

# DIAGRAMMES

R. GUITART

**Extenseurs**

*Diagrammes*, tome 3 (1980), exp. n° 3, p. G1-G2

[http://www.numdam.org/item?id=DIA\\_1980\\_\\_3\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=DIA_1980__3__A3_0)

© Université Paris 7, UER math., 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

EXTENSEURS.

R. Guitart.

Définition. On appelle extenseur dans une catégorie  $\underline{C}$  la donnée  $(A, E)$ , où  $A \in \underline{C}_0$  et où, pour tous  $X, Y \in \underline{C}_0$ ,

$$E: (X \xrightarrow{a} A, X \xrightarrow{p} Y) \longmapsto E_p a: Y \longrightarrow A,$$

avec les trois conditions:

1. (composabilité) si  $\xrightarrow{p} \xrightarrow{q}$ , alors  $E_q E_p a = E_{q \cdot p} a$ ;
2. (ponctualité) si le carré

$$\begin{array}{ccc} & p' & \\ h' \downarrow & \square & \downarrow h \\ & p & \end{array}$$

est un produit fibré, alors  $E_p(a).h = E_p(a.h')$ ;

3. (adjonction) si  $\left\langle \xleftarrow{p} \xleftarrow{h'} \xrightarrow{q} \right\rangle$  satisfait

$p.h'.h = p$  et  $q.h.h' = q$ , alors  $E_q(a.p.h') = E_q(E_h(a.p))$ .

Théorème. Dans un topos avec axiome du choix, les extenseurs sont précisément les sup-treillis complets.

Esquisse de preuve. Si  $\mathcal{P}$  est la monade des parties du topos, un treillis complet est une  $\mathcal{P}$ -algèbre, et donc un certain foncteur  $(Kl/\mathcal{P})^{op} \longrightarrow \text{Ens}$ . Mais, dans ce cas,  $Kl/\mathcal{P}$  est isomorphe à  $\text{REL}(\mathbb{C}) = : \text{SPAN}(\mathbb{C}) / \cong$ , avec

$$(X \xleftarrow[p]{\quad} U \xrightarrow[q]{\quad} Y) \equiv (X \xleftarrow[r]{\quad} V \xrightarrow[s]{\quad} Y)$$

si, et seulement si, il existe  $h$  et  $h'$  tels que  $p.h = r$ ,  
 $q.h = s$ ,  $r.h' = p$  et  $s.h' = q$  (et en fait, pour  $\mathcal{C}$  à  
 $\lim$  finies, l'existence d'un adjoint à droite à  
 $\mathcal{C} \longrightarrow \text{REL}(\mathcal{C})$  équivaut à  $\mathcal{C}$  topos avec axiome du choix).

N.B.-Ce théorème reste vrai si, dans 2., "produit fibré"  
est remplacé par "carré exact".

Inversement, on peut définir les carrés  $(A,E)$ -exacts par la  
condition 2., pour tout  $a$ .

- Dans des catégories autres que des topos, les structures  
"treillis complet" et "extenseurs" peuvent différer notable-  
ment. Par exemple, dans un groupoïde, tout objet  $a$  a une structure  
canonique d'extenseur (donnée par  $E_p a = a.p^{-1}$ ), mais n'a pas  
obligatoirement de structure de treillis complet.

---