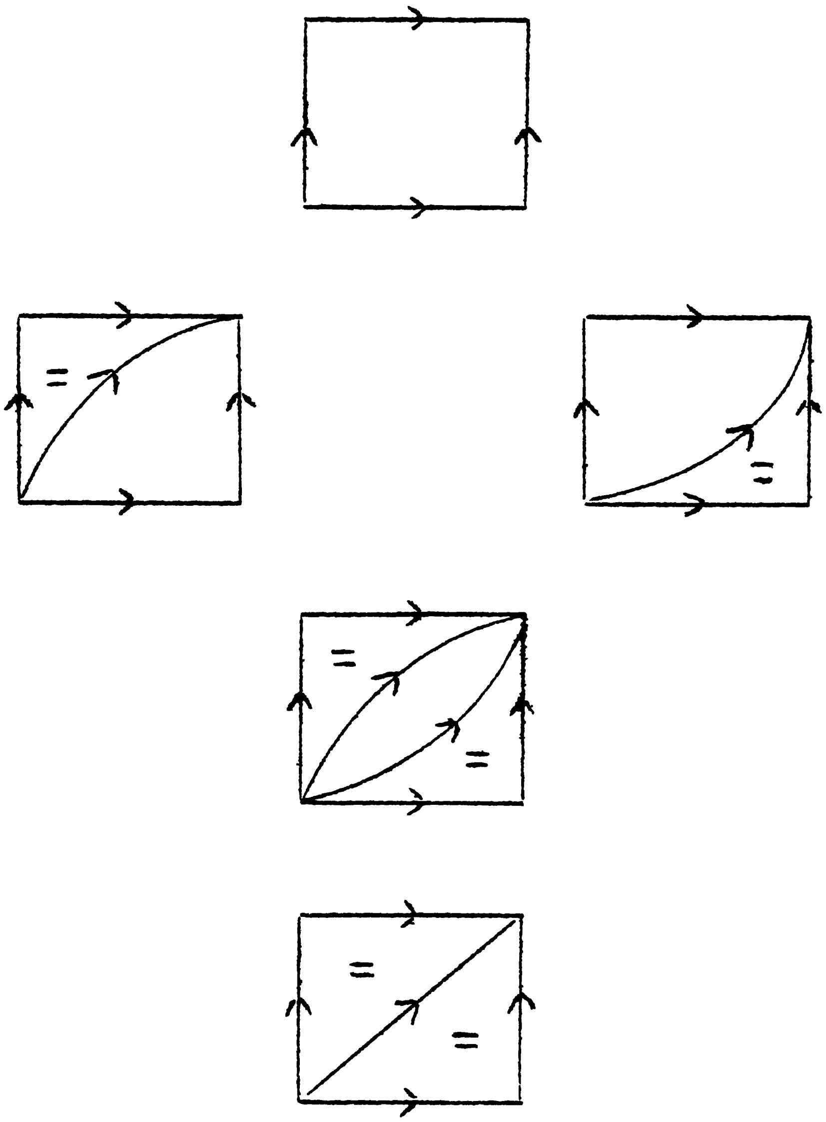
Soient Θ et $\Theta' : G \longrightarrow G'$ deux applications entre graphes multiplicatifs. Une <u>transformation</u> $t: \Theta \longrightarrow \Theta'$ est une famille $(t_e)_{e \in G_0}$ de flèches de G, où $d(t_e) = \Theta(e)$ et $c(t_e) = \Theta'(e)$. Une telle transformation est dite <u>naturelle</u> si, pour toute flèche $f: e \longrightarrow e'$ de G, les composés $\Theta'(f).t_e$ et $t_{e'}.\Theta(f)$ sont définis et égaux dans G'. Ces deux notions sont deux cas particuliers "extrêmes", comme nous allons le voir au §2. Quant à la composition des transformations naturelles, il n'y en a pas une qui "s'impose a priori": voici donc une première question, typique des graphes multiplicatifs.

2. Produits tensoriels (unitaires) et fermetures.

2.1. Types de carrés.

La plupart du temps, il faut se résoudre, dans les dessins de graphes multiplicatifs, à représenter effectivement toutes les flèches en présence; par exemple, les "carrés" dans un graphe multiplicatif peuvent avoir l'un des cinq aspects suivants:

C 5

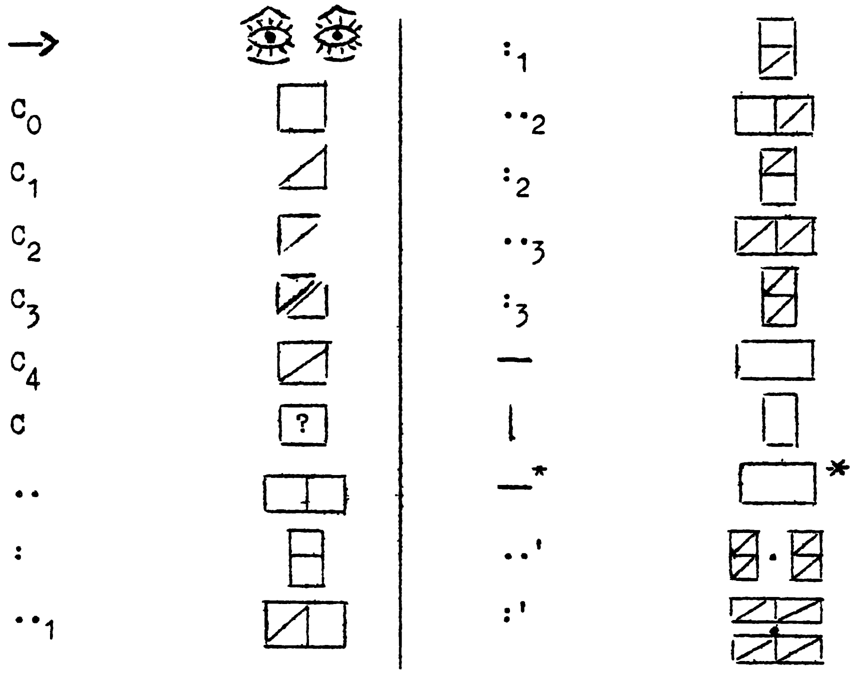


Ces types de carrés fournissent une première classification des produits tensoriels fermés de /7- . Pour les décrire complètement, nous aurions voulu utiliser des symboles suggestifs, c'est-à-dire géométriques, c'est-à-dire encore dont le dessin soit à ce point précis qu'une démonstration concernant les objets ainsi représentés devienne presque inutile. Malheureusement, les machines à écrire ne font pas assez de géométrie et nous avons du choisir d'autres symboles; cependant, nous invitons le lecteur à consulter le "lexique des notations" ci-dessous ([1]), où il trouvera traduits en "symboles préférés" ceux du texte (plus pratiques typographiquement). Nous nous sommes inspiré des symboles employés par C. Ehresmann. L'apparition de nouveaux symboles du lexique est mentionnée en marge

—> du texte par le signe —> .

<u>Lexique des notations</u>.

Le symbole du texte est à gauche, sa traduction préférée est à droite.



([1]). "Nous laissons au lecteur le soin de découvrir les règles qui gouvernent l'emploi des symboles de composition", (Introduction de "Catégories et Structures", par C. Ehresmann, Dunod, Paris 1965).

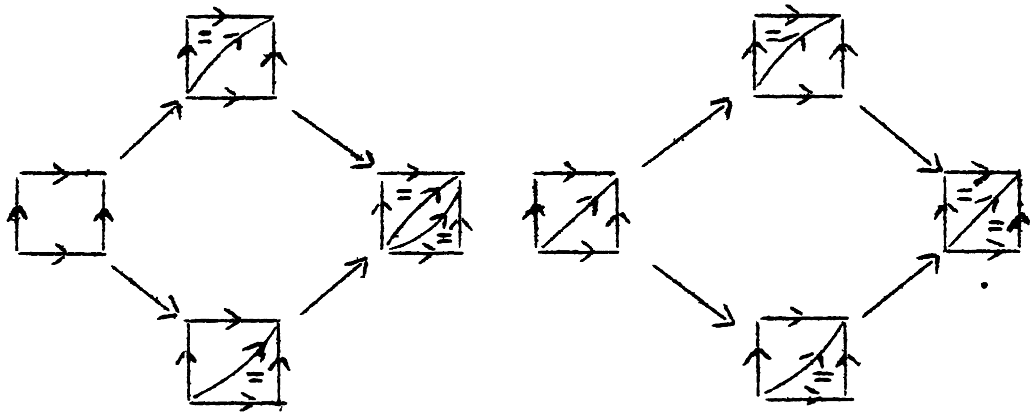
Dans la suite, pour désigner les cinq types précédents de carrés dans G , on utilise donc les cinq symboles respectifs suivants: C_0 , C_1 , C_2 , C_3 , C_4 ; la notation générique étant simplement C .
Dans ces conditions, l'ensemble des carrés de type C de G est noté CG .

Etant donné un carré de type C , soit c_C , il détermine un carré de type C_0 sous-jacent, noté simplement c .
Inversement, étant donné c de type C_0 , il existe au plus un carré c_C de type C ayant c pour carré de type C_0 sous-jacent.

Les cinq types cités précédemment s'impliquent les uns les autres selon le schéma suivant:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & C_2 \arrow[dl] & & \\
C_0 & & C_3 \arrow[ul] \arrow[dl] & & C_4 \arrow[ll] \\
 & C_1 \arrow[ul] & &
\end{tikzcd} ,$$

ce qui doit être rapproché, ici, du fait que les deux diagrammes suivants représentent des sommes amalgamées dans la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs:



2.2. Les graphes multiplicatifs (doubles) □G .

Soit G un graphe multiplicatif et soient

$$c = \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "y"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "a"] \arrow[r, "x"'] & \cdot \arrow[u, "b"'] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad c' = \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "y'"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "a'"] \arrow[r, "x'"'] & \cdot \arrow[u, "b'"'] \end{tikzcd}$$

deux carrés de type C_0 dans G ; le composé <u>horizontal</u> de c et c' , noté $c'..c$ est défini si, et seulement si, $a' = b$ et $y'.y$, $x'.x$ sont définis dans G ; dans ce cas le composé est:

$$c'..c = \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "y'.y"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "a"] \arrow[r, "x'.x"'] & \cdot \arrow[u, "b'"'] \end{tikzcd} \qquad .$$

Dans l'ensemble CG , la loi de composition horizontale se précise de la manière suivante:

- c_C et c'_C sont composables si, et seulement si, $c'..c$ est défini et $(c'..c)_C$ existe; dans ce cas on pose $c'_C..c_C = (c'..c)_C$.

Avec les notations précédentes pour c et c' , remarquons que, si les composés $y.a$, $y'.a'$, $(y'.y).a$ et $(b'.x').x$ sont définis, si $b'.(x'.x)$ ne l'est pas, alcrs

$c'_{C_1}..c_{C_1}$ est défini, tandis que $c'_{C_2}..c_{C_2}$, et a fortiori $c'_{C_3}..c_{C_3}$, ne le sont pas; pourtant c'_{C_3} et c_{C_3} existent bien. On peut concevoir que c_{C_4} et c'_{C_4} existent, que de plus $a' = b$, $y'.(y.a) = y'.(a'.x) = (b'.x').x = (y'.a').x$, bien que $c'..c$ ne soit pas défini.

En échangeant les rôles joués par (b,a) et (y,x) dans un carré c , on obtient un carré symétrique, noté $c*$, (précisément, on permutte a et x , b et y). Par définition, on dit que le composé <u>vertical</u> $c':c$ est défini si, et seulement si, le composé horizontal $c'*..c*$ est défini et, dans ce cas, on pose $c':c = (c'*..c*)*$.

A côté de la nature des carrés d'un graphe multiplicatif (types C_0 , C_1 , C_2 , C_3 , C_4), il y a la façon de les composer: on vient de définir les lois $..$ et $:$; celles-ci peuvent être renforcées de plusieurs façons, que nous indiquons par un symbole adéquat, dans le cas horizontal, en nous limitant aux seuls cas utiles à la description de toutes les structures multiplicatives unitaires bi-fermées de $\sqcap$. Ainsi:

- $c' ..\_1 c$ est défini si, et seulement si, $c'..c$ est défini et $(y'.y).a$ et $y'.(y.a)$ sont définis et égaux;
- $c' ..\_2 c$ est défini si, et seulement si, $c'..c$ est défini et $b'.(x'.x)$ et $(b'.x').x$ sont définis et égaux;
- $c' ..\_3 c$ est défini si, et seulement si, $c' ..\_1 c$ et $c' ..\_2 c$ sont définis;

dans tous ces cas, le composé est encore $c'..c$.
Ces lois de composition binaires partielles, $..\_1$, $..\_2$,

$\cdot\cdot_3$, se précisent encore dans CG , comme on l'a montré pour la loi $\cdot\cdot$. Elles se symétrisent aussi en des lois verticales $:_1$, $:_2$, $:_3$.

Dans la suite, nous utilisons les notations génériques suivantes:

— pour une loi horizontale ,

| pour une loi verticale ,

$—^*$ pour la symétrisée d'une loi horizontale (c'est donc une loi verticale),

$|^*$ pour la symétrisée d'une loi verticale (c'est donc une loi horizontale).

On établit facilement la:

<u>Proposition</u>. <u>Pour que</u> (CG, —) <u>et</u> (CG, $—^*$) <u>soient des graphes multiplicatifs, quel que soit le graphe multiplicatif</u> G , <u>il faut et il suffit que, dans le tableau suivant, figure le chiffre</u> 1 <u>au point de coordonnées</u> (C, —) :

(T)

— \ C	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
$\cdot\cdot$	1	1	1	1	1
$\cdot\cdot_1$	0	1	0	1	1
$\cdot\cdot_2$	0	0	1	1	1
$\cdot\cdot_3$	0	0	0	1	1

On établit tout aussi aisément que:

Proposition. Si (CG, —) *et* (CG, |*) *sont des graphes multiplicatifs, alors* (CG, — , |) *est un graphe multiplicatif double, dans le sens que l'égalité suivante a lieu dès que les composés (entre éléments de* CG) *écrits sont bien définis:*

$$(y' \,\text{—}\, y) \mid (x' \,\text{—}\, x) = (y' \mid x') \,\text{—}\, (y \mid x) \; .$$

Ceci définit donc 1+4+4+16+16 = 41 *graphes multiplicatifs doubles, dont* 13 *sont symétriques, c'est-à-dire satisfont l'égalité des lois* $\text{—}^* = \mid$.

Le graphe multiplicatif double $(C_i G, \cdot\cdot_j , :_k)$ est noté plus simplement $\boxtimes^i_{jk} G$ (où .. et : correspondent à $j = 0$ et $k = 0$). On définit ainsi 41 foncteurs $\boxtimes^i_{jk}$ de la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs entre graphes multiplicatifs vers la catégorie $\mathcal{F}_2$ des foncteurs doubles entre graphes multiplicatifs doubles: nous les appelons des *opérateurs tensoriels* et un graphe multiplicatif double du type $\boxtimes^i_{jk} G$ s'appellera une *structure tensorielle*.

Pour parvenir à décrire (et classifier) toutes les structures multiplicatives unitaires bi-fermées sur $\mathcal{F}$ il nous manque encore un opérateur tensoriel que nous allons décrire maintenant.
Les 41 graphes multiplicatifs doubles précédents se présentent tous comme constitués d'un ensemble (CG) muni de deux lois de graphes multiplicatifs permutables (— et |). Disons que de tels graphes multiplicatifs doubles sont *réductibles*.
Par contre, la $42^{\text{ème}}$ structure tensorielle associée à G ,

notée $\boxtimes'G$, fournit un exemple de graphe multiplicatif double non réductible.
La voici décrite de façon "ensembliste" (ceci est voulu, bien que ce ne soit pas la manière la plus satisfaisante de présenter les choses!): parmi toutes les structures sous-jacentes naturelles à $\boxtimes'G$, on trouve la $41^{\text{ème}}$ structure tensorielle $\boxtimes^4_{33}G$; cette $41^{\text{ème}}$ structure tensorielle admet d'ailleurs $\boxtimes'G$ comme sous-structure! De plus, l'ensemble des couples (c',c) de carrés de type C_4, composables pour la loi $:_3$,
—> est muni de la loi de composition horizontale $..'$ pour laquelle $(c'_1,c_1)\ ..'\ (c',c)$ est défini si, et seulement si, $C = (c'_1 \ ..{}_3\ c') :_3 (c_1 \ ..{}_3\ c\ ) = (c'_1 :_3 c_1)\ ..{}_3\ (c' :_3 c)$ est défini et les diagonales de c et c'_1 sont composables et de composé la diagonale de C. Dans ce cas, le composé $(c'_1\ ,\ c_1)\ ..'\ (c',c)$ est simplement $(c'_1 \ ..{}_3\ c', c_1 \ ..{}_3\ c)$.
Enfin, l'ensemble des couples $(c'\ ,c)$ de carrés de type C_4, composables pour la loi $..{}_3$, est muni d'une loi de compo-
—> sition verticale $:'$ analogue qui fait de l'application

$$((c'_1,c_1),(c',c)) \xrightarrow[s]{\qquad} ((c'_1,c'),(c_1,c))$$

une bijection entre l'ensemble des couples (de couples composables) composables pour la loi $..'$ et l'ensemble des couples (de couples composables) composables pour la loi $:'$.

Avant de classifier toutes les structures multiplicatives unitaires bi-fermées sur $/\!\overline{T}$ (ce qui sera fait au 2.3), revenons brièvement sur les graphes multiplicatifs doubles et, en particulier sur ceux qui sont réductibles.
Soit $(\mathcal{Z},\top)$ et $(\mathcal{Z},\perp)$ deux graphes multiplicatifs de même ensemble sous-jacent $\mathcal{Z}$. On peut munir l'ensemble $\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z}$ de la loi de composition naturelle déduite de $\perp$ et que nous no-

tons encore $\perp$: $(\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z}) \underset{\perp}{*} (\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z})$ est l'ensemble des couples de couples $((z'_1,z_1),(z',z))$ tels que $z'_1 \top z_1$, $z' \top z$, $z'_1 \perp z'$, $z_1 \perp z$ et $(z'_1 \perp z') \top (z_1 \perp z)$ soient définis et dans ce cas on pose $(z'_1,z_1) \perp (z',z) = (z'_1 \perp z', z_1 \perp z)$.
De même, on munit $\mathcal{Z} \underset{\perp}{*} \mathcal{Z}$ d'une structure naturelle déduite de $\top$ et encore notée $\top$.
Se donner un sous-graphe multiplicatif $(\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z}, \perp')$ de $(\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z}, \perp)$ (donc de même ensemble sous-jacent $\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z}$) a pour "effet" de "réduire l'ensemble des couples (de couples) composables" sans changer "la valeur des composés" :

- $(\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z}) \underset{\perp'}{*} (\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z}) \subset (\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z}) \underset{\perp}{*} (\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z})$,
- $(z'_1,z_1) \perp' (z',z) = (z'_1 \perp z', z_1 \perp z)$.

Posons alors les définitions suivantes:

1. Un <u>bigraphe multiplicatif</u> est la donnée d'un triplet $B = (\mathcal{Z}, \top, \perp)$ tel que:

   (i). $(\mathcal{Z}, \top)$ et $(\mathcal{Z}, \perp)$ sont des graphes multiplicatifs et $(\mathcal{Z}_0^{\perp}, \top)$ et $(\mathcal{Z}_0^{\top}, \perp)$ en sont des sous-graphes multiplicatifs,

   (ii). $d_\top$, $c_\top$: $(\mathcal{Z}, \perp) \longrightarrow (\mathcal{Z}, \perp)$ et $d_\perp$, $c_\perp$: $(\mathcal{Z}, \top) \longrightarrow (\mathcal{Z}, \top)$ sont des foncteurs;

2. Un <u>graphe multiplicatif double</u> (ou <u>graphe multiplicatif dans</u> $\mathbb{F}$) est la donnée d'un quintuplet $D = (\mathcal{Z}, \top, \perp ; \top', \perp')$ tel que:

   (i). $(\mathcal{Z}, \top, \perp)$ est un bigraphe multiplicatif,

   (ii). $(\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z}, \perp')$ et $(\mathcal{Z} \underset{\perp}{*} \mathcal{Z}, \top')$ sont des sous-graphes multiplicatifs de $(\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z}, \perp)$ et $(\mathcal{Z} \underset{\perp}{*} \mathcal{Z}, \top)$ respectivement,

   (iii). l'application s qui à $((z'_1,z_1),(z',z))$ as-

socie $((z'_1,z'),(z_1,z))$ établit une bijection en
$\mathcal{Z}_4 = (\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z}) \underset{\perp'}{*} (\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z})$ et $(\mathcal{Z} \underset{\perp}{*} \mathcal{Z}) \underset{\top'}{*} (\mathcal{Z} \underset{\perp}{*} \mathcal{Z}) = s(\mathcal{Z}_4)$,

(iv). $\top : (\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z} , \perp') \longrightarrow (\mathcal{Z},\perp)$ et $\perp : (\mathcal{Z} \underset{\perp}{*} \mathcal{Z}, \top') \longrightarrow (\mathcal{Z},\top)$ sont des foncteurs.

Les morphismes entre bigraphes multiplicatifs (resp. graphes multiplicatifs doubles) se définissent bien naturellement; on obtient donc deux catégories, notées respectivement $\mathcal{M}_{\underline{2}}$ et $\mathcal{M}_2$.

Remarquons que, dans les définitions ci-dessus, certaines conditions sont redondantes, mais ceci est voulu pour mettre en évidence la symétrie des structures en question.

Le foncteur d'oubli $U : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_{\underline{2}}$ admet un adjoint L_* et un co-adjoint L^* . Pour décrire les graphes multiplicatifs doubles libre L_*B et colibre L^*B engendrés par le bigraphe multiplicatif $B = (\mathcal{Z}, \top , \perp)$, il suffit pratiquement d'expliciter, dans chacun des cas, l'ensemble $\mathcal{Z}_4$ (puis de vérifier les conditions voulues ...):

- dans le cas libre, $\mathcal{Z}_4$ est le sous-ensemble de $(\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z}) \times (\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z})$ formé des éléments ayant l'une des formes $((z'_1,z_1),(d_\perp z'_1,d_\perp z_1))$ ou $((c_\perp z',c_\perp z),(z',z))$ ou encore $((c_\top z_1,z_1),(c_\top z,z))$ ou enfin $((z'_1,d_\top z'_1),(z',d_\top z'))$;

- dans le cas colibre, $\mathcal{Z}_4$ est le sous-ensemble de $(\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z}) \times (\mathcal{Z} \underset{\top}{*} \mathcal{Z})$ formé des éléments $((z'_1,z_1),(z',z))$ tels que $(z'_1 \top z_1) \perp (z' \top z)$ et $(z'_1 \perp z') \top (z_1 \perp z)$ soient définis et égaux.

Soit D un objet de $\mathcal{M}_2$; posons $B = U(D)$; alors L_*B est une sous-structure de D et D une sous-structure de L^*B . Les foncteurs L_* et L^* sont des foncteurs sections globales de U (l'analogie avec la topologie est évidente: topologies discrète et grossière). Les graphes multiplicatifs doubles <u>réductibles</u> sont les objets de la forme $L*B$. Dans la description des structures tensorielles, on a implicitement identifié $/\overline{\sqcap}_{\underline{2}}$ et $L*(/\overline{\sqcap}_{\underline{2}})$: c'est bien en ce sens qu'on a dit des structures tensorielles $\boxtimes^{i}_{jk}G$ qu'elles étaient réductibles et qu'aussi $\boxtimes^{4}_{33}G$ était sous-jacente à $\boxtimes' G$.

2.3. <u>Les foncteurs "Hom internes" et produits tensoriels</u>.

Etant donnés deux graphes multiplicatifs X et Y, on désigne par (X,Y) l'ensemble des foncteurs de X vers Y. Etant donné un graphe multiplicatif double $D = (\not{Z}, \top, \perp ; \top', \perp')$ et un graphe multiplicatif Y, on définit un nouveau graphe, noté $/Y,D/$, de la manière suivante: l'ensemble sous-jacent à $/Y,D/$ est $(Y,\not{Z})$, en convenant que $\not{Z}$ est muni de la loi $\top$; "l'autre loi" $(\perp, \perp')$ sert à définir la loi de composition de $/Y,D/$, notée aussi $\underline{\perp}$, en imposant que, si F et $G : Y \longrightarrow \not{Z}$ sont deux foncteurs, le composé $F \perp G$ est défini si, et seulement si, $(F(y),G(y)) \in \not{Z} \underset{\perp}{*} \not{Z}$, pour tout $y \in Y$, et $((F(y'),G(y')),(F(y),G(y)))$ $(\not{Z} \underset{\perp}{*} \not{Z}) \underset{\top'}{*} (\not{Z} \underset{\perp}{*} \not{Z})$, pour tout $(y',y) \in Y * Y$; dans ce cas, on pose $(F \perp G)(y) = F(y) \perp G(y)$ et on constate d'une part que $F \perp G$ est bien un foncteur de Y vers Z et, d'autre part, que $/Y,D/ = ((Y,D), \perp)$ est bien un graphe multiplicatif.
Soient alors deux graphes multiplicatifs Y et Z. A tout opérateur tensoriel $\boxtimes$ correspond un "Hom interne" que nous notons volontairement $\boxtimes(Y,Z)$ et qui est défini par:

$$\boxtimes(Y,Z) = /Y,\boxtimes Z/ .$$

A chaque opérateur tensoriel $\boxtimes$ correspond maintenant un "produit tensoriel" , noté aussi $\boxtimes$, dont nous donnons ici une définition explicite, en fonction des 42 valeurs possibles de $\boxtimes$, et ce lorsque X et Y sont deux graphes multiplicatifs donnés:

- l'ensemble sous-jacent à $X \boxtimes^{i}_{jk} Y$ est

  + $X \times Y_o \cup X_o \times Y = b(X \times Y)$, si $i = 0$,

  + $X \times Y$, si $i = 1,2,4$,

  + la somme fibrée $X \times Y \bigvee_{b(X \times Y)} X \times Y$ de l'inclusion $b(X \times Y) \hookrightarrow X \times Y$ avec elle-même (alors nous notons $(x,y)_1$ et $(x,y)_2$ les deux copies distinctes du même couple (x,y) de $(X \times Y)$), lorsque $i = 3$;

- l'ensemble sous-jacent à $X \boxtimes' Y$ est $X \times Y$,

- dans chacun de ces cas les applications source et but sont évidentes et les composés triviaux aussi;

- pour décrire les couples composables non triviaux de $X \boxtimes Y$, nous utilisons, par convention, les notations suivantes:

  + " . " est une unité générique,

  + les couples (de couples) écrits dans la suite sont censés être composables dans le graphe multiplicatif produit cartésien $X \times Y$,

  + dans ce cas, la valeur du composé est la même que dans ce produit cartésien (elle ne sera donc explicitée que lorsque $i = 3$, pour préciser l'indice 1 ou 2),

par exemple, si nous écrivons $((x',.)(x,y))$, ceci signifie que:

+ (x',x) appartient à $X * X$ et y appartient à Y ,

+ $c(y) = .$,

+ tous les couples composables de ce genre sont retenus comme couples composables pour la structure décrite et la valeur du composé est $(x'.x,y)$;

- pour tout $0 \leqslant i \leqslant 4$, tout $0 \leqslant j \leqslant 3$ et tout $0 \leqslant k \leqslant 3$, les couples (de couples) $((x',.),(x,.))$ et $((.,y'),(.,y))$ sont composables dans $X \boxtimes^i_{jk} Y$,

- les couples composables supplémentaires de $X \boxtimes^i_{jk} Y$ sont, en fonction des valeurs de i , j , k :

+ $((.,y),(x,.))$, dès que $i = 1$,

+ $((x,.),(.,y))$, dès que $i = 2$,

+ $((.,y),(x,.))$ et $((x,.),(.,y))$, dès que $i = 4$,

+ $((.,y'),(x,y))$, dès que $i \neq 3$ et $j = 1$,

+ $((x',y'),(.,y))$, dès que $i \neq 3$ et $j = 2$,

+ $((.,y'),(x,y))$ et $((x',y'),(.,y))$, dès que $i \neq 3$ et $j = 3 = 2 + 1$,

+ $((x',.),(x,y))$, dès que $i \neq 3$ et $k = 1$,

+ $((x',y'),(x,.))$, dès que $i \neq 3$ et $k = 2$,

+ $((x',.),(x,y))$ et $((x',y'),(x,.))$, dès que $i \neq 3$ et $k = 3 = 2 + 1$,

+ $((.,y),(x,.))$ (dont le composé est $(x,y)_1$) et $((x,.),(.,y))$ (de composé $(x,y)_2$) , dès que $i = 3$,

+ $((.,y'),(x,y)_1)$ (de composé $(x,y'.y)_1$) dès que $i = 3$ et $j = 1$,

+ $((x',y')_2,(.,y))$ (de composé $(x',y'.y)_2$) dès que $i = 3$ et $j = 2$,

+ $((.\ ,y'),(x,y)_1)$ (de composé $(x,y'.y)_1$) et $((x',y')_2,(.,y))$ (de composé $(x',y'.y)_2$) , dès que $i = 3$ et $j = 3 = 2 + 1$,

+ $((x',.),(x,y)_2)$ (de composé $(x'.x,y)_2$) , dès que $i = 3$ et $k = 1$,

+ $((x',y')_1,(x,.)$ (de composé $(x'.x,y')_1$),dès que $i = 3$ et $k = 2$,

+ $((x',.),(x,y)_2)$ (de composé $(x'.x,y)_2$) et $((x',y')_1,(x,.))$ (de composé $(x'.x,y')_1$),dès que $i = 3$ et $k = 3 = 2 + 1$;

- les couples composables de $X \boxtimes' Y$ sont les $((x',y'),(x,y))$, autrement dit, $X \boxtimes' Y$ est le produit cartésien .

Ayant un opérateur tensoriel $\boxtimes$, on définit son symétrique $\boxtimes^*$ en posant $\boxtimes^* = \boxtimes^i_{kj}$, si $\boxtimes = \boxtimes^i_{jk}$, et $\boxtimes^* = \boxtimes'$, si $\boxtimes = \boxtimes'$.

Avec les notations précédentes, nous pouvons donc énoncer:

<u>Théorème</u>. <u>Quelle que soit la valeur prise par le symbole</u> $\boxtimes$ (<u>parmi les</u> 42 <u>possibles</u> $\boxtimes^i_{jk}$ et $\boxtimes'$), <u>quels que soient les graphes multiplicatifs</u> X , Y , Z , <u>les égalités</u> $W(F)(x,y) = F(x)(y)$ <u>et</u> $W^*(F)(x,y) = F(y)(x)$ <u>définissent des bijections naturelles en</u> X , Y , Z :

$$(X,\boxtimes(Y,Z)) \xrightarrow[\sim]{W} (X\boxtimes Y,Z) \xleftarrow[\sim]{W^*} (Y,\boxtimes^*(X,Z)) ,$$

<u>de sorte que le bifoncteur</u> $- \boxtimes - : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ <u>détermine une structure multiplicative bi-fermée unitaire sur</u> $\mathcal{T}$

(d'unité 1) dont $\boxtimes(-,-)$ et $\boxtimes^*(-,-)$ sont les fermetures. Ceci munit donc $\overline{/T}$ de 42 structures multiplicatives bi-fermées unitaires: il n'y en a pas d'autres.

Preuve. Elle est évidente si l'on veut bien se convaincre que les symboles "préférés" du lexique des notations sont effectivement préférables. En effet, ils suggèrent aussitôt les seules formes possibles de co-graphes multiplicatifs doubles standards dans $\overline{/T}$ (au sens de "Fermeture standard de catégories algébriques" , par F. Foltz et C. Lair, dans les Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, Vol. XVIII,1 , Amiens 1977).

Remarquons, par contre (et pour des raisons analogues), qu'il y a encore exactement 13 structures multiplicatives unitaires seulement fermées à gauche et 13 structures multiplicatives unitaires seulement fermées à droite (toutes d'unité à droite et à gauche 1) sur la catégorie $\overline{/T}$:

- pour les "structures gauches", le produit tensoriel est défini par $X \boxtimes^i_k Y = X \boxtimes^i_{0k} \underline{Y}$, lorsque le chiffre 1 figure sur la colonne i et la ligne k dans le tableau (T) précédent,

- pour les "structures droites", le produit tensoriel est défini par $X \boxtimes^i_j Y = \underline{X} \boxtimes^i_{j0} Y$, lorsque le chiffre 1 figure sur la colonne i et la ligne k du tableau (T).

Précisons que, sur ces 68 produits tensoriels:

- il y en a 14 qui sont symétriques, ce sont les $\boxtimes^i_{jj}$ et $\boxtimes'$,
- la somme fibrée de $\boxtimes^1_{jk}$ et $\boxtimes^2_{j'k'}$ sur $\boxtimes^0_{00}$ est $\boxtimes^3_{j+j',k+k'}$,

- les seuls produits tensoriels associatifs sont $\boxtimes^{0}_{00}$ et $\boxtimes'$ (dans ce cas, les adjonctions de fermeture peuvent donc s'écrire de façon interne : $\boxtimes(X,\boxtimes(Y,Z)) \simeq \boxtimes(X\boxtimes Y,Z) \simeq \boxtimes(Y,\boxtimes(X,Z))$).

Pour le prouver, si l'on veut éviter d'avoir à dessiner des cubes, il suffit de procéder comme suit:

- si $i \neq 0$, en considérant $((.,(x,y)),(x',(.,.)))$ on voit que $i = 1$ est à éliminer et en considérant $((x,(.,.)),(.,(x',y')))$ on voit que $i = 2$ est aussi à exclure,

- on en déduit donc que $i \geqslant 3$ et aussi $j = k = 3$,

- si $i = 3$, en considérant $((.,(x,y)_1),(x',(.,.)))$ ainsi que $((.,(x,y)_2),(x',(.,.)))$, on prouve aisément que $(.,(x,y)_1)$ et $(.,(x,y)_2)$ devraient avoir même image $((.,x),y)_1$, ce qui n'est pas possible,

- il reste $i = 4$ (et $j = k = 3$) , mais en considérant $((x,(x',y')),(.,(x_1,y_1)))$, on trouve encore une impossibilité.

3. Fibrations et d -foncteurs.

3.1. Aspect syntaxique de certains morphismes de $\mathcal{A}$.

Sans formaliser les questions de taille, indiquons simplement que, parmi les objets de $\mathcal{A}$, on trouve aussi bien les "petits" graphes multiplicatifs G , H , K ... que les "grosses" catégories comme E , $\tilde{E}$, R , lorsque:

- R est la catégorie des relations entre ensembles,
- $\tilde{E}$ est la sous-catégorie de R formée des applications partielles,
- E est la sous-catégorie de $\tilde{E}$ formée des applications .

Soit $A: G \longrightarrow R$ une application (morphisme de $\mathcal{A}$). Il lui correspond le graphe multiplicatif H_A défini comme suit:

- ses éléments sont les triplets (y,f,x) où $f: e \longrightarrow e'$ appartient à G , x appartient à $A(e)$, y appartient à $A(e')$ et $x/A(f)/y$,qu'il faut lire " $A(f)$ met en relation x et y " ;

- la composition dans H_A s'effectue ainsi: $(z,g,y').(y,f,x)$ est défini si, et seulement si, $y' = y$, $g.f$ est défini dans G et $x/A(g.f)/z$; dans ce cas, le composé est $(z,g.f,x)$.

L'application $p_A: H_A \longrightarrow G$,définie par $p_A(y,f,x) = f$, est un foncteur fidèle.

Inversement, soit $p: H \longrightarrow G$ un foncteur fidele. Il lui correspond l'application $A_p: G \longrightarrow R$ définie comme suit:

- $A_p(e) = p^{-1}(e) \cap H_o$,
- pour $f: e \longrightarrow e' \in G$, alors $x/A_p(f)/y$ équivaut à l' existence d'un $h \in H$ tel que $d(h) = x$, $c(h) = y$ et $p(h) = f$.

Le problème de l'équivalence entre la donnée d'une application $G \longrightarrow R$, d'une part, et la donnée d'un foncteur fidèle $H \longrightarrow G$, d'autre part, pose celui de la définition "naturelle" des morphismes; nous sommes ainsi renvoyés aux structures tensorielles $\boxtimes R$.

Puisque R est une catégorie, il n'y a plus que deux structures tensorielles à distinguer: $\boxtimes^4_{33}R$ et $\boxtimes' R$ (types de carrés: C_3 , ou non commutatif, et C_4 , ou commutatif; dans ces deux cas, il n'y a qu'une seule loi de composition horizontale possible et une seule loi de composition verticale possible). A ce sujet, nous renvoyons à "Algebraic categories with few monoïdal biclosed structures or none", par F. Foltz, C. Lair, G. M. Kelly, dans le Journ. of pure and applied Algebra, 17, 1980, 171-177.

Soit $t: A \longrightarrow A' : G \longrightarrow R$ une transformation (resp. une transformation naturelle); on lui fait correspondre une application $T: G \longrightarrow C_3R$ (resp. $T: G \longrightarrow C_4R$) en posant:

$$T(f) = \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "A'(f)"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "t_e"] \arrow[r, "A(f)"'] & \cdot \arrow[u, "t_{e'}"'] \end{tikzcd}$$

si $f: e \longrightarrow e'$ appartient à G .
Inversement, à une application $T: G \longrightarrow C_3R$ (resp. $T: G \longrightarrow C_4R$) on fait correspondre une transformation (resp. une transformation naturelle) entre applications de G vers R. Dans la suite, nous employons indifféremment l'un ou l'autre de ces points de vue (familles $t(e)_{e \in G_0}$ / applications de G vers CR). Ces remarques valent aussi quand on remplace R par n'importe quelle autre catégorie (même non associative).

Soit toujours $t: A \longrightarrow A' : G \longrightarrow R$ une transformation entre applications. On a fait correspondre à A et A' les deux foncteurs fidèles $p_A: H_A \longrightarrow G$ et $p_{A'}: H_{A'} \longrightarrow G$.

Maintenant, on fait correspondre à t un span de foncteurs:

$$\begin{tikzcd} & H_t \arrow[dl, "q_A"'] \arrow[dr, "q_{A'}"] & \\ H_A & & H_{A'} \end{tikzcd} .$$

En effet, considérons les quintuplets (y',y,f,x',x) tels que:

- $f: e \longrightarrow e'$ appartient à G ,
- (y,f,x) appartient à H_A et (y',f,x') appartient à $H_{A'}$,
- $x/t_e/x'$ et $y/t_{e'}/y'$.

Deux tels quintuplets (y_1',y_1,f_1,x_1',x_1) et (y',y,f,x',x) sont composables si, et seulement si:

- $(y_1,f_1,x_1).(y,f,x)$ et $(y_1',f_1,x_1').(y',f,x')$ sont définis respectivement dans H_A et $H_{A'}$,

dans ce cas le composé n'est autre que $(y_1',y_1,f_1.f,x',x)$. L'ensemble de ces quintuplets, muni de cette loi de composition, devient un graphe multiplicatif H_t . Les foncteurs q_A et $q_{A'}$ sont définis, alors, comme suit:

- $q_A(y',y,f,x',x) = (y,f,x)$,
- $q_{A'}(y',y,f,x',x) = (y',f,x')$.

Ainsi, le carré

$$\begin{tikzcd} & H_t \arrow[dl, "q_A"'] \arrow[dr, "q_{A'}"] & \\ H_A \arrow[dr, "p_A"'] & & H_{A'} \arrow[dl, "p_{A'}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

est commutatif. De plus, le crochet de q_A et $q_{A'}$ vers le produit fibré de p_A et $p_{A'}$ est un monomorphisme.

Inversement, soit

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "q'"] & \\ H \arrow[dr, "p"'] & & H' \arrow[dl, "p'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

un carré commutatif de foncteurs tel que p et p' soient fidèles et que le crochet de (q,q') vers le produit fibré de (p,p') soit un monomorphisme (la fidélité de q et q' en découle alors). On lui fait correspondre:

- les applications A_p et $A_{p'}$: $G \longrightarrow R$ comme ci-dessus,
- la transformation $t: A_p \longrightarrow A_{p'}$ grâce à l'équivalence

$$x/t_e/x' \iff \exists\, \bar{x} \in T_0 \text{ tel que } \begin{cases} q(\bar{x}) = x \\ \text{et} \\ q'(\bar{x}) = x' \end{cases} .$$

Entre la non commutativité et la commutativité des carrés de R, il y a une notion intermédiaire, propre à cette catégorie: l'implication, liée à la relation d'inclusion entre ensembles (plus généralement, cette notion intermédiaire a un sens dès qu'on se trouve, à la place de R, dans un graphe multiplicatif "ordonné").

Introduisons simultanément notation, définition et terminologie. Soit (r_1, r', r, r_0) un carré dans R, de source r_0 et de but r_1. On dit que c'est un d -<u>carré</u> (ou <u>carré source</u>) si, et seulement si, $r'.r_0 \Longrightarrow r_1.r$ (l'implication part de la source), ce qu'on dessine ainsi:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "r'"] \arrow[dr, phantom, "\searrow\!\!\!\searrow"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "r_0"] \arrow[r, "r"'] & \cdot \arrow[u, "r_1"'] \end{tikzcd}$$

L'ensemble des carrés sources est une sous-catégorie C_dR de C_3R . On définit de même la sous-catégorie C_cR de C_3R formée des <u>carrés buts</u> (ou c -<u>carrés</u>). Bien sûr, on a l'égalité:

$$C_4R = C_dR \cap C_cR \quad .$$

Une transformation $T: G \longrightarrow C_3R$ est dite <u>naturelle à la source</u> (resp. <u>au but</u> ; <u>des deux côtés</u>) si, et seulement si, elle factorise à travers C_dR (resp. C_cR ; C_4R) . Pour abréger, on parle simplement de x-<u>transformation</u> (x pouvant être : vide, d , c).

Soit toujours $t: A \longrightarrow A' : G \longrightarrow R$ une transformation, $T: G \longrightarrow C_3R$ l'application correspondante et

$$\begin{tikzcd} & H_t \arrow[dl, "q_A"'] \arrow[dr, "q_{A'}"] & \\ H_A \arrow[dr, "p_A"'] & & H_{A'} \arrow[dl, "p_{A'}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

le carré de foncteurs (qu'on appellera aussi <u>relation entre les foncteurs fidèles</u> p_A <u>et</u> $p_{A'}$) associé par la construction ci-dessus. On montre alors sans peine que:

- T est une d -transformation si, et seulement si, $q_{A'}$ est d-étalant ,

- T est une c -transformation si, et seulement si, q_A est c-étalant,

Ici, pour un foncteur $q: H \longrightarrow G$, d-étalant (resp. c-étalant) signifie que, si $f \in G$ et $\bar{e} \in H_o$ sont tels que $q(\bar{e}) = d(f)$ (resp. $q(\bar{e}) = c(f)$),alors il existe $\bar{f} \in H$ satisfaisant $d(\bar{f}) = \bar{e}$ (resp. $c(\bar{f}) = \bar{e}$) et $q(\bar{f}) = f$.

Soient $t: A \longrightarrow A'$ et $t': A' \longrightarrow A''$ deux transformations entre applications de G vers R ; leur composée est définie point par point (voir la fin du §2) par l'égalité (dans R):

- pour tout $e \in G_o$, $(t't)_e = t'_e.t_e$.

En termes d'applications T et T' vers C_3R , c'est $T':T$ qui correspond à $t't$.
Soient

$$\begin{tikzcd}
& H_t \arrow[dl, "q_A"'] \arrow[dr, "q_{A'}"] & \\
H_A \arrow[dr, "p_A"'] & & H_{A'} \arrow[dl, "p_{A'}"] \\
& G &
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
& H_{t'} \arrow[dl, "\bar{q}_{A'}"'] \arrow[dr, "\bar{q}_{A''}"] & \\
H_{A'} \arrow[dr, "p_{A'}"'] & & H_{A''} \arrow[dl, "p_{A''}"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

les relations entre foncteurs fideles associées. Pour obtenir la relation $(\bar{\bar{q}}_A, \bar{\bar{q}}_{A''})$ entre p_A et $p_{A''}$ correspondant à $t't$, on doit:

- faire le produit fibré canonique de p_A et $p_{A''}$, soit $H_{AA''}$,

- faire le produit fibré $(s, \bar{s})$ de $(q_{A'}, \bar{q}_{A'})$,

- prendre le crochet de $(q_A.s, \bar{q}_{A''}.\bar{s})$,
- prendre l'image dans $H_{AA''}$ de ce crochet, soit $H_{t't}$.

Alors $\bar{\bar{q}}_A$ et $\bar{\bar{q}}_{A''}$ sont les restrictions à $H_{t't}$ des projections canoniques de $H_{AA''}$ vers H_A et $H_{A''}$ respectivement.

En résumé, nous voyons que la catégorie des transformations entre applications de G vers R est équivalente à celle des relations entre foncteurs fidèles de but G (pour être précis, il conviendrait ici de préciser les questions de taille).

Nous dirons aussi que l'équivalent syntaxique ([1]) de la notion de transformation entre applications vers R est la notion de relation entre foncteurs fidèles.

Sans décrire explicitement les règles de traduction "syntaxe-sémantique", ce que nous réservons pour un prochain travail, nous donnons ici quelques traductions parmi les plus utiles:

- à une application $G \longrightarrow \tilde{E}$ correspond un d-foncteur $p: H \longrightarrow G$ (i. e. $d(f) = d(g)$ et $p(f) = p(g)$ entraînent $f = g$; c'est la notion de foncteur d'hypermorphismes de C. Ehresmann),
- à une application $G \longrightarrow E$ correspond un étalement $p: H \longrightarrow G$ (i. e. un d-foncteur satisfaisant, en outre, $dp^{-1}(f) = p^{-1}(d(f))$),

---

([1]). De façon très informelle, j'appelle pour le moment syntaxe de G ce qui est au dessus de G et sémantique de G ce qui est en dessous. L'important est de connaître les règles de traduction.

- à la propriété pour $F: G \longrightarrow R$ d'être un foncteur, il correspond les propriétés, pour $p: H \longrightarrow G$, que l'on a notées (C) et (D) ci-dessous, dites de relévement des compositions et des décompositions respectivement:

(C). $d(g) = c(f)$ et $(p(g),p(f)) \in G * G$ entrainent $(g,f) \in H * H$,

(D). si $p(h) = \underline{g}.\underline{f}$ dans G , il existe au moins un couple $(g,f) \in H * H$ satisfaisant $(g,f) \in H * H$ et $p(g) = \underline{g}$, $p(f) = \underline{f}$ et $g.f = h$,

(si, en plus, p est un d-foncteur, le couple (g,f) de la propriété (D) est unique; de plus, un d-foncteur ayant ces propriétés (C) et (D) s'appellera une <u>fibration</u>),

- à une c-transformation $t: A \longrightarrow A' : G \longrightarrow E$ correspond un triangle au-dessus de G , soit

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p"'] & & H' \arrow[dl, "p'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

où p et p' sont fidèles et F est un foncteur <u>partiel</u> .

Un exemple typique (et dont nous aurons fondamentalement besoin par la suite) est fourni par le plongement de Yoneda, qui n'a plus rien de naturel (et c'est ... normal).
En effet, soit $e \in G_o$; en définissant Y_e par:

- $Y_e(e') = \{ f \in G \ / \ d(f) = e$ et $c(f) = e' \}$, si $e' \in G_o$,

- $Y_e(g): Y_e(e') \longrightarrow Y_e(e'')$ est l'application <u>partielle</u> "composition par g (quand elle est possible)" , si $g: e' \longrightarrow e''$ dans G ,

on voit que $Y_e : G \longrightarrow \tilde{E}$ est une application.
Soit $h: e_1 \longrightarrow e$; la famille $(Y_{h,e'})_{e' \in G_0}$ d'applications partielles $Y_{h,e'}: Y_e(e') \longrightarrow Y_{e_1}(e')$ décrites par les compositions à droite par h (quand c'est possible) détermine une transformation $Y_h: Y_e \longrightarrow Y_{e_1} : G \longrightarrow \tilde{E}$.
Alors il est clair qu'il revient au même de dire:

- soit que tous les Y_e sont des foncteurs ou que G est une précatégorie,

- soit que toutes les Y_h sont naturelles ou que G est une catégorie .

Rendre naturels les plongement de Yoneda de façon universelle est donc une expression beaucoup trop vague. En réalité, on peut le faire précisément de plusieurs façons. Nous ne les exposerons pas toutes ici, réservant la fin de ce paragraphe à une seule d'entre elles sous son aspect syntaxique.

3.2. Fibration libre engendree par un d-foncteur.

Soit $p: H \longrightarrow G$ un d-foncteur. Nous voulons construire un triangle commutatif de foncteurs

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "p"'] & & \bar{H} \arrow[dl, "\bar{p}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

où $\bar{p}$ est une fibration, qui soit universel parmi les triangles de source p et de but une fibration.

La construction de $\bar{p}$ consite en l'alternance dénombrable de deux constructions:

(a). forcer un foncteur de but fixé à avoir les propriétés (C) et (D) ,

(b). forcer un foncteur à être un d-foncteur.

Ces deux constructions sont traitées séparément et successivement.

Pour ce qui est du point (a) , soient C et D les deux ensembles suivants, attachés à $p: H \longrightarrow G$:

- C est l'ensemble des couples $(g,f) \in H \times H$ tels que $p(g).p(f)$ est défini dans G , $d(g) = c(f)$ et $g.f$ n'est pas défini dans H ,

- D est l'ensemble des triplets $(h,\underline{g},\underline{f}) \in H \times (G * G)$ tels que $p(h) = \underline{g}.\underline{f}$, il n'existe pas de couples $(g,f) \in H * H$ satisfaisant $h = g.f$, $p(g) = \underline{g}$, $p(f) = \underline{f}$ (on remarquera que cette dernière condition n'est pas essentielle pour la construction de $\bar{p}$; il peut être intéressant, quitte à partir d'un objet H_1 "plus gros" que celui qui suit, et dont on prendra de toute façon un quotient, d'éliminer des conditions du genre "il n'existe pas ... " qui ne s'esquissent pas projectivement).

On considère alors le graphe multiplicatif H_1 obtenu en ajoutant à H :

- de nouveaux éléments indexés par C et D ,

- de nouveaux couples composables.

Pour ce qui concerne les nouveaux éléments, à chaque $x = (g,f)$ appartenant à C , on fait correspondre un nouvel élément h_x

tel que $d(h_x) = d(f)$ et $c(h_x) = c(g)$. A chaque triplet $y = (h,\underline{g},\underline{f})$ appartenant à D , on fait correspondre trois nouveaux éléments b_y , e_y et a_y tels que $d(a_y) = d(h)$, $c(b_y) = c(h)$ et $d(b_y) = c(a_y) = e_y$ (ce dernier étant donc une nouvelle unité).

Pour ce qui concerne les nouveaux couples composables, mis à part les couples triviaux (où figurent une unité au moins), ce sont:

- les couples éléments de C pour lesquels on a $g.f = h_x$, si $x = (g,f)$,

- les couples (b_y,a_y) , où $y = (h,\underline{g},\underline{f}) \in D$, pour lesquels $b_y.a_y = h$.

On étend $p\colon H \longrightarrow G$ en un foncteur $p_1\colon H_1 \longrightarrow G$ en posant: $p_1(h_x) = p(g).p(f)$, $p_1(a_y) = \underline{f}$, $p_1(b_y) = \underline{g}$ et $p_1(e_y) = d(\underline{g}) = c(\underline{f})$; de sorte que l'inclusion $i_1\colon H \longrightarrow H_1$ est un foncteur et que $p_1.i_1 = p$.

Soit

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "i'"] \arrow[dr, "p"'] & & H' \arrow[dl, "p'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

un triangle commutatif de foncteurs tel que p' soit une fibration. Alors il existe un unique foncteur $i_1'\colon H_1 \longrightarrow H'$ satisfaisant $i_1'.i_1 = i'$ et $p'.i_1' = p_1$. Mais, à ce stade, p_1 n'est plus, en général,un d-foncteur; de plus, il ne vérifie pas encore les conditions (C) et (D) , bien qu'on les ait "forcées" une fois. Il est inutile d'itérer la construction précédente pour forcer les propriétés (C) et (D) à être satisfaites puisqu'un quotient ultérieur détruira (C) ! (les propriétés (C) et (D) seront récupérées à la limite dénombrable).

Pour ce qui concerne la construction (b) (forcer un foncteur à être un d-foncteur), soir $p: H \longrightarrow G$ un foncteur; désignons par $\underline{H}_S$ le graphe symétrisé du graphe orienté $\underline{H}$ dans lequel on distingue les deux sous-graphes orientés opposés $\underline{H}$ et $\underline{H}^{op}$.

Une d-connexion de source e et de but e' est un chemin dans $\underline{H}_S$ de source e et de but e' ayant une structure particulière relative à p . Pour décrire précisément celle-ci, il convient d'abord de définir certaines suites de multi-indices. Le symbole s^u , où $u = \pm 1$, désigne une suite finie non vide d'entiers consécutifs supérieurs ou égaux à 1 , croissante si $u = -1$, décroissante si $u = 1$; on convient d'écrire les suites de droite à gauche ; $d(s^u)$ est le premier nombre de la suite s^u (i. e. le plus à droite) et $c(s^u)$ est le dernier (i. e. le plus à gauche) ; si $u = -1$, on a $d(s^u) \leqslant c(s^u)$ et si $u = 1$, on a $d(s^u) \geqslant c(s^u)$.

On considère, alors, les suites de suites s^u , soit

$$s = (s_{2n}^{u_{2n}}, s_{2n-1}^{u_{2n-1}}, \dots, s_1^{u_1}) \quad ,$$

ayant les propriétés suivantes:

- $u_k = (-1)^k$, (alors, on pose pour simplifier, $s_k = s_k^{u_k}$),
- $d(s_1) = c(s_{2n})$ et $c(s_k) = d(s_{k+1})$, si $k = 1, \dots, 2n-1$.

A une telle suite de suites s , on fait correspondre la suite $\tilde{s}$ des couples (k,m) , où m figure dans s_k , totalement ordonnée par la relation suivante:

- $(k',m') \geqslant (k,m)$ si, et seulement si, $k' \geqslant k$ et, si $k' = k$, $m' \leqslant m$ lorsque $u_k = +1$, et $m' \geqslant m$, lorsque $u_k = -1$.

A tout élément (k,m) satisfaisant $u_k = -1$, on associe alors son <u>écran</u> dans la suite $\tilde{s}$ de la manière suivante: c'est l'élément (k^+,m) , où k^+ est le plus petit entier strictement plus grand que k satisfaisant $m \in s_{k^+}$; étant donnée la structure de s , l'écran (k^+,m) de (k,m) est toujours défini et $u(k^+) = 1$.

Nous pouvons maintenant définir une d-<u>connexion de</u> e <u>vers</u> e': c'est un chemin dans $\underline{H}_S$ de source e et de but e' ayant la propriété d'être indexé par un ensemble totalement ordonné du type $\tilde{s}$ décrit ci-dessus, soit $(f_{(k,m)})_{(k,m) \in \tilde{s}}$, tel que:

- $f_{(k,m)} \in \underline{H}$, si $u_k = 1$, et $f_{(k,m)} \in \underline{H}^{op}$, si $u_k = -1$,
- si (k^+,m) est l'écran de (k,m) , alors $p(f_{(k^+,m)}) = p(f_{(k,m)})$.

La relation r dans H, formée des couples (f,f') tels que:

- il existe une d-connexion de source $d(f)$ et de but $d(f')$,
- $p(f) = p(f')$,

est alors une relation d'équivalence bicompatible (i. e. compatible avec c et d et la composition) et compatible avec p , d'où l'on déduit un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\overline{r}"'] \arrow[dr, "p"'] & & \overline{H} \arrow[dl, "\overline{p}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

où $\overline{H} = H/r$.

Evidemment, le foncteur $\overline{p}$ est un d-foncteur et c'est la solution du problème universel de plongement d'un foncteur dans

un d-foncteur de même but (la vérification, aisée, est laissée au soin du lecteur).
C'est aussi la solution du problème universel de plongement d'un foncteur dans un d-foncteur de but éventuellement distinct.

En alternant les constructions (a) et (b) et en passant à la limite dénombrable, on construit donc la fibration libre engendrée par un foncteur.

On remarquera que ces constructions sont du type "extensions de Kan" , envisagées sous leur aspect syntaxique (d'autres disent "interne").
Je signale aussi que j'ai exposé ce genre de constructions au Séminaire Ehresmann en ... 1967.
Des textes, rédiges à cette époque, n'ont pu être publiés ...
En 1971, j'ai montré comment ces questions interviennent dans l'étude générale des structures algébriques: je renvoie le lecteur (interessé ou honnête) au seul texte que j'ai publié à ce sujet en 1972 (1) ; il y a d'ailleurs des erreurs et des maladresses facilement décelables.
Certains catégoriciens ont largement développé ce point de vue, avec élégance et succès: qu'ils se considèrent tous comme cités ici en bloc.
Pour plus de détails, j'invite le lecteur:

(i) à consulter les longues bibliographies qui existent sur le sujet,

(ii) à ne pas oublier d'y rayer la référence (1) ci-dessous, si, par hasard elle s'y trouvait.

---

(1).Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, Vol. XIII,1 et XIII,4 , Dunod, Paris 1972.

4. Associativités dans les graphes multiplicatifs.

4.1. La catégorie des parenthèsages.

Construisons, d'abord, une catégorie $\widetilde{/\!N}$.
Elle a pour objets les entiers strictement positifs. Ses flèches sont les suivantes:

- $\mathrm{Hom}(n,p) = \emptyset$, si $n < p$,
- $\mathrm{Hom}(n,n)$ n'a qu'un élément, l'identité,
- $\mathrm{Hom}(n,p)$, pour tout $p < n$, est constitué des $(n-p)$-uplets de nombres entiers $s = (k_{n-p}, \dots ,k_1)$ satisfaisant la condition $1 \leqslant k_i \leqslant n-i$, pour $i = 1,2, \dots ,n-p$.

La composition s'effectue par simple juxtaposition des suites d'entiers, l'identité en n devant s'interpréter comme "la suite vide en n " .
La notation $f: n \xrightarrow[s]{} p$ signifie que s est la suite d'entiers qui détermine f .

On peut donner de $\widetilde{/\!N}$ une autre description.
A l'objet n de $\widetilde{/\!N}$ faisons correspondre la catégorie $\underline{n}$ engendrée par le graphe $0 \xrightarrow[a_1]{} 1 \xrightarrow[a_2]{} 2 \dots \xrightarrow[a_n]{} n$.
Pour $m \geqslant n$, $\underline{n}$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{m}$.
Soit k un entier compris entre 1 et $n-1$; il lui correspond le foncteur "face" $F_k: \underline{n-1} \longrightarrow \underline{n}$, défini par:

- $F_k(a_i) = a_i$, si $i < k$,
- $F_k(a_k) = a_{k+1} . a_k$,
- $F_k(a_j) = a_{j+1}$, si $j > k$.

Evidemment, à une flèche $n \xrightarrow[(k_{n-p},\dots,k_1)]{} p$ de $\widetilde{/\!N}$ correspond une suite de tels foncteurs, à savoir:

$$\underline{p} \xrightarrow[F_{k_{n-p}}]{} \underline{p+1} \xrightarrow[F_{k_{n-p-1}}]{} \underline{p+2} \ \cdots \ \underline{n-1} \xrightarrow[F_1]{} \underline{n} \quad ,$$

de sorte que $\widetilde{\mathbb{N}}$ apparaît comme catégorie duale de la catégorie libre engendrée par les foncteurs F_k: $\underline{n-1} \longrightarrow \underline{n}$. Intuitivement, les flèches a_i doivent être regardées comme des "places possibles de flèches " dans une catégorie ou un graphe multiplicatif et la flèche duale de F_k: $\underline{n-1} \longrightarrow \underline{n}$ peut être interprétée comme "l'effacement d'un objet" (l'objet k de $\underline{n}$) correspondant à un placement élémentaire de parenthèses (composition de a_k et a_{k+1}). Géométriquement, $\widetilde{\mathbb{N}}$ apparait comme catégorie libre engendrée par le graphe suivant:

$$\begin{tikzcd}
1 & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & 4 \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] & \cdots \arrow[l, shift left=3] \arrow[l, shift left=1] \arrow[l, shift right=1] \arrow[l, shift right=3]
\end{tikzcd}$$

Comme les placements élémentaires de parenthèses pour aboutir à <u>une</u> disposition cohérente comportent un certain arbitraire dans l'ordre où ils sont effectués, nous devons procéder à un quotient de $\widetilde{\mathbb{N}}$ pour obtenir la catégorie, recherchée, des parenthèsages. Il nous faut, tout d'abord, introduire quelques opérations simples sur les suites d'entiers. Sur les couples d'entiers (m,n) , tels que $n \geqslant m+2$, on définit l'opérateur t , dont l'effet est donné par:

- $t(m,n) = (n-1,m)$.

L'opérateur inverse t^{-1} agit sur les couples d'entiers (p,q) tels que $p \geqslant q+1$ et son effet est évidemment donné par:

- $t^{-1}(p,q) = (q,p+1)$.

Ceci étant, on étend ces opérateurs partiels aux suites finies d'entiers de la manière qui suit. Soit $s = (k_{r+1}, \dots, k_1)$ une suite d'entiers positifs ou nuls et i un indice compris entre 1 et r ; si $\hat{t}$ désigne l'un des symboles t ou t^{-1} et si $\hat{t}(k_{i+1},k_i)$ est défini, on note $\hat{t}_i(s)$ la suite d'entiers obtenue à partir de s en y remplaçant (k_{i+1},k_i) par $(k'_{i+1},k'_i) = \hat{t}(k_{i+1},k_i)$.
Dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des suites finies d'entiers, on s'intéresse alors à l'équivalence $\mathcal{E}$ engendrée par les relations " $s = \hat{t}_i s$ " . Ainsi, on a $s \underset{\mathcal{E}}{\sim} s'$ si, et seulement si, l'une des conditions ci-dessous est vérifiée:

- $s = s'$,

- il existe une suite finie de symboles $\hat{t}_{n_1}, \dots, \hat{t}_{n_k}$ tels que $\hat{t}_{n_k} \dots \hat{t}_{n_1} s$ soit défini et égal à s' .

Dans la classe $s \bmod \mathcal{E}$ il existe un et un seul représentant, noté s_N , sur lequel l'opérateur t ne peut agir d'aucune façon (i.e. si $s_N = (k_r, \dots, k_1)$, alors on a $k_i \leqslant k_{i+1}+1$).Par exemple, si $s = (8,10,1,140,80,82,81)$, on obtient $s_N = (137,73,77,78,9,8,1)$. On dira que s_N est la <u>forme normale</u> de $s \bmod \mathcal{E}$ à laquelle on peut l'identifier.
Il est clair que l'équivalence $\mathcal{E}$ est compatible avec la loi de monoïde de $\mathbb{N}^*$, de sorte que $\mathbb{N}^*/\mathcal{E}$ est encore un monoïde, dont la loi de composition notée $\circ$ s'exprime en termes de formes normales par:

- $s'_N \circ s_N = (s'_N s_N)_N$.

La <u>catégorie des parenthèsages</u> $\mathcal{P}$ est, dans ces conditions, un quotient strict de $\widetilde{\mathbb{N}}$.
En effet, on remarque d'abord que si $f: n \xrightarrow[s]{} p$ est une

flèche de $\widetilde{/\!N}$ et si $\hat{t}_i s$ est défini, alors $n \xrightarrow[\hat{t}_i s]{} p$ est encore une flèche de $\widetilde{/\!N}$, qu'on note $\hat{t}_i f$; ainsi l'équivalence $\mathcal{E}$ se transporte en une équivalence $\tilde{\mathcal{E}}$ dans $\widetilde{/\!N}$, compatible et élémentaire (en ce sens que $f: m \xrightarrow[s]{} p$ et $g: n \xrightarrow[s']{} q$ sont équivalentes mod $\tilde{\mathcal{E}}$ si, et seulement si:

- $m = n$, $p = q$, $s \underset{\tilde{\mathcal{E}}}{\sim} s'$).

La catégorie $\mathcal{P} = \widetilde{/\!N} / \tilde{\mathcal{E}}$ que l'on obtient est celle des parenthèsages. L'interprétation de $\mathcal{P}$ est la suivante: les flèches de n vers 1 s'identifient naturellement aux dispositions cohérentes de parenthèses portant sur n places, une flèche $D: n \longrightarrow p$ s'identifie naturellement à la donnée d'un ensemble totalement ordonné de p dispositions cohérentes de parenthèses portant respectivement sur n_1 , n_2 ... , n_p places , où $n_1+n_2+ \dots +n_p = n$.

On remarquera aussi que:

- cette façon "catégorique" de décrire les parenthèsages est bien adaptée aux systèmes binaires partiels, non forcément associatifs, dont les graphes multiplicatifs sont un exemple typique;

- l'homomorphisme "longueur d'une suite" $l: /\!N^* \longrightarrow /\!N$ passe au quotient par $\mathcal{E}$, soit $l/\mathcal{E} : /\!N^*/\mathcal{E} \longrightarrow /\!N$; la catégorie $\widetilde{/\!N}$ (resp. $\mathcal{P}$) est une sous-catégorie de la catégorie comma de l (resp. $l/\mathcal{E}$).

On peut aussi munir la catégorie $\mathcal{P}$ d'une structure multiplicative.

Etant donnée une suite d'entiers $s = (k_r, \dots ,k_1)$ et un entier p , on désigne par s_p la suite d'entiers $(k_r+p, \dots ,k_1+p)$.

Si $f: m \xrightarrow[s]{} p$ et $g: n \xrightarrow[s']{} q$ sont deux flèches de $\widetilde{/N}$, on pose $f \boxtimes g = m+n \xrightarrow[s'_{,}s]{} p+q$, qui est bien encore une flèche de $\widetilde{/N}$. Cette loi $\boxtimes$ est associative, mais non commutative et elle ne définit pas un bifoncteur $\widetilde{/N} \times \widetilde{/N} \longrightarrow \widetilde{/N}$. Par contre, elle est comptatible avec l'équivalence $\widetilde{\mathcal{E}}$ et au quotient elle définit cette fois un bifoncteur, encore noté $\boxtimes$, de sorte que $(/\!\mathcal{P}, \boxtimes)$ est une catégorie multiplicative.

Soit G un graphe multiplicatif. On note L(G) la catégorie de ses <u>chemins</u>. Un morphisme $C: e \longrightarrow e'$ de L(G) est la donnée d'une suite $(f_n, \ldots, f_1)$ d'éléments de G satisfaisant:

- $d(f_1) = e$, $c(f_i) = d(f_{i+1})$, si $i = 1, \ldots, n-1$, et $c(f_n) = e'$.

Comme pour la catégorie $\widetilde{/N}$, la composition s'effectue par juxtaposition des suites, lorsque celle-ci a un sens. Les unités de L(G) s'identifient à celles de G et, pour $e \in G_o$, l'unité e de L(G) s'interprète comme la suite vide en e. Enfin, on remarquera que la construction L(-) est purement syntaxique (interpréter G comme une réalisation de l'esquisse de graphe multiplicatif).

On dispose maintenant d'une opération naturelle de la catégorie $/\!\mathcal{P}$ des parenthèsages sur la catégorie L(G) des chemins d'un graphe multiplicatif quelconque G.
En effet, soit $D: n \longrightarrow p$ une flèche de $/\!\mathcal{P}$ et soit $C: e \longrightarrow e'$ une flèche de L(G) de longueur n ; on dit que D opère sur C, et on note D*C le résultat de cette opération, si et seulement si les p dispositions cohérentes de parenthèses représentées par D s'appliquent effectivement au che-

min C (c'est-à-dire correspondent à un calcul que l'on peut effectuer dans G sur les éléments **constitutifs de** C); **on** obtient alors un chemin de longueur p : c'est D*C .
Il est clair que, si D': $p \longrightarrow q$ est un autre morphisme de $\wp$ et si D'*(D*C) ou (D'.D)*C est défini, les deux sont définis et égaux (on peut donc ici supprimer la parenthèse!).
On remarquera également que cette opération naturelle de $\wp$ sur L(-) est purement syntaxique.

Soit toujours G un graphe multiplicatif. Nous allons construire maintenant la 2-catégorie des programmes de G .
Si $D \in \wp$ opère sur $C \in L(G)$, nous disons que la "flèche formelle" $C \xrightarrow[D]{} D{*}C$ est un programme dans G (c'est un hypermorphisme dans la terminologie générale de C. Ehresmann).
L'opération de $\wp$ sur L(G) confère aussitôt à l'ensemble des programmes dans G une structure de catégorie ayant pour objets les chemins de G et pour laquelle la composition s'y fait en série.
La structure multiplicative de $\wp$ permet de composer les programmes en parallèle. En effet, soit C et C' des chemins composables, D et D' des éléments de $\wp$ et supposons D*C et D'*C' définis, alors on voit que $(D' \boxtimes D){*}(C'.C)$ est défini et égal au composé (D'*C').(D*C); dans ce cas nous disons que $C'.C \xrightarrow[D' \boxtimes D]{} (D'{*}C').(D{*}C)$ est le composé parallèle des programmes $C \xrightarrow[D]{} D{*}C$ et $C' \xrightarrow[D']{} D'{*}C'$.
L'ensemble des programmes dans G se trouve ainsi structuré en une 2-catégorie notée PLG : à chaque couple (e',e) d'unités de G correspond la catégorie PLG(e',e) qui a pour objets les chemins de e' vers e (on doit évidemment adjoindre aussi les O-morphismes).

4.2. Associativités.

On dispose d'une notion "naturelle" d'associativité. Supposons, en effet que G est un graphe multiplicatif et notons $N(G)$ la catégorie libre engendrée par G . Ehresmann l'a construite comme quotient de la catégorie libre des chemins propres $L[G]$ par l'équivalence bicompatible engendrée par la relation identifiant (g,f) et $(g.f)$, dès que $(g,f) \in G * G$. Désignons alors par $n_G \colon G \longrightarrow N(G)$ la "projection canonique" . Nous disons que G *est associatif* si, et seulement si, n_G est un monomorphisme.
Dans ces conditions, nous pouvons énoncer la:

Proposition. *Pour qu'un graphe multiplicatif* G *soit associatif, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite*:

(A). *Chaque composante connexe de chaque catégorie* $PLG(e',e)$ *contient au plus un objet* (i. e. un chemin de G) *de longueur* 1 .

Preuve. Soit $M(G)$ l'ensemble des composantes connexes des catégories $PLG(e',e)$ (entre autres éléments, il y a les composantes des chemins du genre (e) , où $e \in G_o$).
La composition en parallèle des programmes de G est compatible avec la relation de connexité; en effet, étant donnée une connexion $(D_n, \ldots, D_1)$ de C vers $\overline{C}$, on peut toujours, quitte à ajouter des programmes neutres aux endroits convenables, supposer que:

(i). n est assez grand et impair,

(ii). les programmes ont le sens indiqué, soit:

$+ \quad C_{k-1} \xrightarrow[D_k]{} C_k$, si k est impair,

$+ \quad C_{k-1} \xrightarrow[D_k]{} C_k$, si k est pair,

$+\ C_0 = C$ et $C_n = \overline{C}$.

Etant données deux connexions, l'une de C vers $\overline{C}$ et l'autre de C' vers $\overline{C}'$, grâce à la remarque précédente, on peut supposer qu'elles se présentent toutes deux comme suit:

$$C \xrightarrow[D_1]{} C_1 \xleftarrow[D_2]{} C_2 \ \cdots\cdots\ C_{n-1} \xrightarrow[D_n]{} \overline{C} \ ,$$

$$C' \xrightarrow[D'_1]{} C'_1 \xleftarrow[D'_2]{} C'_2 \ \cdots\cdots\ C'_{n-1} \xrightarrow[D'_n]{} \overline{C}' \ ,$$

alors, si $C'.C$ est défini dans $L(G)$, les composés $C'_i.C_i$ (et d'ailleurs les $C'_j.C_i$ aussi) le sont et

$$C'.C \xrightarrow[D'_1 \boxtimes D_1]{} C'_1.C_1 \xleftarrow[D'_2 \boxtimes D_2]{} C'_2.C_2 \ \cdots\cdots\ C'_{n-1}.C_{n-1} \xrightarrow[D'_n \boxtimes D_n]{} \overline{C}'.\overline{C}$$

met en connexion $C'.C$ et $\overline{C}'.\overline{C}$. Dans ce cas, $M(G)$, muni de la composition (passée au quotient) devient une catégorie dont les unités sont les classes des chemins (e) , où $e \in G_o$.
Le graphe multiplicatif G se plonge naturellement dans $M(G)$ en faisant correspondre à $f \in G$ la classe $m_G(f)$, modulo la connexité, du chemin (f) .
Puisque $(g,f) \xrightarrow[D_o]{} (g.f)$ est un programme dans G , lorsque $(g,f) \in G * G$ (D_o étant la classe de $2 \xrightarrow[(1)]{} 1$ dans $\wp$), il est clair que $m_G \colon G \longrightarrow M(G)$ est un foncteur.
Soit alors $F\colon G \longrightarrow B$ un foncteur de but une catégorie B ; soit $C = (f_n, \ldots ,f_1) \in L(G)$ et $\widetilde{C}$ la classe de C modulo la connexité ; si $\overline{F}$ est un prolongement possible de F à $M(G)$ le long de m_G , on doit nécessairement avoir:

$$\overline{F}(\widetilde{C}) = F(f_n). \ \ldots \ .F(f_1) \quad ;$$

ceci définit $\overline{F}$ car la quantité de droite ne dépend pas du re-

présentant C de $\tilde{\mathcal{C}}$ choisi, puisqu'elle est calculée dans une catégorie. Il est clair que $\overline{F}$ est un foncteur, de sorte que $M(G)$ est aussi catégorie libre engendrée par le graphe multiplicatif G et m_G le projecteur correspondant.
Donc il existe un isomorphisme unique $\gamma : M(G) \longrightarrow N(G)$ tel que $\gamma . m_G = n_G$; n_G est un mono si, et seulement si, m_G l'est et la condition (A) n'est qu'une autre formulation du fait que m_G est justement un mono. Ceci achève la preuve de la proposition.

On peut aussi définir d'autres notions d'associativité. L'associativité "traditionnelle" , portant sur trois éléments x , y , z , s'exprime ainsi pour les lois binaires partielles:

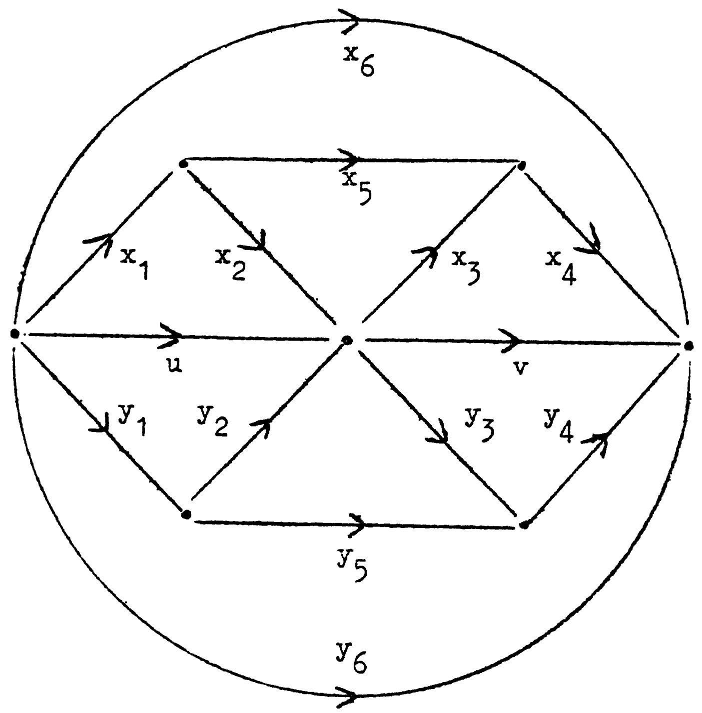
(tA). si $(x.y).z$ et $x.(y.z)$ sont définis, ils sont égaux.

Il est clair qu'un tel axiome a quelques conséquences dans un graphe multiplicatif mais il n'autorise pas, à lui seul, la suppression des parenthèses.
Quelques auteurs (Dedecker, en particulier) ont pensé à <u>renforcer</u> l'axiome (tA) en un axiome (fA) , que nous qualifions pourtant d'<u>axiome faible d'associativité</u>; nous l'énonçons, dans notre formalisme:

(fA). si D et $D' : n \longrightarrow 1$ sont des éléments de $\mathcal{P}$ tels que $D{*}C$ et $D'{*}C$ soient définis, alors $D{*}C = D'{*}C$.

Les axiomes (fA) et (A) ne sont pas équivalents comme le montre le contre exemple suivant d'un graphe multiplicatif G_1 faiblement associatif, mais non associatif:

- G_1 est le graphe multiplicatif représenté ci-dessous (où certaines flèches ne figurent pas) et pour lequel la structure est précisée par les équations qui suivent:



$$
\begin{aligned}
&x_2 . x_1 = y_2 . y_1 = u \ , \\
&x_4 . x_3 = y_4 . y_3 = v \ , \\
&x_3 . x_2 = x_5 \ , \\
&y_3 . y_2 = y_5 \ , \\
&x_4 . (x_5 . x_1) = (x_4 . x_5) . x_1 = x_6 \\
&y_4 . (y_5 . y_1) = (y_4 . y_5) . y_1 = y_6 \ .
\end{aligned}
$$

On remarquera que:

- dans G_1 , on voit que x_6 et y_6 ont pu être construits à partir de x_1 , x_2 , x_3 , x_4 et y_1 , y_2 , y_3 , y_4 respectivement, sans avoir besoin de composer v et u ; on peut ajouter, d'ailleurs, d'autres composés (par exemple $v.x_2 = x_4.x_5$, $x_3.u = x_5.x_1$, $y_4.y_5 = v.y_2$, $y_3.u = y_5.y_1$ ...) et constituer ainsi d'autres contre exemples car tant qu'on n'ajoute pas $v.u$ le graphe multiplicatif obtenu reste faiblement associatif mais non associatif puisque x_6 et y_6 sont identifiés dans $N(G)$ (ceci résoud un problème posé dans ma Thèse, chapitre 3 , Amiens 1978);

- il faut bien évidemment faire ici le rapprochement entre ces contre exemples et les graphes multiplicatifs doubles $\boxtimes^i_{jk}G$ et $\boxtimes'G$;

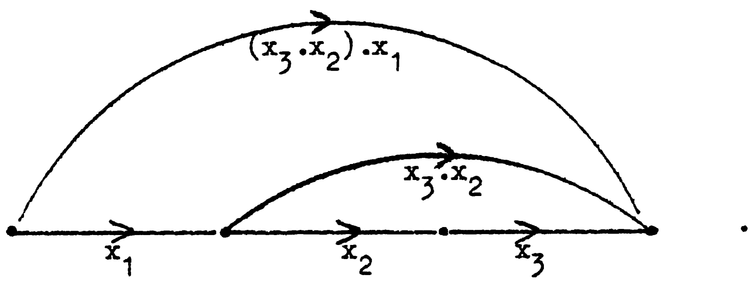
- la proposition précédente revient à présenter $N(G)$ comme quotient de $L(G) \setminus L(G)_o$ et non comme quotient de $L[G]$, ce qui met en évidence le rôle des parenthèses; en d'autres termes, la condition (A) est la version syntaxique (i. e. esquissable) de la définition sémantique d'un graphe multiplicatif associatif; de ce point de vue, le résultat énoncé dans la proposition qui précède est évidemment très lié à l'étude générale des conditions syntaxiques de plongement d'une structure algébrique dans la structure algébrique libre (d'un type "plus fort") qu'elle engendre (voir "Conditions syntaxiques de plongement" I et II, par C. Lair, Diagrammes 2 et 3): ce n'est pas encore clair (ou "qu'Lair"!) que ce n'en soit qu'un cas particulier.

On peut aussi renforcer (A) en l'axiome d'associativité forte:

(FA). si l'un des deux composés $x.(y.z)$ ou $(x.y).z$ est défini, les deux le sont et sont égaux.

On appelle alors précatégorie tout graphe multiplicatif forte-

ment associatif, i. e. vérifiant (FA).
Nous avons montré (Thèse, Chapitre 3, Amiens 1978) qu'effectivement (et ce n'est pas trivial) l'axiome (FA) implique l' axiome (A).
Bien entendu, les exemples abondent de graphes multiplicatifs associatifs qui ne sont pas des précatégories. En voici un:



Ce graphe est bien associatif mais ce n'est pas une précatégorie car $x_3.(x_2.x_1)$ n'est pas défini; en ajoutant un élément $x_2.x_1$ seulement on obtient encore un graphe associatif qui n'est toujours pas une précatégorie.

En tout cas, ces diverses associativités se définissent syntaxiquement en précisant des propriétés de l'opération de $\mathcal{P}$ sur L(G) ...

(à suivre)