LAURENT COPPEY

Thèse de doctorat d'état es sciences mathématiques présentée à l'université de Picardie

Diagrammes, tome S3 (1980), p. 1-139

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1980__S3__R1_0>

Une première version de ce texte était réalisée en Septembre 1977, dans le but d'unifier des articles antérieurement parus (cf. la bibliographie) et aussi d'adjoindre certains développements (par exemple: précatégories bien ordonnées, structures libres de décompositions).

En tenant compte des remarques et des conseils de J.Bénabou, j'ai pu réaliser en Avril 1978 la présente version, plus courte et plus claire.

Madame A.Ehresmann m'avait proposé de publier ce texte dans la série des "Esquisses". Les douloureux évènements qui ont marqué sa vie depuis lors l'ont contraint à ne point disperser ses efforts, tant sur le plan humain que sur le plan scientifique. J'ai moi-même hésité un temps avant de me décider à publier ce texte, qui, par certains aspects, n'offre pas la nouveauté souhaitée par rapport aux publications antérieures. Cependant, il me semble meilleur de le sortir du tiroir, même trois ans après sa conception.

C'est à dessein que je n'ai apporté aucune modification au présent texte par rapport à la version d'Avril 1978, et que je n'ajoute aucun commentaire philosophique ou mathématique, en dehors de ces quelques lignes,

Paris, Octobre 1980.

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée à

L'UNIVERSITE DE PICARDIE

par

M. Laurent COPPEY

pour obtenir le grade de Docteur es Sciences

soutenue le 28 Juin 1978

Sujet de la 1e Thèse : *Algèbres de décompositions et Précatégories*

Jury :

M^{me} et M. EHRESMANN, Université de Picardie
(Directeurs de Recherche)

M. J. BENABOU, Université Paris-Nord
(Délégué nommé par la Commission des Thèses de Paris)

M. J. LAMBEK, McGill University, Montréal
(troisième rapporteur)

M. ROSENBERG, Université Paris 7
(examinateur de la deuxième thèse)

M. L. BOASSON, Université de Picardie

"La thèse, je sais ce que c'est : çà remplace la fête des écoles maternelles".

(Clara Coppey, 27 mai 78).

INTRODUCTION

Le symbole ↓ renvoie à la fin de cette introduction .

Soit C une catégorie à produits finis et soit $n \geq 1$ un entier ; à un choix des produits de n objets de C correspond un adjoint à droite Π_n au foncteur diagonal $\Delta_n : C \longrightarrow C^n$; la paire (Π_n, Δ_n) définit un triple $\mathbb{E}_n$ dans C, d'où la catégorie $C^{\mathbb{E}_n}$ des $\mathbb{E}_n$-algèbres et le foncteur de comparaison $\phi_n : C^n \longrightarrow C^{\mathbb{E}_n}$.

Le problème de l'équivalence des catégories C^n et $C^{\mathbb{E}_n}$ consiste donc à savoir si on peut traiter les "décompositions des objets de C en produits" comme des "structures algébriques" (i.e. définissables par des lois de composition) ; dans l'affirmative, nous disons que C est à décompositions algébriques.

Améliorant les résultats de [4], nous prouvons au chapître 1 les points suivants :

- Il suffit que ϕ_2 soit une équivalence pour que ϕ_n en soit une pour tout $n \geq 2$.
- Lorsque C est une catégorie exacte, elle est à décompositions algébriques si et seulement si elle est à supports pleins.
- Si σ est une esquisse projective, la catégorie C^σ des structures d'espèce σ dans C est à décompositions algébriques lorsque C l'est aussi (même si C est exacte, il se peut que C^σ ne soit pas régulière !) ↓
- Toute catégorie $T_* = p^{-1}(Ens_*)$, où $p : T \longrightarrow Ens$ est un foncteur topologique (au sens d'HERRLICH) est aussi à décompositions algébriques.
- Désignons par G le groupoïde, interne à C, des "couples" d'un objet X. On montre que, si C est à noyaux des paires égalisables, les $\mathbb{E}_2$-algèbres sur X sont en bijection canonique avec les décompositions directes↓de G en deux sous-groupoïdes internes à C. Aussi, lorsque ϕ_2 n'est pas une équivalence, une telle décomposition de G ne provient pas nécessairement d'une décomposition de X.
- Plus généralement, notons Gr(C) la catégorie des groupoïdes internes à C. Les décompositions directes des objets de Gr(C) en deux sous-objets sont les algèbres d'un triple $\mathbb{E}'$ dans Gr(C) ; de plus, $\mathbb{E}'$ induit dans C le triple $\mathbb{E}_2$ lorsqu'on identifie C à une sous-catégorie pleine de Gr(C).

En fait, ce dernier résultat subsiste pour la catégorie Cat(C) des catégories internes à C ; c'est ce que nous montrons au début du chapître 2, dans le cas où C = Ens, pour simplifier. Plus précisément, soit $\mathbb{E}_{\mathfrak{n}}^{\downarrow}$ le triple "élévation à la puissance $\mathfrak{n}$" dans $\mathrm{Cat}^{\downarrow}$; on montre que les $\mathbb{E}_{\mathfrak{n}}$-algèbres sur une catégorie C sont en bijection avec les décompositions directes de C en n sous-catégories ; pour n = 2, une telle décomposition est un couple (C_2,C_1) de sous-catégories de C tel que la composition $C_2 * C_1 \longrightarrow C$ définisse une bijection. Nous étudions en détail ce genre de décompositions : relations avec les limites existant dans C, effet des changements de base, catégories de relations associées, présentation en termes de fibrations, exemples variés (citons ici : les produits"semi-directs" de groupes, les topologies de GROTHENDIECK dans un topos, les fibrations dont la base est elle-même munie d'une décomposition).

Les résultats précédents s'appliquent en particulier aux monoīdes. Cependant, dans le cas élémentaire de $\mathbb{N}$, ils ne rendent pas encore compte de la "décomposition a = bq+r" (division euclidienne par b). C'est pourquoi il convient de regarder $\mathbb{N}$ comme objet d'une catégorie plus vaste que Cat.

La structure de précatégorie$^{\downarrow}$et celle de précatégorie bien ordonnée (b.o.) répondent naturellement à ce besoin. Elles sont étudiées systématiquement au chapître 3 :

- Plongements universels d'un graphe dans une précatégorie et d'une précatégorie dans une catégorie (ce dernier est injectif).
- Sous-précatégories (stables ou non), précatégories quotient.
- Catégories des fractions à gauche et à droite d'une précatégorie.
- On montre que les précatégories b.o. sont exactement celles qui satisfont une condition artinienne pour les diviseurs propres.
- On trouve une condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit de précatégories b.o. soit encore b.o. (l'analogie est complète avec le cas des espaces localement compacts ou localement connexes).

Au chapître 4 nous caractérisons les décompositions directes libres d'une précatégorie en

(a) deux sous-graphes multiplicatifs,

(b) deux sous-précatégories (qui sont alors "complètement instables"),

(c) deux sous-précatégories stables (extension naturelle du résultat obtenu pour les catégories, puisque les sous-précatégories stables d'une catégorie sont ses sous-catégories).

Seuls les cas (a) et (c) correspondent à des structures algébriques au dessus de Précat↓. La solution du cas (b) s'obtient aisément grâce à la notion de décomposition partielle.

Nous abordons aussi les problèmes de stabilité :

- Les noyaux d'instabilité des facteurs d'une décomposition de précatégorie mesurent en partie leur défaut de stabilité dans G ; c'est la notion qu'il convient d'introduire pour décider de la trivialité d'une décomposition d'un produit de précatégories en fonction des décompositions facteurs ; dans la situation "b.o." nous obtenons un critère général qui s'applique justement au cas des décompositions additives de $\mathbb{N}^k$, pour $k \geq 2$ et ceci permet d'expliciter celles-ci pour $k = 2$ (nous retrouvons ainsi, et de façon simple, un résultat de I. NIVEN). De plus, nous cernons la seule difficulté pour $k > 2$, qui consiste en la détermination explicite des noyaux d'instabilité en dimension $k-1 \geq 2$!

- Nous étudions aussi la propriété d'ω-stabilité d'une décomposition, qui signifie intuitivement que les facteurs sont stables modulo un nombre fini de réarrangements. On démontre (chapître 5) que les décompositions des entiers sont ω-stables.

Les résultats concernant les entiers sont regroupés au dernier chapître. Nous ne pouvons pas les résumer ici. Soulignons seulement que notre méthode consiste essentiellement à "oublier la division euclidienne" au profit de l'addition et du bon ordre seuls, ce qui ouvre la voie à de nombreux problèmes parmi lesquels nous citerons seulement celui-ci : si A est un facteur direct de $\mathbb{N}$, ou encore plus généralement une sous-précatégorie de $\mathbb{N}$, quand peut-on dire qu'il est irréductible ? Au chapître 4 nous définissons les cardinaux précatégoriques, mais en fait, les précatégories b.o. généralisent de bonne façon les nombres ordinaux (il y a de nouveaux nombres finis !) ; la question précédente (sans doute difficile) devient alors la suivante : quels sont les nouveaux nombres premiers?

↓ Nous n'imposons pas l'existence de toutes les limites projectives finies dans les catégories régulières ou exactes.

↓ Le terme "semi-direct" serait plus conforme à l'usage.

↓ Ens_* = catégorie des ensembles non vides; $\mathbf{n}$ = catégorie associée à l'entier ordonné $[n]$; (Pré)Cat = catégorie des (pré)catégories. La structure de précatégorie est plus faible que celle de catégorie : $\alpha(y) = \beta(x)$ n'implique pas l'existence de "$y.x$" .

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur et Madame EHRESMANN, pour tout ce que je leur dois. L'esprit de liberté et la générosité qui les animent ont marqué beaucoup de leurs élèves; à ce titre, je souhaite que le présent travail soit le signe, sans doute trop modeste, de ma reconnaissance.

A Monsieur le Professeur J.BENABOU je témoigne ma gratitude pour les nombreuses et utiles suggestions qu'il m'a faites dans l'élaboration de ce texte.

Je remercie Messieurs les Professeurs J.LAMBEK et L.BOASSON qui me font l'honneur de faire partie du Jury, et Monsieur le Professeur H.ROSENBERG qui m'a proposé un "second sujet de thèse" passionnant.

A mes parents je tiens à dire ici mon admiration et ma profonde reconnaissance. J'ai appris les premiers éléments d'Algèbre, d'Analyse et de Géométrie avec Jean COPPEY, qui n'a pas attendu les "multiples réformes" pour enseigner les "Maths. modernes" et de façon très vivante ! Marie Thérèse COPPEY m'a sans doute appris les tables d'addition et de multiplication ainsi que la règle de trois, mais elle sait bien que l'admiration et la reconnaissance d'un fils pour sa mère ne se mesurent pas de cette façon.

Madame J.ARPIN a réalisé avec art et minutie la composition de ce texte, pourtant voué aux décompositions, et je l'en remercie chaleureusement.

J'exprime enfin ma vive sympathie à tous mes amis des Universités de Paris VII et d'Amiens. Il n'est guère possible de les citer tous sans risquer l'oubli maladroit, mais je ne doute pas qu'ils sauront se reconnaître ici.

C H A P I T R E I

DÉCOMPOSITIONS ALGÉBRIQUES EN PRODUITS DES OBJETS D'UNE CATÉGORIE

1.0. POSITION DU PROBLÈME.

Soit C une catégorie à produits finis ; un choix de produits finis détermine, pour chaque entier n, un adjoint à droite π_n du foncteur diagonal $\Delta_n : C \longrightarrow C^n$.

Désignons par $\mathbb{E}_n = ((\ )^n, \delta, \mu)$ le triple dans C correspondant à (π_n, Δ_n) ; pour $X \in \mathrm{Ob}\,(C)$, $\delta_X : X \longrightarrow X^n$ est le morphisme diagonal et $\mu_X : (X^n)^n \longrightarrow X^n$ est le produit $p_1 \times \ldots \times p_n$ des projections naturelles $p_i : X^n \longrightarrow X$.

La catégorie des $\mathbb{E}_n$-algèbres est notée $C^{\mathbb{E}_n}$; la paire de foncteurs adjoints usuelle : $C^{\mathbb{E}_n} \underset{F_n}{\overset{U_n}{\rightleftarrows}} C$ est reliée à la paire $C^n \underset{\Delta_n}{\overset{\pi_n}{\rightleftarrows}} C$ par le foncteur de comparaison $\phi_n : C^n \longrightarrow C^{\mathbb{E}_n}$. Nous allons montrer que dans beaucoup de cas ϕ_n définit une équivalence de catégories ; on dira dans ce cas que C est à décompositions algébriques. Les résultats suivants sont contenus dans [4], mais ont ici une présentation sensiblement différente et améliorée.

1.1. RÉDUCTION AU CAS n=2.

Elle résulte de l'application du critère général de triplabilité de J. BECK, dont nous rappelons l'énoncé ; partant d'une adjonction $D \underset{F}{\overset{U}{\rightleftarrows}} C$ (F adjoint à gauche de U), on obtient un triple $\mathbf{T}$ dans C associé à (U,F), la catégorie $C^{\mathbf{T}}$ des $\mathbf{T}$-algèbres et le foncteur de comparaison $\phi : D \longrightarrow C^{\mathbf{T}}$. Soit P_F l'ensemble des paires $FX \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} FY$ dans D telles que $UFX \underset{Ug}{\overset{Uf}{\rightrightarrows}} UFY$ soit une paire contractile avec conoyau.

<u>Enoncé du critère de J. BECK</u> [18] : ϕ définit une équivalence de catégories si et seulement si D a des P_F-conoyaux et U préserve et reflète les P_F-conoyaux.

Rappelons qu'une paire $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ est dite <u>contractile</u> s'il existe $d_1 : Y \longrightarrow X$ tel que $gd_1 = 1_Y$ et $fd_1g = fd_1f$; dans ce cas, si (f,g) possède un conoyau p, il existe un unique d_o tel que $pd_o = 1$ et $d_op = fd_1$.

Rappelons aussi la signification des expressions utilisées dans l'énoncé précédent :

"D a des P_F-conoyaux" ≡ toute paire élément de P_F a un conoyau.

"U préserve les P_F-conoyaux" ≡ si $(f,g) \in P_F$ et si k en est un conoyau, alors Uk est un conoyau de (Uf,Ug).

"U reflète les P_F-conoyaux" ≡ si $(f,g) \in P_F$, si kf = kg et si Uk est un conoyau de (Uf,Ug), alors k est un conoyau de (f,g).

<u>LEMME</u> - Dans une catégorie C, toute paire $X' \underset{g'}{\overset{f'}{\rightrightarrows}} Y'$ rétracte d'une paire contractile $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ est aussi contractile.

▼ En effet, par hypothèse, il existe $\pi, \sigma, \pi', \sigma'$ tels que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, shift right, "\pi"'] & Y \arrow[d, shift right, "\pi'"'] \\ X' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] \arrow[u, shift right, "\sigma"'] & Y' \arrow[u, shift right, "\sigma'"'] \end{tikzcd}$$

$\pi'(f,g) = (f',g')\pi$

$\sigma'(f',g') = (f,g)\sigma$

$\pi\sigma = 1_{X'}$ et $\pi'\sigma' = 1_{Y'}$;

soit $d_1 : Y \longrightarrow X$ tel que

$gd_1 = 1_Y$ et $fd_1g = fd_1f$ et posons $d_1' = \pi d_1\sigma'$; il vient :

$g'd_1' = g'\pi d_1\sigma' = \pi' g d_1\sigma' = \pi'\sigma' = 1_{Y'}$,

et $f'd_1'f' = f'\pi d_1\sigma' f' = \pi' f d_1 f\sigma = \pi' f d_1 g\sigma = f'\pi d_1\sigma' g' = f'd_1'g'$,

ce qui prouve que (f',g') est bien une paire contractile. ▲

<u>Exemple</u> : Dans une catégorie à produits finis, si la paire $X^n \underset{g_1\times\ldots\times g_n}{\overset{f_1\times\ldots\times f_n}{\rightrightarrows}} Y^n$ est contractile, alors toute paire $X^p \underset{g_{i_1}\times\ldots\times g_{i_p}}{\overset{f_{i_1}\times\ldots\times f_{i_p}}{\rightrightarrows}} Y^p$ est aussi contractile, pour $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$.

Venons-en alors à la situation de départ et montrons la

<u>PROPOSITION</u> - Si ϕ_2 définit une équivalence de catégories, alors ϕ_n définit une équivalence de catégories, pour tout $n \geq 2$.

▼ Procédons par induction ; supposons que ϕ_{n-1} définisse une équivalence de catégories ; soit

$$(X,X,\dots,X) \underset{(g_1,g_2,\dots,g_n)}{\overset{(f_1,f_2,\dots,f_n)}{\rightrightarrows}} (Y,Y,\dots,Y)$$

une paire élément de P_{Δ_n}, c'est-à-dire que

$$X^n \underset{g_1\times\dots\times g_n}{\overset{f_1\times\dots\times f_n}{\rightrightarrows}} Y^n$$

est une paire contractile et admet un conoyau k; alors, dans C^{n-1}, la paire

$$(X^2,X,\dots,X) \underset{(g_1\times g_2,g_3,\dots,g_n)}{\overset{(f_1\times f_2,f_3,\dots,f_n)}{\rightrightarrows}} (Y^2,Y,\dots,Y)$$

admet aussi un conoyau $(Y^2,Y,\dots,Y) \xrightarrow{(c,c_3,\dots,c_n)} (Z,Z_3,\dots,Z_n)$,

car ϕ_{n-1} définit une équivalence

de catégories et U_{n-1} reflète le conoyau k ; d'après le lemme, $X^2 \underset{g_1\times g_2}{\overset{f_1\times f_2}{\rightrightarrows}} Y^2$ est une paire contractile et on vient de voir qu'elle admet un conoyau c, donc la paire $(X,X) \underset{(g_1,g_2)}{\overset{(f_1,f_2)}{\rightrightarrows}} (Y,Y)$ est élément de P_{Δ_2} ; elle admet un conoyau $(Y,Y) \xrightarrow{(c_1,c_2)} (Z_1,Z_2)$ car ϕ_2 définit une équivalence de catégories ; en définitive, chaque paire $X \underset{g_i}{\overset{f_i}{\rightrightarrows}} Y$, $i = 1,2,\dots,n$, admet un conoyau c_i et ceci prouve que C^n a des P_{Δ_n}-conoyaux ; on voit de même que π_n préserve et reflète les P_{Δ_n}-conoyaux. ▲

Remarquons aussi que si, pour un entier $n\geq 2$, ϕ_n définit une équivalence de catégories, il en est de même de ϕ_2 : il suffit d'introduire n-2 fois l'objet final.

1.2. ETUDE DU CAS n=2.

Nous simplifions les notations en supprimant l'indice 2 : le foncteur $C^2 \xrightarrow{\phi} C^{\mathbb{E}}$ est défini par :

$\phi(X,Y) = (X\times Y, p_X \times p_Y)$, où p_X et p_Y sont les projections naturelles de $X \times Y$ vers X et Y, et $\phi(f,g) = f \times g$;

On convient de désigner une algèbre sur X par un couple (X,θ) où $\theta : X^2 \longrightarrow X$ satisfait les deux égalités $\theta\delta_X = 1_X$ et $\theta.\theta^2 = \theta.p_1^X \times p_2^X$, où p_1^X et $p_2^X : X^2 \longrightarrow X$ sont les projections naturelles (on omettra le plus souvent l'indice X, ce qui ne peut pas créer de confusion) ; quant aux morphismes, on peut les désigner comme des flèches de C puisque l'oubli $C^{\mathbb{E}} \longrightarrow C$ est fidèle.

Une $\mathbb{E}$-algèbre (X,θ) engendre une ϕ-structure libre si et seulement si les paires $X^2 \underset{p_1}{\overset{\theta}{\rightrightarrows}} X$ et $X^2 \underset{p_2}{\overset{\theta}{\rightrightarrows}} X$ ont des conoyaux ; si $(X,X) \xrightarrow{(c_1,c_2)} (X_1,X_2)$ est conoyau de $(X^2,X^2) \underset{(p_1,p_2)}{\overset{(\theta,\theta)}{\rightrightarrows}} (X,X)$, (X_1,X_2) est une ϕ-structure libre et le crochet $[c_1,c_2] : X \longrightarrow X_1 \times X_2$ définit le morphisme "injection" de (X,θ) dans $\phi(X_1,X_2)$; inversement, si (X_1,X_2) est une ϕ-structure libre engendrée par (X,θ) avec $\varepsilon : (X,\theta) \longrightarrow \phi(X_1,X_2)$ pour "injection" correspondante, le couple $(p_{X_1}.\varepsilon, p_{X_2}.\varepsilon)$ est conoyau de $(X^2,X^2) \underset{(p_1,p_2)}{\overset{(\theta,\theta)}{\rightrightarrows}} (X,X)$.

Donc, si pour toute $\mathbb{E}$-algèbre (X,θ), les paires (θ,p_i), $i = 1,2$ ont des conoyaux, le foncteur ϕ a un adjoint à gauche ; le choix des conoyaux équivaut au choix de l'adjoint ; soit Ψ un tel adjoint, qu'on suppose exister ; l'unité $\varepsilon : 1 \longrightarrow \phi\Psi$ de l'adjonction est fournie par :

$$\varepsilon_{(X,\theta)} : (X,\theta) \xrightarrow{[c_1,c_2]} (X_1 \times X_2, p_{X_1} \times p_{X_2}),$$

et la counité $\eta : \Psi\phi \longrightarrow 1$ est fournie par :

$$\eta_{(X,Y)} : (Z_1,Z_2) \xrightarrow{(\lambda_1,\lambda_2)} (X,Y)$$

où λ_1 et λ_2 sont déterminés de façon unique par la propriété universelle des conoyaux :

$$\begin{tikzcd}(X\times Y)^2 \arrow[r, shift left, "p_X\times p_Y"] \arrow[r, shift right, "P_1"'] & X\times Y \arrow[rr, "\text{conoyau}"] \arrow[dr, "p_X"'] & & Z_1 \arrow[dl, "\lambda_1"] \\ & & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}(X\times Y)^2 \arrow[r, shift left, "p_X\times p_Y"] \arrow[r, shift right, "P_2"'] & X\times Y \arrow[rr, "\text{conoyau}"] \arrow[dr, "p_Y"'] & & Z_2 \arrow[dl, "\lambda_2"] \\ & & Y & \end{tikzcd}$$

la counité est un isomorphisme si et seulement si les projections naturelles p_X et p_Y sont des conoyaux (ce sont alors les conoyaux de $(p_X\times p_Y, P_1)$ et de $(p_X\times p_Y, P_2)$ respectivement).
Résumons ceci sous la forme de

PROPOSITION - ϕ définit une équivalence de catégories si et seulement si

(B) quelle que soit l'algèbre (X,θ) $\begin{cases} \text{(B1) les couples } (\theta, p_i) \text{ ont des conoyaux } c_i \\ \text{pour } i = 1,2 \\ \text{(B2) le crochet } [c_1, c_2] \text{ est un isomorphisme.} \end{cases}$

(C) les projections naturelles $X \times Y \rightrightarrows \begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$ sont des conoyaux.

Notons aussi que

- la condition (C) équivaut au fait que ϕ est pleinement fidèle,
- et si la condition (B1) est satisfaite, c'est-à-dire si ϕ possède un adjoint à gauche Ψ, alors (B2) équivaut au fait que Ψ est pleinement fidèle.

1.3. CAS DES CATÉGORIES EXACTES.

Les catégories régulières ont été introduites par MANES [19] et les catégories exactes par BARR [1] ; plutôt que de faire une liste de références à ce sujet, nous préférons reprendre les définitions et propriétés élémentaires qui vont nous être utiles (les définitions qu'on trouve dans la littérature ne sont pas toujours équivalentes).

- Soit C une catégorie ; pour $f : X \longrightarrow Y \in C$ on définit

$$R(f) : \{g : X \longrightarrow Z \mid fa = fb \Longrightarrow ga = gb\} \ ;$$

on dit que f est un épimorphisme régulier (en abrégé épir) si $\forall g \in R(f)$, il existe un et un seul $\overline{g}$ tel que $\overline{g}.f = g$; un épir. est un épi. ; un conoyau est un épir.

- Soit C une catégorie à paires noyaux (i.e. : le produit fibré de (f,f) existe quelque soit f) ; alors il est équivalent de dire :

* f est un épir.
* f est un conoyau,
* f est conoyau de sa paire noyau.

- Si un morphisme f d'une catégorie C se décompose en f = m.p avec p épir. et m mono., cette décomposition est unique à isomorphisme unique près ;

- Dans une catégorie C, une paire $R \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} X$ est dite équivalence sur X lorsque :

$$\mathrm{Hom}\ (-,R) \xrightarrow[{[\pi_1-,\pi_2-]}]{} \mathrm{Hom}\ (-,X) \times \mathrm{Hom}\ (-,X)$$

est une équivalence naturelle ; lorsque la catégorie C est à produits et à produits fibrés d'épimorphismes scindés, il revient au même de dire que $R \xrightarrow{[\pi_1,\pi_2]} X^2$ est un sous-objet de X^2 (i.e. mono) réflexif, symétrique et transitif (tout ceci s'écrivant en termes de morphismes évidents). Remarquons qu'il n'est pas utile de supposer que C possède toutes les limites projectives finies pour affirmer l'équivalence ci-dessus, et nous verrons en effet beaucoup d'exemples où C manque de noyaux !

- Si f : X $\longrightarrow$ Y possède une paire noyau $N \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} X$, celle-ci est une équivalence sur X ; on dit qu'une équivalence $R \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} X$ est effective s'il existe au moins un f : X $\longrightarrow$ Y dont $R \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} X$ est la paire noyau ; dans ce cas, si f se décompose en épir./mono., soit f = m.p, on voit aussitôt que $R \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} X$ est encore paire noyau de p et que p en est un conoyau ; on dit aussi que $R \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{p} Z$ est une suite exacte.

- La définition que nous proposons maintenant est un peu plus forte que celle de BARR [1], puisqu'on demande l'existence de produits finis ; elle est moins forte que celle de JOHNSTONE [15] ou que celle de MANES [19], qui supposent l'existence de toutes les limites projectives finies (resp. quelconques).

Une catégorie C est dite <u>régulière</u> lorsque :

(RP) elle possède les limites projectives suivantes :
- produits finis,
- paires noyaux,
- produits fibrés des paires de morphismes dont l'un des deux au moins est un épir., avec la condition que les épir. sont stables par produit fibré ;

(RI) elle possède les limites inductives suivantes :
- conoyaux des paires noyaux.

Une catégorie C est dite <u>exacte</u> si elle est régulière et si toute équivalence y est effective.

Rappelons les résultats suivants [1], concernant les catégories régulières :

(<u>R1</u>) Tout morphisme admet une factorisation <u>épir</u>./<u>mono</u>.

(<u>R2</u>) Si g.f est un <u>épir</u>., il en est de même de g.

(<u>R3</u>) Tout morphisme qui est <u>mono</u>. et <u>épir</u>. est un <u>iso</u>.

(<u>R4</u>) Le composé de deux <u>épir</u>. est encore un <u>épir</u>.

(<u>R5</u>) Le produit g x f de deux <u>épir</u>. est un <u>épir</u>.

Ces propriétés s'établissent sans faire usage de l'existence de produits finis ; si on suppose seulement l'existence d'un ϕ-produit, on peut en déduire l'existence des puissances finies X^n, mais on ne peut pas encore affirmer l'existence des produits X x Y dont nous avons besoin dans notreproblème ; c'est pourquoi nous avons inclus dans notre définition l'existence de tous les produits finis.

- Soit C une catégorie régulière et soit 1 un objet final ; pour tout objet X de C, l'unique morphisme de X vers 1 admet une factorisation épir./mono. :

$$X \xrightarrow{e_X} \twoheadrightarrow U_X \rightarrowtail \xrightarrow{i} 1 \ ;$$

le but U_X de e_X s'appelle le <u>support de</u> X ; il est défini à isomorphisme unique près ; c'est un objet quasi-final, c'est-à-dire que, pour tout objet Y, Hom (Y, U_X) est soit vide, soit réduit à un élément ; réciproquement, si S est un objet quasi-final il est isomorphe à son support U_S (en effet, la paire noyau de e_S est réduite à un morphisme, qui est donc un iso., de sorte que e_S est à la fois épir. et mono., donc iso.).

On dira que C est à <u>supports pleins</u> si U_X est isomorphe à 1, quel que soit l'objet X, ou ce qui revient au même si tout objet quasi-final est final.

- Nous pouvons énoncer les théorèmes :

<u>THEOREME 1</u> - Dans une catégorie exacte, la condition (B) de la proposition <u>1.2</u> est toujours satisfaite.

<u>THEOREME 2</u> - Dans une catégorie régulière C, la condition (C) de la proposition <u>1.2</u> est équivalente au fait que C est à supports pleins.

<u>THEOREME 3</u> - Dans la classe des catégories exactes, seules les catégories à supports pleins sont à décompositions algébriques.

1.4. DÉMONSTRATIONS DES THÉORÈMES.

Le <u>Th. 3</u> est conséquence de <u>Th. 1</u>, <u>Th. 2</u> et de la proposition <u>1.2</u>.

Le <u>Th. 2</u> est facile : si toute projection $X \times Y \longrightarrow X$ est un conoyau, c'est un <u>épir</u>. ; on en conclut que $U_X = U_Y = U_{X\times Y}$; tous les objets ont donc "même" support et celui-ci est isomorphe à 1 ; réciproquement, si C est à supports pleins, les morphismes $X \longrightarrow 1$ sont des épir., donc des conoyaux (de leurs paires noyaux) et puisque le produit de deux épir. est un épir., les projections $X \times Y \longrightarrow X$ sont des épir., donc des conoyaux.

Le <u>Th. 1</u> est plus long à établir. Nous procédons en plusieurs étapes :

Soit donc C une catégorie exacte et (X,θ) une $\mathbb{E}$-algèbre, p_1 et p_2 les projections naturelles $X^2 \rightrightarrows X$.

a) $$\begin{aligned}\theta.(p_1\times\theta) &= \theta.(\theta\delta p_1\times\theta)\\ &= \theta.(\theta\times\theta).(\delta p_1\times 1_X)\\ &= \theta.p_1\times p_2.(\delta p_1\times 1_X)\\ &= \theta.p_1\times p_2\ ;\end{aligned}$$

on voit de même que $\theta.(\theta \times p_2) = \theta.p_1 \times p_2$; donc :

$$\theta.\theta^2 = \theta.(p_1 \times p_2) = \theta.(p_1 \times \theta) = \theta.(\theta \times p_2)$$

b) Soit $\lambda : X^3 \longrightarrow X^4$ défini par $\lambda = 1_X \times \delta_X \times 1_X$; désignons par $\hat{p}_i : X^3 \longrightarrow X^2$, $i = 1,2,3$ les trois projections naturelles ($\hat{p}_i$ correspond à l'oubli du $i^{\text{ème}}$ facteur) ; on voit que

$$(p_1 \times \theta).\lambda = 1_X \times \theta$$

$$(\theta \times p_2).\lambda = \theta \times 1_X$$

$$(p_1 \times p_2).\lambda = \hat{p}_2 \;;$$

des égalités établies en a) résulte alors que

"θ est une loi binaire associative satisfaisant les relations : $x^2 = x$ et $xyz = xz$"

ce que traduisent les égalités :

$$\theta(1_X \times \theta) = \theta(\theta \times 1_X) = \theta\hat{p}_2 \quad \text{et } \theta.\delta_X = 1_X.$$

c) Les noyaux de (θ, p_1) et (θ, p_2) existent et sont des équivalences sur X.

<u>Existence</u>. Soit $X^2 \xrightarrow{r_1} R_1 \overset{n_1}{\rightarrowtail} X^2$ la décomposition épir./mono. de $[\theta, p_2] : X^2 \longrightarrow X^2$; de $\theta[\theta, p_2] = \theta$, on tire que $[\theta, p_2]$ est un idempotent ; donc $r_1 n_1 = 1_{R_1}$; de $\theta[\theta, p_2] = \theta = p_1[\theta, p_2]$ on tire que n_1 égalise θ et p_1 ; soit μ tel que $\theta\mu = p_1\mu$; s'il existe $\overline{\mu}$ tel que $n_1\overline{\mu} = \mu$, on doit avoir $\overline{\mu} = r_1\mu$; et on a bien

$$n_1 r_1 \mu = \mu \text{ car } \begin{cases} p_1 n_1 r_1 \mu = p_1[\theta, p_2]\mu = \theta\mu = p_1\mu \\ p_2 n_1 r_1 \mu = p_2[\theta, p_2]\mu = p_2\mu \;; \end{cases}$$

de même la décomposition épir/mono. $X^2 \xrightarrow{r_2} R_2 \overset{n_2}{\rightarrowtail} X^2$ de $[p_1, \theta] : X^2 \longrightarrow X^2$ fournit le noyau n_2 de (θ, p_2). R_1 et R_2 sont des équivalences ; abandonnons les morphismes pour plus de clarté (il suffit de penser que ce qu'on va écrire se transcrit en termes de morphismes).

$(x,y) \in R_1 \Longleftrightarrow \theta(x,y) = p_1(x,y)$, soit $xy = x$; alors
R_1 est réflexive car $x^2 = x$
R_1 est symétrique car $xy = x \Longrightarrow yx = yxy = y^2 = y$
R_1 est transitive car $xy = x$ et $yz = y \Longrightarrow xz = xyz = xy = x$.

(Nous utilisons ici l'énoncé établi en b)).

d) R_1 et R_2 étant effectives, nous avons les conoyaux :

$$R_1 \underset{p_2'}{\overset{p_1'}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{c_1} X_1 \qquad R_2 \underset{p_2''}{\overset{p_1''}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{c_2} X_2$$

où $p_1' = p_1n_1$, $p_2' = p_2n_1$ et $p_1'' = p_1n_2$, $p_2'' = p_2n_2$, (p_1',p_2') étant la paire noyau de c_1 et (p_1'',p_2'') la paire noyau de c_2 ; en utilisant les n_i, r_i, $i = 1,2$, on voit aussitôt que c_1 est un conoyau de (θ,p_2) et c_2 un conoyau de (θ,p_1), ce qui prouve que la catégorie C satisfait (B1).

Remarque : Si C est seulement régulière, l'existence de c_1 comme conoyau de (θ,p_2) entraîne que c_1 est aussi conoyau de (p_1',p_2'), mais cela ne signifie pas que R_1 est effective car il n'y a aucune raison pour que la paire noyau de c_1 soit (p_1',p_2')! C'est donc vraiment l'exactitude de C qui permet de conclure à l'équivalence :

$$R_1 \text{ et } R_2 \text{ effectives} \Longleftrightarrow (\theta,p_1) \text{ et } (\theta,p_2) \text{ ont des conoyaux.}$$

e) Montrons (B2) ; en composant avec les projections de $X_1 \times X_2$ vers X_1 et X_2, on constate que :

$$[c_1,c_2].\theta.\sigma = c_1 \times c_2$$

où $\sigma : X^2 \longrightarrow X^2$ est la symétrie ; de (R5) il résulte que $c_1 \times c_2$ est un épir. et de (R2) il résulte que $[c_1,c_2]$ est un épir. ; si l'on prouve que $[c_1,c_2]$ est aussi un mono., il en résultera que c'est un iso. (R3).

Supposons $[c_1,c_2]f = [c_1,c_2]g$, soit encore

$$c_1f = c_1g \quad \text{et} \quad c_2f = c_2g \ ;$$

Comme R_1 et R_2 sont effectives, il existe un unique λ_1 et un unique λ_2 tels que :

$$(p_1',p_2')\lambda_1 = (f,g) = (p_1'',p_2'')\lambda_2 \ ;$$

il est clair que $n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2 = [f,g]$;

posons $r_1.\delta_X = i_1$ et $r_2.\delta_X = i_2$ (ce sont les morphismes de "réflexivité" de R_1 et R_2) et prouvons que (i_1,i_2) est un produit fibré de (r_1,r_2) ; d'abord $n_1i_1 = n_2i_2 = \delta_X$; si (h,k) satisfait $n_1h = n_2k = \rho$, on voit que :

$$p_1\rho = p_1n_1h = \theta n_1h = \theta n_2k = p_2n_2k = p_2\rho \; ,$$

de sorte que s'il existe $\overline{\rho}$ tel que $(i_1,i_2)\overline{\rho} = (h,k)$, on doit avoir $\delta\overline{\rho} = \rho$, soit $\overline{\rho} = p_1\rho = p_2\rho$; montrons que ce $\overline{\rho}$ convient ; faisons-le pour $i_1\overline{\rho}$; comme n_1 est mono. il suffit d'établir que $n_1i_1\overline{\rho} = n_1h$, soit encore $\delta p_1\rho = \rho$; or c'est bien vrai puisque

$$p_1(\delta p_1\rho) = p_1\rho \quad \text{et} \quad p_2(\delta p_1\rho) = p_1\rho = p_2\rho \; ;$$

revenons à (λ_1,λ_2) ; il existe alors un unique λ tel que $i_1\lambda = \lambda_1$ et $i_2\lambda = \lambda_2$; il vient alors :

$$f = p_1n_1\lambda_1 = p_1n_1i_1\lambda = \lambda \text{ et de même } g = \lambda \; ,$$

ce qui achève la preuve du Th.1.

Remarques : (1) L'exactitude de C intervient pour obtenir (λ_1,λ_2) et c'est indispensable pour prouver que $[c_1,c_2]$ est un mono.

(2) (X,i_1,i_2) est aussi la limite projective du diagramme

$$R_1 \rightrightarrows X \leftleftarrows R_2 \; !$$

(3) Si on raisonne en termes "d'éléments", comme on l'a fait pour établir que R_1 et R_2 sont des équivalences, la démonstration du fait que $[c_1,c_2]$ est un mono. revient à dire : "$R_1 \cap R_2 = X$" et puis "si $f(x) = f(x)\, g(x)$ et $g(x) = f(x)\, g(x)$, alors $f(x) = g(x)$" .

Nous avons tenu à écrire la démonstration en termes de morphismes,

d'une part, pour comparer objectivement les deux méthodes,

d'autre part, pour fixer des notations qui vont encore servir.

$$\begin{tikzcd}
& & X^2 & & \\
R_1 \arrow[urr, "n_1"] \arrow[drr, shift left] \arrow[drr, shift right] & & & & R_2 \arrow[ull, dashed, "n_2"'] \arrow[dll, shift left] \arrow[dll, shift right, dashed] \\
& & Z \arrow[ull, "\lambda_1"'] \arrow[urr, dashed, "\lambda_2"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & & \\
& & X \arrow[uull, bend left, dashed, "i_1"] \arrow[uurr, bend right, dashed, "i_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

1.5. CARACTÉRISATION DES $\mathbb{E}$-ALGÈBRES DANS LE CAS GÉNÉRAL.

Nous allons voir que les $\mathbb{E}$-algèbres s'interprétent en général comme des couples d'équivalences ayant une certaine propriété ; cette façon de voir conduira naturellement à l'étude des décompositions directes de catégories, qui fait l'objet du chapitre suivant.

On suppose que C est une catégorie à produits finis et à noyaux des paires "égalisables".

Soit $\theta : X^2 \longrightarrow X$ une $\mathbb{E}$-algèbre sur X ; comme δ égalise θ, p_1, p_2, les paires (θ, p_1) et (θ, p_2) ont des noyaux respectifs $n_1 : R_1 \rightarrowtail X^2$ et $n_2 : R_2 \rightarrowtail X^2$; les relations établies en 1.4.b montrent que R_1 et R_2 sont des équivalences sur X (raisonnement 1.4.c) ; précisons ici que les relations d'équivalence sont automatiquement représentables ; montrons-le pour R_1, par exemple, en omettant les vérifications qui ressortent de la routine catégorique.

Réflexivité : il existe un unique $i_1 : X \longrightarrow R_1$ tel que

$$p_1 n_1 i_1 = p_2 n_1 i_1 = 1_X \ ;$$

d'ailleurs $i_1 = r_1 . \delta$ où $r_1 : X^2 \longrightarrow R_1$ est l'unique flèche telle que $n_1 r_1 = [\theta, p_2]$;

Symétrie : on montre que σn_1 égalise (θ, p_1) où $\sigma = [p_2, p_1] : X^2 \longrightarrow X^2$ est la symétrie, de sorte qu'il existe un unique $s_1 : R_1 \longrightarrow R_1$ tel que $\sigma n_1 = n_1 s_1$.

<u>Transitivité</u> : Soient π_1 et π_2 les projections naturelles de $R_1 \times R_1$ sur R_1 ; comme $\delta_{R_1}.i_1 : X \longrightarrow R_1 \times R_1$ égalise la paire $(p_2 n_1 \pi_1, p_1 n_1 \pi_2)$, celle-ci a un noyau $\nu_1 : R_1 * R_1 \longrightarrow R_1 \times R_1$ et $(\pi_1 \nu_1, \pi_2 \nu_1)$ est un produit fibré de $(p_2 n_1, p_1 n_1)$;

$$\begin{tikzcd}
R_1 * R_1 \arrow[dr, "\nu_1"'] & & & \\
& R_1 \times R_1 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & R_1 \arrow[d, "n_1"] \arrow[l, dashed, bend right, "\delta_{R_1}"'] & \\
& R_1 \arrow[r, "n_1"'] & X^2 \arrow[dr, shift left, "p_1"] \arrow[dr, shift right, "p_2"'] & \\
& & & X \arrow[uul, dashed, bend right, "i_1"']
\end{tikzcd}$$

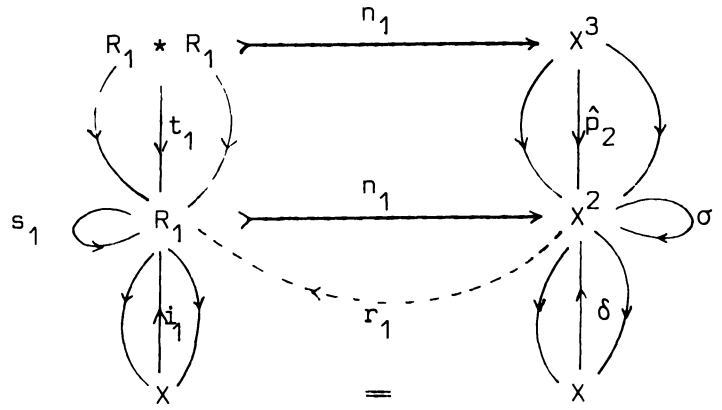
comme $(\hat{p}_3, \hat{p}_1)$ est un produit fibré de (p_2, p_1), il existe un unique $m_1 : R_1 * R_1 \longrightarrow X^3$ tel que

$$\hat{p}_3 m_1 = n_1 \pi_1 \nu_1 \quad \text{et} \quad \hat{p}_1 m_1 = n_1 \pi_2 \nu_1 \ ;$$

enfin on montre que $\hat{p}_2 m_1$ égalise (θ, p_1), de sorte qu'il existe un unique $t_1 : R_1 * R_1 \longrightarrow R_1$ tel que

$$n_1 t_1 = \hat{p}_2 m_1 \ ;$$

en résumé R_1 définit bien un groupoïde interne à C, qui est un sous-groupoïde du groupoïde des couples X^2 ; on notera cependant que si n_1 définit un morphisme de groupoïdes internes, de R_1 vers X^2, il n'en est pas de même pour $r_1 : X^2 \longrightarrow R_1$! Voici la figure appropriée, où nous avons omis les noms des morphismes usuels (source, but, projections) :



nous pouvons alors énoncer la proposition qui caractérise dans C les $\mathbb{E}$-algèbres :

<u>PROPOSITION</u> - Les $\mathbb{E}$-algèbres sur X sont en bijection naturelle avec les couples d'équivalences (R_1,R_2) sur X satisfaisant la condition suivante :

le diagramme (D) :

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[dr, "n_1"'] & & X^3 \arrow[dl, "\hat{p}_1"'] \arrow[dr, "\hat{p}_3"] & & R_2 \arrow[dl, "n_2"] \\ & X^2 & & X^2 & \end{tikzcd}$$

a une limite projective P :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "q_1"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, dashed, "q_2"] & \\ R_1 & X^3 & R_2 \end{tikzcd}$$

telle que $\hat{p}_2.\Delta$ est un isomorphisme.

▼ Nous reprenons les notations du début de ce paragraphe.

- Dans un sens, partons avec une $\mathbb{E}$-algèbre θ sur X et considérons le diagramme (D) où R_1 et R_2 sont les équivalences noyaux de (θ,p_1) et (θ,p_2) respectivement ; on va montrer que $(X^2,(r_1,\Delta,r_2))$ est une limite projective de (D), où $\Delta = [p_1,\theta,p_2]$; on aura bien : $\hat{p}_2.\Delta = [p_1,p_2] = 1_{X^2}$ est un isomorphisme ; on a déjà vu que $\hat{p}_1.\Delta = [\theta,p_2] = n_1r_1$ et $\hat{p}_3.\Delta = [p_1,\theta] = n_2r_2$. Soit alors (r_1',Δ',r_2') tel que :

$$n_1 r'_1 = \hat{p}_1 . \Delta' \text{ et } n_2 r'_2 = \hat{p}_3 . \Delta' \;;$$

s'il existe un μ tel que $(r_1,\Delta,r_2)\mu = (r'_1,\Delta',r'_2)$, on doit avoir $\mu = \hat{p}_2\Delta\mu = \hat{p}_2\Delta'$, et il suffit alors de montrer que $\Delta\hat{p}_2\Delta' = \Delta'$, car n_1 et n_2 sont des monos ; désignons par p^3_i, $i = 1,2,3$ les projections naturelles : $X^3 \longrightarrow X$; on a :

$$p^3_1\Delta\hat{p}_2\Delta' = p_1\hat{p}_2\Delta\hat{p}_2\Delta' = p_1\hat{p}_2\Delta' = p^3_1\Delta'$$

et de même $p^3_3\Delta\hat{p}_2\Delta' = p^3_3\Delta'$; on est ramené à prouver simplement que : $p^3_2\Delta\hat{p}_2\Delta' = \theta\hat{p}_2\Delta' = p^3_2\Delta'$; or on voit que :

$$\begin{aligned} p^3_2\Delta' &= p_1\hat{p}_1\Delta' = p_1 n_1 r'_1 = \theta n_1 r'_1 = \theta\hat{p}_1\Delta' \\ &= p_2\hat{p}_3\Delta' = p_2 n_2 r'_2 = \theta n_2 r'_2 = \theta\hat{p}_3\Delta' \;; \end{aligned}$$

mais $$\begin{aligned} \hat{p}_2\Delta' &= [p^3_1\Delta', p^3_3\Delta'] = [p_1\hat{p}_3\Delta', p_2\hat{p}_1\Delta'] \\ &= p_1 \times p_2 . [\hat{p}_3\Delta', \hat{p}_1\Delta'], \end{aligned}$$

d'où on tire :

$$\begin{aligned} \theta\hat{p}_2\Delta' &= \theta . p_1 \times p_2 . [\hat{p}_3\Delta', \hat{p}_1\Delta'] \\ &= \theta . \theta\times\theta . [\hat{p}_3\Delta', \hat{p}_1\Delta'] \\ &= \theta . [\theta\hat{p}_3\Delta', \theta\hat{p}_1\Delta'] \\ &= \theta . [p^3_2, p^3_2]\Delta' \\ &= \theta . \delta . p^3_2 . \Delta' = p^3_2\Delta', \text{ ce qui achève la preuve dans ce sens.} \end{aligned}$$

- Dans l'autre sens, soit (D) un diagramme comme dans l'énoncé, avec R_1 et R_2 équivalences sur X ; on peut supposer que la limite projective de (D) est donnée sous la forme $(X^2,(r_1,\Delta,r_2))$, avec $\Delta = [p_1,\theta,p_2]$, car $\hat{p}_2.\Delta$ est un isomorphisme (qu'on choisit donc égal à 1_{X^2}) ; on établit successivement que :

* r_1 et r_2 satisfont $r_1 n_1 = 1_{R_1}$ et $r_2 n_2 = 1_{R_2}$
* n_1 et n_2 sont les noyaux respectifs de (θ,p_1) et (θ,p_2)

* $(i_1 = r_1\delta,\ i_2 = r_2\delta)$ est un produit fibré de (n_1,n_2)
* θ satisfait $\theta(1_X\times\theta) = \theta(\theta\times 1_X) = \theta\hat{p}_2$ et $\theta\delta = 1_X$
* θ est une $\mathbb{E}$-algèbre .

considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & R_1 \arrow[dl, "1_{R_1}"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "h'"] & \\ R_1 & X^3 & R_2 \end{tikzcd}$$

où $h = [\delta.p_1,p_2].n_1$

$h' = r_2.\delta.p_1.n_1$; on voit facilement que

$$\hat{p}_1.h = n_1 \quad \text{et} \quad \hat{p}_3.h = n_2.h',$$

de sorte qu'il existe un unique $\mu : R_1 \longrightarrow X^2$ tel que

$$(r_1,\Delta,r_2)\mu = (1_{R_1},h,h') \ ;$$

mais alors $\hat{p}_2\Delta\mu = \mu = \hat{p}_2 h = n_1$ et on a ainsi prouvé que $r_1n_1 = 1$; on voit de même que $r_2n_2 = 1$. Il s'en suit que n_1 est le noyau de (θ,p_1), car si $\theta.f = p_1.f$ et s'il existe $\overline{f}$ tel que $n_1\overline{f} = f$, on doit avoir $\overline{f} = r_1f$, et effectivement $n_1r_1f = f$ car

$$p_1n_1r_1f = \theta f = p_1f \quad \text{et} \quad p_2n_1r_1f = p_2f \ .$$

Nous pouvons poursuivre le raisonnement en termes "d'éléments", pour aller plus vite, car nous savons maintenant que :

"$(x,y) \in R_1 \iff xy = x$"

"$(x,y) \in R_2 \iff xy = y$" , où $xy = \theta(x,y)$;

de $r_1 n_1 = 1_{R_1}$ et $r_2 n_2 = 1_{R_2}$ résulte aussi que le carré

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "i_1 = r_1\delta"'] \arrow[dr, "i_2 = r_2\delta"] & \\
R_1 \arrow[dr, tail, "n_1"'] & & R_2 \arrow[dl, tail, "n_2"] \\
 & X^2 &
\end{tikzcd}$$

est un produit fibré ; on peut donc dire que pour tout $(x,y) \in X^2$ il existe un unique z tel que $(x,z) \in R_2$ et $(z,y) \in R_1$ et que c'est $z = xy$; en effet, xy convient car :

$x(xy) = xy$ résulte de

$$\theta[p_1,\theta] = \theta\hat{p}_3\Delta = \theta n_2 r_2 = p_2 n_2 r_2 = \theta$$

et $(xy)y = xy$ résulte de

$$\theta[\theta,p_2] = \theta\hat{p}_1\Delta = \theta n_1 r_1 = p_1 n_1 r_1 = \theta,$$

et c'est le seul possible car (i_1,i_2) est un produit fibré de (n_1,n_2).

Alors, $\forall x,y,z \in X$, on voit que :

$$\begin{array}{lcl}
(xy,y) \in R_1 & , & (x,xy) \in R_2 \\
((xy)z,z) \in R_1 & , & (xy,(xy)z) \in R_2 \\
(yz,z) \in R_1 & , & (y,yz) \in R_2 \\
(x(yz),yz) \in R_1 & , & (x,x(yz)) \in R_2 \ ;
\end{array}$$

la transitivité de R_1 et R_2 entraîne :

$$\begin{array}{l}
(x(yz),z) \in R_1 \ , \ (x,x(yz)) \in R_2 \\
((xy)z,z) \in R_1 \ , \ (x,(xy)z) \in R_2 \ ,
\end{array}$$

et comme l'unique élément u satisfaisant

$$(u,z) \in R_1 \quad , \quad (x,u) \in R_2$$

est u = xz, il vient :

$$x(yz) = (xy)z = xz \;;$$

il est clair aussi que, $\forall x \in X$, on a $x^2 = x$;
θ est donc une loi binaire associative satisfaisant "$x^2 = x$ et $xyz = xz$" , d'où résulte que

$$(xy)(zt) = x(yz)t = xt \;,$$

ce qui signifie que $\theta.\theta{\times}\theta = \theta.p_1{\times}p_2$ et θ est bien une $\mathbb{E}$-algèbre ▲.

<u>Interprétation en termes de groupoïdes.</u>

Soit G le groupoïde des couples de X, dans C (X est "l'objet des objets", X^2 "l'objet des morphismes", X^3 "l'objet des couples composables", etc...) ; si $\theta : X^2 \longrightarrow X$ est une $\mathbb{E}$-algèbre , les équivalences R_1 et R_2 sont les "objets des morphismes" de deux sous-groupoïdes G_1 et G_2 de G satisfaisant :

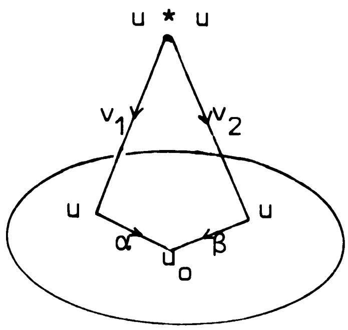
$$\text{"}\, G = G_2.G_1 \quad \text{et} \quad G_1 \cap G_2 = G_o \,\text{"} \qquad ;$$

c'est ce que nous appellerons au chapitre 2 une <u>décomposition directe</u> de G en deux facteurs.

De façon plus précise, soit $\Sigma_g = (S_g,P_g)$ une esquisse de groupoïdes |12| ; S_g est un graphe multiplicatif contenant le graphe suivant :

$$\begin{tikzcd}
u{\star}u \arrow[d, bend right=60, "v_1"'] \arrow[d, "\kappa"] \arrow[d, bend left=60, "v_2"] \\
u \arrow[loop left, "\gamma"] \arrow[d, bend right=60, "\alpha"'] \arrow[d, bend left=60, "\beta"] \\
u_o \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

et d'autres flèches destinées à exprimer les axiomes de groupoïde ; P_g est un ensemble (fini) de cônes projectifs dans S_g, l'un d'entre eux étant le suivant :



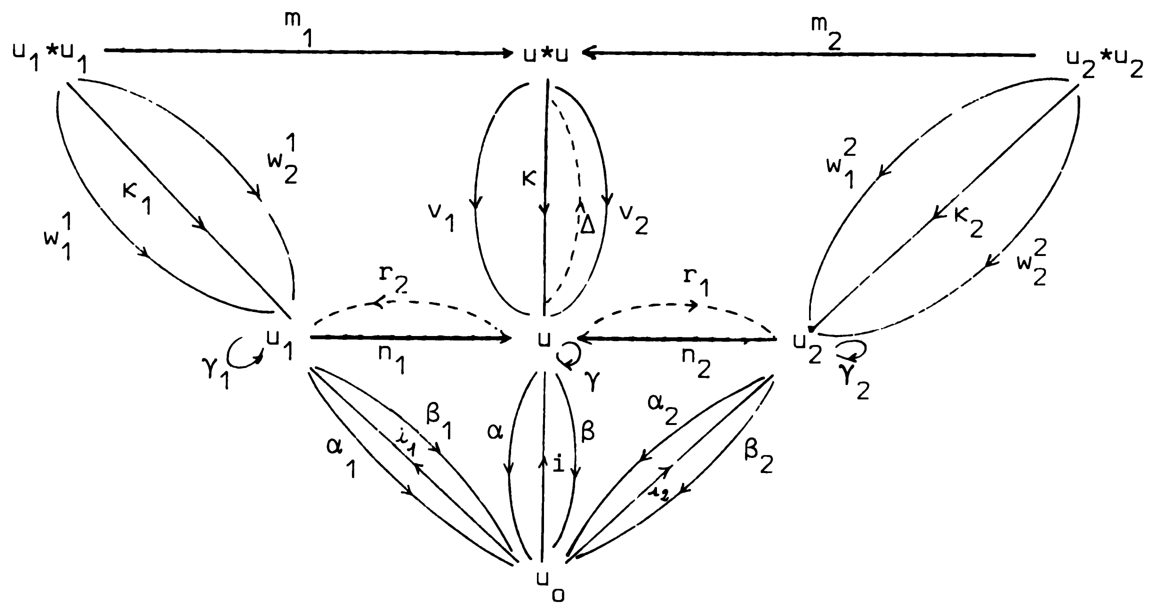
Un groupoïde G dans C est une réalisation de Σ_g dans C, c'est-à-dire un "foncteur" de S_g dans C transformant les cônes projectifs éléments de P_g en cônes limites projectives dans C ; l'interprétation de l'image $G(S_g)$ est la suivante :

$G(u_o)$	objet des "objets"
$G(u)$	objet des "morphismes"
$G(u{*}u)$	objet des "couples composables"
$G(\alpha), G(\beta)$	morphismes "source" et "but"
$G(\kappa)$	morphisme "composition"
$G(\gamma)$	morphisme "passage à l'inverse" etc...

$(G(v_1),G(v_2))$ sera un produit fibré de $(G(\alpha),G(\beta))$.

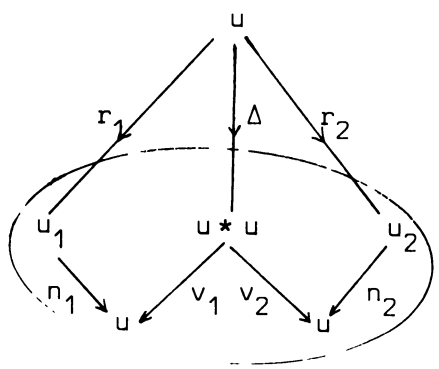
Les équivalences représentables dans C sont données par les groupoïdes G tels que (α,β) soit une famille monomorphe ($G(u) \xrightarrow{[\alpha,\beta]} G(u_o) \times G(u_o)$ est un mono., lorsque $G(u_o) \times G(u_o)$ existe) ; un tel G est une équivalence sur $X = G(u_o)$.

Une bonne partie des raisonnements faits à propos des équivalences subsiste pour les groupoïdes quelconques, et même pour les catégories ou précatégories internes à une catégorie C ; c'est ce que nous verrons plus loin. Disons simplement ici qu'une esquisse de "décomposition directe de groupoïde en deux sous-groupoïdes" soit $\Delta_g=(D_g,P'_g)$ aura les caractéristiques suivantes : le graphe multiplicatif D_g contient pour "morceau essentiel" le graphe suivant :



avec les égalités et les notations suggérées par la proposition 1.5 et que nous n'écrivons pas ici ; l'ensemble P'_g des cônes projectifs de Δ_g contiendra, outre les cônes destinés à faire apparaître trois esquisses de groupoïde dans une seule esquisse (ce que suggère la figure ci-dessus), essentiellement un nouveau cône projectif Λ que nous dessinons :

(Λ)



enfin une "nouvelle" égalité sera : $\boxed{\kappa . \Delta = u}$

(cf. toujours la proposition 1.5).

Si F est une réalisation de Δ_g dans C, le début de la proposition 1.5 reste valable et a la signification suivante :

les affirmations ci-dessous

$$\begin{cases} F(r_1)F(n_1) = 1 \quad , \quad F(r_2)F(n_2) = 1 \\ F(n_1) \text{ est un noyau de } (F(\alpha),F(\alpha)F(v_1)F(\Delta)) \\ F(n_2) \text{ est un noyau de } (F(\beta),F(\beta)F(v_2)F(\Delta)) \\ (F(i_1),F(i_2)) \text{ est un produit fibré de } (F(n_1),F(n_2))\ldots \end{cases}$$

sont des conséquences du seul fait que $F(\Lambda)$ est un cône limite projective dans C. Comme ceci est vrai, quelle que soit la réalisation F, il s'agit d'un "théorème" dans le type T_g associé à Δ_g (en gros, T_g est la catégorie à limites projectives "engendrée" par Δ_g) et qui s'exprime ainsi : dans le type T_g seront vraies les affirmations suivantes :

$$\begin{cases} r_1.n_1 = 1 \quad r_2.n_2 = 1 \\ n_1 \text{ est un noyau de } (\alpha,\alpha.v_1.\Delta) \\ n_2 \text{ est un noyau de } (\beta,\beta.v_2.\Delta) \\ (i_1,i_2) \text{ est un produit fibré de } (n_1,n_2)\ \ldots \end{cases}$$

Pour les groupoïdes quelconques, on ne peut plus considérer $\theta = F(\alpha)F(v_1)F(\Delta) : F(u) \longrightarrow F(u_0)$ comme une algèbre du triple $\mathbb{E} = ((\ )^2,\varepsilon,\mu)$; par contre un autre triple très naturel intervient ici et se substitue à $\mathbb{E}$; énonçons seulement le résultat (cf. chapitre 2) :

Σ_g se plonge naturellement dans Δ_g (partie du milieu) d'où un foncteur d'oublie $C^{\Delta_g} \longrightarrow C^{\Sigma_g}$ entre catégories de réalisations (qui à un groupoïde G décomposé en $G_2.G_1$ fait correspondre G) ; on démontrera que ce foncteur a un adjoint à gauche et que C^{Δ_g} est encore équivalente à la catégorie des $\mathbb{E}'$-algèbres où $\mathbb{E}'$ est le triple dans C^{Σ_g} déduit de l'adjonction précédente.

La présentation de ces questions en termes d'esquisses sera laissée de côté dans les chapîtres suivants ; mais nous avons tenu à le faire ici, afin qu'on ne perde pas de vue que ce qu'on établira par la suite pour les groupoïdes, catégories, précatégories "ordinaires" etc... est encore valable pour les groupoïdes, catégories, précatégories "internes" à une catégorie complète C quelconque.

1.6. TRANSFERT ET EXEMPLES.

Nous allons démontrer la

PROPOSITION - Si C est une catégorie à décompositions algèbriques, il en est de même de C^{σ}, quelle que soit l'esquisse projective σ.

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants :

LEMME 1 - Si C est une catégorie à produits et satisfait la condition (C), alors C^{I} est aussi à produits et satisfait encore la condition (C), quel que soit le graphe multiplicatif I.

LEMME 2 - Dans une catégorie à produits satisfaisant (C), un produit cartésien de deux cônes projectifs (indexés par le même graphe I) est un cône limite si et seulement si les cônes facteurs sont des cônes limites.

La démonstration du lemme 1 consiste en deux remarques : les produits dans C^{I} se calculent "point par point", et les projections $F\times G \xrightarrow{p_F} F$ sont des conoyaux de $(p_F \times p_G, p_1)$ où $p_1 : (F\times G)^2 \longrightarrow F\times G$ est la première projection naturelle, parce que c'est vrai point par point.

La démonstration du lemme 2 nécessite un peu plus d'attention : soit I un graphe multiplicatif et soient

$\pi_1 : \hat{P}_1 \longrightarrow \phi_1$ et $\pi_2 : \hat{P}_2 \longrightarrow \phi_2$ deux I-cônes projectifs, dont

le produit $\pi_1 \times \pi_2 = \hat{P}_1 \times \hat{P}_2 \longrightarrow \phi_1 \times \phi_2$ est cône limite projective (pour un foncteur ou une transformation naturelle constants, on utilise le symbole ^) soit $\hat{Z} \xrightarrow{t} \phi_1$ un cône projectif ; comme $t \times \pi_2 : \hat{Z} \times \hat{P}_2 \longrightarrow \phi_1 \times \phi_2$ est encore un cône projectif et que $\pi_1 \times \pi_2$ est un cône limite, il existe un unique $\mu : Z \times P_2 \longrightarrow P_1 \times P_2$ tel que $(\pi_1 \times \pi_2).\hat{\mu} = t \times \pi_2$; donnons un nom aux diverses projections naturelles qui interviennent :

$$\overbrace{\begin{tikzcd}[column sep=small] & Z \times P_2 \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & & & P_1 \times P_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ Z & & P_2 & P_1 & & P_2 \end{tikzcd}}^{\text{dans } C} \qquad \overbrace{\begin{tikzcd}[column sep=small] & \phi_1 \times \phi_2 \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\ \phi_1 & & \phi_2 \end{tikzcd}}^{\text{dans } C^I} ;$$

on voit que :

$$t.\hat{q}_1 = \varphi_1.(t\times\pi_2) = \varphi_1.(\pi_1\times\pi_2).\hat{\mu} = \pi_1.\hat{p}_1.\hat{\mu}$$

et de même $\pi_2.\hat{q}_2 = \pi_2.\hat{p}_2.\hat{\mu}$; donc, on a

$$\begin{aligned} (\pi_1\times\pi_2).\hat{\mu}.(\hat{q}_1\times\hat{q}_2) &= (t\times\pi_2).(\hat{q}_1\times\hat{q}_2) \\ &= t\hat{q}_1 \times \pi_2\hat{q}_2 \\ &= \pi_1.\hat{p}_1.\hat{\mu} \times \pi_2.\hat{p}_2.\hat{\mu} \\ &= (\pi_1\times\pi_2).(\hat{p}_1\times\hat{p}_2).\hat{\mu}^2, \end{aligned}$$

mais, comme $(\pi_1\times\pi_2)(i)_{i\in I_0}$ est une famille monomorphe, cela entraîne : $\hat{\mu}.\hat{q}_1 \times \hat{q}_2 = \hat{p}_1 \times \hat{p}_2.\hat{\mu}^2$, ce qui signifie encore que μ définit un morphisme de $\mathbb{E}$-algèbres :

$$\mu : (Z\times P_2, q_1\times q_2) \longrightarrow (P_1\times P_2, p_1\times p_2) \;;$$

la catégorie C satisfaisant (C), le foncteur de comparaison $C^2 \longrightarrow C^{\mathbb{E}}$ est pleinement fidèle ; donc, il existe un unique $(\mu_1,\mu_2) : (Z,P_2) \longrightarrow (P_1,P_2)$ tel que $\mu = \mu_1 \times \mu_2$; d'après le lemme 1, la catégorie C^I satisfait encore la condition (C) et comme $(\pi_1\times\pi_2).(\hat{\mu}_1\times\hat{\mu}_2) = t\times\pi_2$, on voit que $(\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2)$ est l'unique couple tel que

$$\pi_1.\hat{\mu}_1 = t \quad \text{et} \quad \pi_2.\hat{\mu}_2 = \pi_2 \;;$$

ceci montre que $\hat{\mu}_2 = \widehat{1_{P_2}}$ et que $\mu_1 : Z \longrightarrow P_1$ est l'unique morphisme tel que $\pi_1.\hat{\mu}_1 = t$, ce qui achève de prouver que $\pi_1 : \hat{P}_1 \longrightarrow \phi_1$ est un cône limite projective.

Démonstration de la proposition.

▼ Soit $\sigma = (S, \mathcal{P})$ une esquisse projective, où S est un graphe multiplicatif et $\mathcal{P}$ un ensemble de cônes projectifs dans S ; soit $\theta : F^2 \longrightarrow F$ une $\mathbb{E}$-algèbre sur F dans C^σ ; les paires (θ, p_1) et (θ, p_2), où les $p_i : F^2 \longrightarrow F$ sont les projections naturelles, ont des conoyaux respectifs $c_1 : F \longrightarrow F_1$ et $c_2 : F \longrightarrow F_2$ dans C^S : ceux-ci se calculent "point par point", compte-tenu de ce que, $\forall x \in S_0$, $\theta(x) : F(x)^2 \longrightarrow F(x)$ est une $\mathbb{E}$-algèbre dans C et que C est à décompositions algébriques ; de plus, on voit facilement que $(F, (c_1, c_2))$ est un produit de F_1 et F_2 dans C^S ; reste à prouver que F_1 et F_2 sont en fait des réalisations de σ dans C ; or, si $\hat{x} \longrightarrow \phi$ est un cône dans S, élément de $\mathcal{P}$, avec $\phi : I \longrightarrow S$, $\widehat{F(x)} \longrightarrow F\phi$ est un cône limite projective produit des deux cônes projectifs $\widehat{F_i(x)} \longrightarrow F_i\phi$, $i = 1,2$; ceux-ci sont encore des cônes limites, d'après le lemme 2 ; la catégorie C_σ satisfait donc les conditions (B1) et (B2) ; elle satisfait aussi la condition (C), d'après le lemme 1, et par suite elle est à décompositions algébriques. ▲

Exemple.

La catégorie $Ens_\star$ des ensembles non vides est exacte et à supports pleins ; donc elle est à décompositions algébriques, d'après le Th. 3 (1.3) ; pour toute esquisse projective $\sigma = (S, \mathcal{P})$ telle que $\mathcal{P}$ ne contienne que des cônes à base discrète, la catégorie $Ens_\star^\sigma$ est encore exacte et à supports pleins et le Th. 3 de 1.3 s'applique encore (remarquons que ces catégories sont équivalentes aux catégories des π-algèbres $Ens_\star^\pi$, où π est un triple dans $Ens_\star$; on les appelle parfois "variétés algébriques") ; dès que $\mathcal{P}$ contient des cônes à base non discrète, l'exactitude (et même la régularité) de $Ens_\star^\sigma$ n'est plus assurée, et le Th. 3 de 1.3 devient inutilisable ; c'est le cas de la catégorie $\mathbb{C}_\star$ des catégories non vides qui peut s'écrire $Ens_\star^{\sigma_C}$ où σ_C est une esquisse de catégorie (purement projective) ; d'après le résultat précédent, elle est à décompositions algébriques, bien qu'elle ne soit même pas régulière.

Remarque.

Si $\sigma = (S, \mathcal{P}, \mathcal{J})$ est une esquisse mixte (i.e. : avec cônes projectifs $\mathcal{P}$ et cônes inductifs $\mathcal{J}$) et si les produits dans C^σ se calculent encore "point par point", le transfert de l'algébricité des décompositions de C à C^σ est encore vrai.

Mais il peut être difficile de reconnaître si une catégorie concrète donnée est esquissable, ou bien, si une esquisse mixte est donnée, de savoir si telle catégorie de réalisations a des produits calculables point par point. Il n'est donc pas inutile d'indiquer le critère suivant :

- soit $p : C \longrightarrow Ens$ un foncteur satisfaisant les conditions suivantes (foncteurs topologiques ou sens de HERRLICH)

(1) p est fidèle et reflète les inversibles

(2) p est sous-étalant (i.e. : $\forall S$ objet de C, $\forall X \subset p(S)$, il existe une p-sous-structure de S au dessus de X)

(3) p est un foncteur à produits ;

alors la catégorie $C_{\star}^{\cdot} = p^{-1}(Ens_{\star})$ est à décompositions algébriques ; cela résulte aussitôt du fait que les épimorphismes de $Ens_{\star}$ sont scindés.

C'est ainsi qu'on traite le cas des espaces topologiques, espaces uniformes, espaces quasi-topologiques, etc... non vides (les décompositions ont une "propriété d'intégrité" analogue à celle de la théorie des anneaux : x et $y \neq 0 \Longrightarrow xy \neq 0$; cette condition n'a pas un caractère "algébrique" et c'est ce qui explique l'élimination des objets vides dans notre théorie algébrique des décompositions !).

CHAPITRE 2

DÉCOMPOSITIONS DES CATÉGORIES EN SOUS-CATÉGORIES

2.0. POSITION DU PROBLÈME.

Dans la catégorie $\mathbb{C}$ des catégories, qui est cartésienne fermée, les triples " exponentiels" ont encore un sens lorsque l' "exposant" est une catégorie non forcément discrète. Nous allons montrer que les algèbres de ces triples s'interprètent encore en termes de décompositions.(références antérieures : [4], [5] et [9]).

Soit $\mathfrak{n}$ la catégorie associée à l'ensemble ordonné [n] à n éléments ; au diagramme $\mathbb{1} \xleftarrow{\sigma} \mathfrak{n} \xrightarrow{\delta} \mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$, où δ est le foncteur diagonal, correspond pour toute catégorie C, le diagramme $C \xrightarrow[\varepsilon]{} C^{\mathfrak{n}} \xleftarrow[\mu]{} (C^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{n}}$ où $\varepsilon = C^{\sigma}$ (identifiant C et $C^{\mathbb{1}}$) et $\mu = C^{\delta}$ (identifiant $C^{\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}}$ et $(C^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{n}}$) ; on obtient ainsi le triple $\mathbb{E}_{\mathfrak{n}} = ((\ )^{\mathfrak{n}}, \varepsilon, \mu)$ dans $\mathbb{C}$, dont nous allons caractériser les algèbres.

2.1. EXAMEN DU CAS $\mathfrak{n} = \mathbf{2}$. (On note $\mathbb{E}_2$ simplement par $\mathbb{E}$).

Nous partons avec la définition suivante :

<u>DEFINITION 2</u> - Un couple (C_2, C_1) de sous-catégories d'une catégorie C est appelé décomposition directe de C (en deux facteurs) lorsque la restriction de la loi de composition de C à $C_2 * C_1 = C * C \cap C_2 \times C_1$ définit une bijection.

<u>Remarque</u>

sur la terminologie employée : il eut été plus conforme à l'usage d'employer l'expression " décomposition semi-directe" , en souvenir des groupes, mais puisque les notions de sommes et de produits ont un sens bien précis dans toute catégorie, nous pensons que l'adjectif "direct" est disponible (et plus court que " semi-direct") et il traduit dans la suite l'idée d'<u>unicité</u>.

<u>Premières conséquences de la définition</u>.

Soit (C_2, C_1) une décomposition directe de C ; pour $f \in C$, on désigne par (f_2, f_1) l'unique couple composable tel que $f = f_2 . f_1$; on désigne par a_i, $i = 1,2$, les applications de C dans C telles que $a_i(f) = f_i$; on a alors les propriétés suivantes :

(P1) $C_2 \cap C_1 = C_o$,

(P2) $(f_2)_2 = f_2$ et $(f_1)_1 = f_1$,

(P3) $(f_2)_1 = \alpha(f_2) = \beta(f_1) = (f_1)_2$

(P4) $(g.f)_2 = g_2.(g_1.f_2)_2$ et $(g.f)_1 = (g_1.f_2)_1.f_1$,

(P5) si $g = f.h$; $[g$ et $f \in C_2 \Longrightarrow h \in C_2]$

$[g$ et $h \in C_1 \Longrightarrow f \in C_1]$

$(P6)_i$ Si f est inversible ; $[f \in a_i(C) \Longrightarrow f^{-1} \in a_i(C)]$ $(i=1,2)$

(P7) Si f est inversible, f_1 et f_2 le sont aussi.

(P8) Si γ est inversible et si $f.\gamma$ (resp. $\gamma.g$) est défini, il existe un unique inversible $\xi_2 \in C_2$ (resp. $\xi_1 \in C_1$) tel que : $(f.\gamma)_2 = f_2.\xi_2$ (resp. $(\gamma.g)_1 = \xi_1.g_1$).

Démonstration de ces propriétés.

(P1) Soit $e = e_2.e_1 \in C_o$; alors $e = \alpha(e_1) = \beta(e_2)$, donc $C_o \subset C_1 \cap C_2$, car C_1 et C_2 sont des sous-catégories de C, et d'ailleurs $e_1 = e_2 = e$, $\forall e \in C_o$; réciproquement, si $f \in C_1 \cap C_2$, alors $(f,\alpha(f)) \in C_2 * C_1$ et $(\alpha(f),f) \in C_2 * C_1$, d'où $f = \alpha(f) = \beta(f) \in C_o$, d'après l'unicité.
(P2),(P3),(P4) et (P5) sont des conséquences immédiates de (P1) et de l'unicité de décomposition.
(P6),(P7) et (P8) sont des cas particuliers de la propriété (Q) suivante, que nous énonçons à part étant donnée son importance :

(Q) soit $q = (g,t',t,f)$ un quatuor de C (carré commutatif) ; il existe un et un seul h tel que :

(g_2,t',h,f_2) et (g_1,h,t,f_1) soient des quatuors ;

il existe un et un seul k tel que

(k,t'_1,t_1,f) et (g,t'_2,t_2,k) soient des quatuors ;

en effet, s'il existe un tel h, on doit avoir, compte-tenu de ce qui précède (surtout P4) :

$$(g_2.h)_1 = h_1 = (t'.f_2)_1 = (t'_1.f_2)_1$$

et $$(h.f_1)_2 = (g_1.t)_2.(t'.f_2)_1 = (g_1.t_2)_2.(t'.f_2)_1 \ ;$$

effectivement, on trouve que :

$$\begin{aligned} g_2.h &= g_2.(g_1.t_2)_2.(t'_1.f_2)_1 \\ &= (g.t)_2.(t'_1.f_2)_1 \\ &= (t'.f)_2.(t'_1.f_2)_1 \\ &= t'_2.(t'_1.f_2)_2.(t'_1.f_2)_1 \\ &= t'_2.(t'_1.f_2) = t'.f_2 \text{ et de même } h.f_1 = g_1.t \ ; \end{aligned}$$

le même argument donne :

$$k = (t'_1.f)_2.(g.t_2)_1 = (t'_1.f_2)_2.(g_1.t_2)_1 \ ;$$

remarquons que h et k "se croisent" ; plus précisément, le quatuor q se décompose de façon unique en quatre quatuors, selon le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "t'_1"] & {} \arrow[r, "t'_2"] & {} \\
{} \arrow[u, "f_2"] \arrow[r, "h_1"] & {} \arrow[u, "k_2"'] \arrow[r, "h_2"] & {} \arrow[u, "g_2"'] \\
{} \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "t_1"'] & {} \arrow[u, "k_1"'] \arrow[r, "t_2"'] & {} \arrow[u, "g_1"']
\end{tikzcd}$$

Autres définitions possibles d'une décomposition directe.

Nous reprenons les notations précédentes et donnons un nom aux conditions suivantes :

(P0) $\forall f \in C$, $a_2(f).a_1(f)$ est défini et égal à f ;

(P'_1) $\alpha(a_1(C)) \subset a_1(C)$

(P'_2) $\beta(a_2(C)) \subset a_2(C)$;

on peut énoncer alors la

PROPOSITION 1 - Pour qu'un couple (a_2,a_1) d'applications de C dans C définisse $(a_2(C),a_1(C))$ comme décomposition directe de C en deux sous-catégories, il faut et il suffit que (a_2,a_1) satisfasse :

$$\begin{cases} (P0),(P3),(P4), \text{ et l'une des quatre conditions} \\ (P6)_1,\ (P6)_2,\ (P'_1),\ (P'_2). \end{cases}$$

▼ La nécessité des conditions a été mentionnée précédemment ; montrons qu'elles sont suffisantes.
D'abord (P2) est une conséquence de (P0) et (P3), car

$$f_2 = f_{22}.f_{21} = f_{22} \quad \text{puisque} \quad f_{21} \in C_0 \ ;$$

de même $f_1 = f_{12}.f_{11} = f_{11}$.

La décomposition de f en $f_2.f_1$, dont l'existence résulte de (P0) est unique ; car si $f = g_2.h_1$, on a :

$$\begin{aligned} f_1 = (g_2.h_1)_1 &= (g_{21}.h_{12})_1.h_{11} \text{ , d'après (P4)} \\ &= h_{121}.h_{11}, \text{ d'après (P3)} \\ &= h_{11} \text{ , encore d'après (P3)} \\ &= h_1 \text{ , d'après (P2) ;} \end{aligned}$$

de même $f_2 = g_2$.

Il reste donc à établir que $a_1(C)$ et $a_2(C)$ sont des sous-catégories de C ; ce sont des sous-ensembles stables pour la loi de composition : en effet, soit (g,f) un couple composable d'éléments de $a_1(C) = C_1$; d'après (P2), on sait que $g = g_1$ et $f = f_1$; il vient alors

$$(g.f)_1 = (g_1.f_1)_1 = (g_{11}.f_{12})_1.f_{11}$$
$$= g_{111}.f_{11} = g.f \;;$$

même raisonnement pour $a_2(C) = C_2$; reste à prouver que C_1 et C_2 sont stables pour les applications source et but ; il est clair que $C_2 \cap C_1 \subset C_o$ d'après (P2) et (P3) ; il suffit d'établir l'inclusion inverse, et c'est là qu'intervient l'une des conditions supplémentaires de l'énoncé : $(P6)_1$, $(P6)_2$, (P'_1), (P'_2) ; nous allons le faire avec $(P6)_1$, puis avec (P'_1), les deux autres cas se traitant de façon analogue.

- Supposons (P'_1) satisfaite ; soit $e \in C_o$; $e = e_2.e_1$; $\alpha(e_1) = e \in C_1$; donc $e = e_1$ et puis $e = e_2.e = e_2$, donc $e \in C_1 \cap C_2$.

- Supposons $(P6)_1$ satisfaite ; soit encore $e = e_2.e_1 \in C_o$; alors $e_1.e_2$ est défini car $\alpha(e_1) = \beta(e_2) = e$; posons $e' = \beta(e_1) = \alpha(e_2)$; d'après (P3) $e' = e_{21} = e_{12} \in C_2 \cap C_1$; comme

$$\begin{aligned} e_2e_1e_2 &= e_2(e_1e_2)_2(e_1e_2)_1 \\ &= e_{22}.e_{21} \\ &= e_2.e_{21} \;, \end{aligned}$$

l'unicité de décomposition prouve que $(e_1.e_2)_1 = e_{21} = e'$; on trouve de même que $(e_1.e_2)_2 = e_{12} = e'$, et donc $e_1.e_2 = e'$, ce qui prouve que e_1 et e_2 sont inversibles ; grâce à (P'_1), on voit que $e_2 = e_1^{-1} \in C_1$, ainsi $e_2 \in C_1 \cap C_2 \subset C_o$, d'où $e = e_1 = e_2 \in C_1 \cap C_2$. ▲

La condition (Q) est essentielle pour démontrer que les $\mathbb{E}$-algèbres sur C sont en bijection naturelle avec les décompositions directes de C en deux-sous-catégories ; de façon précise, introduisons la catégorie $\mathbb{C}^{[2]}$ des morphismes entre décompositions directes ; si (C_2,C_1) et (D_2,D_1) sont des décompositions directes de C et D respectivement, un morphisme $(C_2,C_1) \xrightarrow{F} (D_2,D_1)$ est simplement défini par un foncteur $C \xrightarrow{F} D$ tel que $F(C_i) \subset D_i$, pour $i = 1,2$; soit $U : \mathbb{C}^{[2]} \longrightarrow \mathbb{C}$ le foncteur d'oubli naturel (oubli de la structure de décomposition) ; nous pouvons énoncer la

<u>PROPOSITION 2</u> - Le foncteur U admet un adjoint à gauche L et le triple dans $\mathbb{C}$

induit par (U,L) est $\mathbb{E}$; enfin la catégorie $\mathbb{C}^{[\mathbf{2}]}$ est canoniquement isomorphe à la catégorie $\mathbb{C}^{\mathbb{E}}$ des $\mathbb{E}$-algèbres.

▼Soit C une catégorie ; soit $C^{\mathbf{2}}$ la catégorie des quatuors de C ; un quatuor $q = (g,t',t,f)$ a pour source f et pour but g ; $\overline{q} = (\overline{g},\overline{t}',\overline{t},\overline{f})$ est composable avec q si et seulement si $\overline{f} = g$ et alors $\overline{q}q = (\overline{g},\overline{t}'.t,\overline{t}.t,f)$; la catégorie $C^{\mathbf{2}}$ est munie d'une décomposition directe (T_2,T_1) naturelle définie de la façon suivante :

si $\quad q = (g,t',t,f) \in C^{\mathbf{2}}$

$q_1 = (d,t',\alpha(f),f)$

$q_2 = (g,\beta(g),t,d)$, où $d = t'.f = g.t$ est la diagonale de q ;

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "t'"] & \bullet \\ \bullet \arrow[u, "f"] \arrow[r, "t"'] \arrow[ur, phantom, "\Longrightarrow"] & \bullet \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "t'"] & \bullet \arrow[r, "\beta(g)"] & \bullet \\ \bullet \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha(f)"'] \arrow[ur, phantom, "\Longrightarrow"] & \bullet \arrow[u, "d"] \arrow[r, "t"'] \arrow[ur, phantom, "d \Longrightarrow"] & \bullet \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd} \; ;$$

Soit alors (D_2,D_1) une décomposition directe de D et $F : C \longrightarrow D$; montrons qu'il existe un unique morphisme $\overline{F} : (T_2,T_1) \longrightarrow (D_2,D_1)$ tel que $\overline{F}.\varepsilon = F$;

$$\begin{tikzcd} (D_2,D_1) & (T_2,T_1) \arrow[l, "\overline{F}"'] \end{tikzcd}$$

on remarque que la flèche $\hat{f} = \varepsilon(f)$ se décompose relativement à (T_2,T_1) en

$\hat{f}_1 = (f,f,\alpha(f),\alpha(f))$

$\hat{f}_2 = (\beta(f),\beta(f),f,f)$;

$$\begin{tikzcd} D & \\ C \arrow[u] \arrow[r, "\varepsilon"'] & C^{\mathbf{2}} \arrow[ul, dashed, "\overline{F}"'] \end{tikzcd}$$

si $\quad q = (g,t',t,f) \in C^{\mathbf{2}}$

$\hat{q} = (\hat{g},\hat{t}',\hat{t},\hat{f}) \in (C^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}}$;

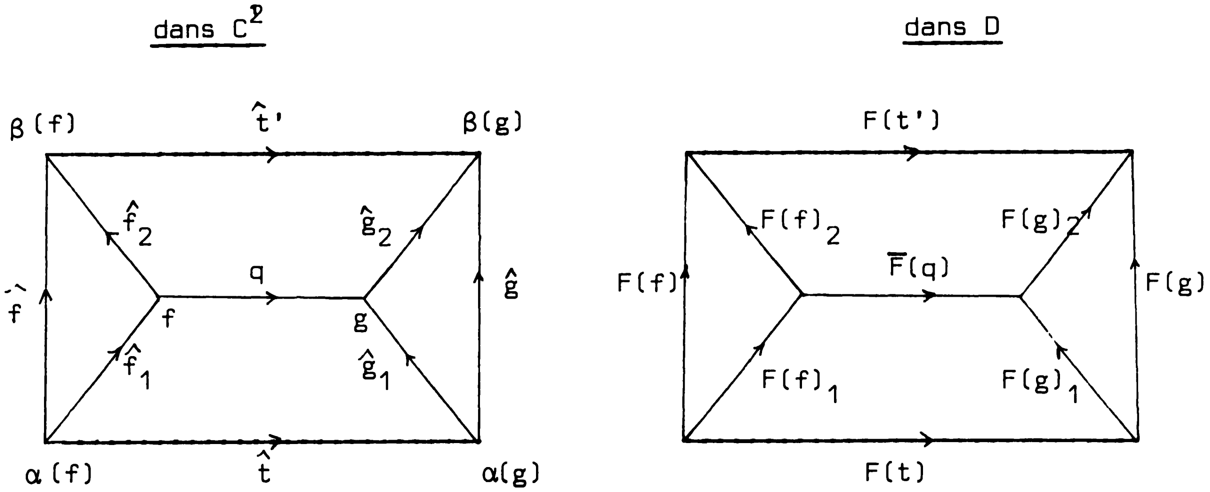
d'après la propriété (Q) relative à (T_2,T_1), il existe une unique flèche $\tau : f \longrightarrow g$ dans $C^{\mathbf{2}}$ telle que $(\hat{g}_2,\hat{t}',\tau,\hat{f}_2)$ et $(\hat{g}_1,\tau,\hat{t},\hat{f}_1)$ soient des quatuors ; or, il est clair que cette flèche n'est autre que $q : f \longrightarrow g$; la valeur de $\overline{F}$

aux bords de $\hat{q}$ est imposée par $\overline{F}\cdot\varepsilon = F$; de plus, on veut que $\overline{F}(\hat{f}_i) = F(f)_i$ et $\overline{F}(\hat{g}_i) = F(g)_i$, pour $i = 1,2$, car $\overline{F}$ doit définir un morphisme de (T_2,T_1) vers (D_2,D_1) ; alors la valeur nécessaire de $\overline{F}(q)$ est l'unique flèche h dans D telle que $(F(g)_2,F(t'),h,F(f)_2)$ et $(F(g)_1,h,F(t),F(f)_1)$ soient des quatuors (propriété (Q) relative à (D_2,D_1)) ; ceci établit l'existence et l'unicité du foncteur $\overline{F}$; explicitement on trouve donc :

$$\boxed{\overline{F}(q) = (F(g)_1 F(t)_2)_2 (F(t')_1 F(f)_2)_1} \quad ;$$

il est clair que $\overline{F}(T_i) \subset D_i$ pour $i = 1,2$;

Figure



Ceci prouve que (T_2,T_1) est une U-structure libre engendrée par C ; alors $L(C) = (T_2,T_1)$ se prolonge en un adjoint à gauche L de U et le triple dans $\mathbb{C}$ induit par (U,L) est bien égal à $\mathbb{E}$; reste à voir que la catégorie $\mathbb{C}^{\mathbb{E}}$ des $\mathbb{E}$-algèbres est naturellement isomorphe à $\mathbb{C}^{[2]}$.

Le foncteur de comparaison $\phi : \mathbb{C}^{[2]} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{E}}$ associe à une décomposition directe (C_2,C_1) de C la $\mathbb{E}$-algèbre suivante :

$$\theta : C^2 \longrightarrow C \quad , \ \theta = \overline{Id_C} \text{ , soit explicitement :}$$

pour $q = (g,t',t,f)$, $\theta(q) = (g_1 \cdot t_2)_2 (t'_1 \cdot f_2)_1$.

Plutôt que de vérifier le critère de Beck, décrivons directement l'inverse de ϕ, soit ψ ; si $\theta : C^{\mathbf{2}} \longrightarrow C$ est une $\mathbb{E}$-algèbre, on a $\psi(\theta) = (\theta(T_2),\theta(T_1))$; pour voir que c'est bien une décomposition directe de C en deux sous-catégories, on montre que le couple d'applications (a_2,a_1) définies par $a_i(f) = \theta(\hat{f}_i)$, $i = 1,2$, satisfait bien les conditions (P0), (P3), (P4) et (P_i') :

<u>pour (P0)</u>, cela résulte de $\theta(\hat{f}) = \theta\varepsilon(f) = f$

$$\text{et } \theta(\hat{f}) = \theta(\hat{f}_2.\hat{f}_1) = a_2(f).a_1(f)$$

<u>pour (P_i')</u>, c'est évident, car θ est un foncteur ;

<u>pour (P3)</u>, considérons le quatuor suivant dans $C^{\mathbf{2}}$:

$$Q_f = \begin{tikzcd} f \arrow[r, "\hat{f}_2"] \arrow[dr, phantom, "\Longrightarrow"] & \beta(f) \\ f \arrow[u, "1_f"] \arrow[r, "1_f"'] & f \arrow[u, "\hat{f}_2"'] \end{tikzcd}$$

c'est un élément de $(C^{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}}$;

$$\mu(Q_f) = \begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\beta(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\Longrightarrow"] & {} \\ {} \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha(f)"'] & {} \arrow[u, "f"] \end{tikzcd} = 1_f$$

$$\theta^{\mathbf{2}}(Q_f) = \begin{tikzcd} {} \arrow[r, "f_2"] & {} \\ {} \arrow[u, "\alpha(f_2)"'] \arrow[r, "\alpha(f_2)"'] & {} \arrow[u, "f_2"] \end{tikzcd} = \widehat{(f_2)}_1$$

d'où, puisque $\theta.\theta^{\mathbf{2}} = \theta.\mu$, et par définition de a_1 et a_2

$$f_{21} = \alpha(f_2) \text{ ; on démontre de même que } f_{12} = \beta(f_1) \text{ ;}$$

<u>pour (P4)</u>, considérons le quatuor suivant dans $C^{\mathbf{2}}$:

$$Q_{g,f} = \begin{tikzcd} g \arrow[r, "1_g"] \arrow[dr, phantom, "\Longrightarrow"] & g \\ f \arrow[u, "q"] \arrow[r, "\hat{f}_2"'] & \beta(f)=\alpha(g) \arrow[u, "\hat{g}_1"'] \end{tikzcd} \qquad \text{où } q = \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "g"] \arrow[dr, phantom, "\Longrightarrow"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "f"] \arrow[r, "f"'] & \cdot \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

c'est un élément de $(C^2)^2$; et on trouve :

$$\mu(Q_{g,f}) = \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\beta(g)"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "g.f"] \arrow[r, "\hat{f}"'] & \cdot \arrow[u, "\hat{g}"'] \end{tikzcd} = q_\mu$$

$$\theta^2(Q_{g,f}) = \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\beta(g_1)"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "\theta(q)"] \arrow[r, "f_2"'] & \cdot \arrow[u, "g_1"'] \end{tikzcd} = q_\theta, \text{ où } \theta(q) = g_1.f_2$$

or, pour tout quatuor $\overline{q} = (k,t',t,h)$, il résulte de la propriété (Q) relative à (T_2,T_1) et de la fonctorialité de θ les égalités suivantes :

$$\theta(\overline{q}).h_1 = k_1.t \quad \text{et} \quad k_2.\theta(\overline{q}) = t'.h_2 \ ;$$

appliquant ce principe à q_θ et q_μ, il vient compte-tenu de (P3) :

$$g_2.\theta(q_\theta) = g_2.(g_{12}.\theta(q_\theta)) = g_2.(\beta(g_1).(g_1.f_2)_2) = g_2(g_1.f_2)_2$$

et $g_2.\theta(q_\mu) = \beta(g).(g.f)_2 = (g.f)_2$

d'où $(g.f)_2 = g_2(g_1.f_2)_2$, car $\theta(q_\theta) = \theta(q_\mu)$;

on montre de même que $(g.f)_1 = (g_1.f_2)_1.f_1$, et ceci achève de prouver que le couple (a_2,a_1) définit bien une décomposition directe de C ; on constate sans peine que $(C_2,C_1) = (a_2(C),a_1(C)) = (\theta(T_2),\theta(T_1))$, de sorte que ψ est bien l'inverse de ϕ. ▲

Remarques.

1) Le foncteur $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{[\mathbf{2}]}$ est pleinement fidèle ; si $\varphi : C \longrightarrow C'$ est un foncteur, on trouve évidemment $UL(\varphi) = \varphi^{\mathbf{2}}$; l'expression du critère de Beck devient ici la suivante : si $C \overset{\varphi}{\underset{\varphi'}{\rightrightarrows}} C'$ est une paire contractile dans $\mathbb{C}$ et si $p : C' \longrightarrow D$ est un conoyau de (φ,φ'), alors $p^{\mathbf{2}} : C'^{\mathbf{2}} \longrightarrow D^{\mathbf{2}}$ est un conoyau de la paire $(\varphi^{\mathbf{2}},\varphi'^{\mathbf{2}})$.

2) La catégorie de Kleisli de $\mathbb{E}$ s'identifie bien sûr à la catégorie des transformations naturelles (munie de la loi de composition longitudinale, selon la terminologie d'Ehresmann).

3) La définition de décomposition directe d'une catégorie C peut s'exprimer aussi comme il a été suggéré à la fin du chapitre 1, de la façon suivante : c'est un couple (C_2,C_1) de sous-catégories de C tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[dr, "i_1"'] & & C \star C \arrow[dl, "v_1"] \arrow[dr, "v_2"'] & & C_2 \arrow[dl, "i_2"] \\ & C & & C & \end{tikzcd} \qquad \text{où} \begin{cases} v_1(g,f) = f \\ v_2(g,f) = g \\ i_1 \text{ et } i_2 \text{ injections canoniques} \end{cases}$$

admette une limite projective dans Ens, soit :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, "d"] \arrow[dr, "r_2"] & \\ C_1 & C \star C & C_2 \end{tikzcd},$$

ayant la propriété que $\kappa \circ d : P \longrightarrow C$ soit un isomorphisme, κ désignant la composition ; il est clair qu'on peut choisir alors $P = C$ et

$$\left| \begin{array}{l} d(f) = (f_2,f_1) \\ r_1(f) = f_1 \\ r_2(f) = f_2 \end{array} \right.$$

de sorte que $\left| \begin{array}{l} a_1 = i_1\, r_1 = v_1\, d \\ a_2 = i_2\, r_2 = v_2\, d \end{array} \right.$

La proposition 2.1 (2) exprime qu'il existe une définition "interne" à $\mathbb{C}$ de ces décompositions. Si, dans la définition précédente, on n'exige plus que C_1 et C_2

soient des sous-catégories, la situation est complètement différente : nous verrons celà au chapitre 4.

Avant de poursuivre l'étude des décompositions directes en 2 facteurs, nous allons montrer que la proposition 2.1 (2) se généralise avec le triple $\mathbb{E}_n$.

2.2. DÉCOMPOSITIONS EN n SOUS-CATÉGORIES. TRIPLES $\mathbb{E}_n$.

Nous allons suivre la démarche adoptée en 2.1; nous partons donc avec la définition suivante :

DEFINITION n - (récurrente à partir de la définition 2).

Un n-uple $(C_n,\dots,C_1)$ est une décomposition directe de la catégorie C en n sous-catégories si et seulement si :

(1) $(C_n,\dots,C_{i+2},C_{i+1}.C_i,\dots,C_1)$ est une décomposition directe de C en (n-1)-sous-catégories, pour i = 1,2,...,n-1 ;

(2) pour $i > j$, on a $C_j.C_i \subset C_i.C_j$

Voici d'abord des conséquences faciles (à établir) de cette définition :

($\overline{P}$1) Tout $f \in C$ s'écrit de façon unique $f = f_n \dots f_1$ avec $f_i \in C_i$;

($\overline{P}$2) Pour tout i de 1 à n, on a $(C_i)_o = C_o$

($\overline{P}$3) Pour $i \neq j$, on a $C_i \cap C_j = C_o$

($\overline{P}$4) Soit $1 \leq i_1 < i_2 \dots < i_k \leq n$; alors $C_{i_k}.C_{i_{k-1}} \dots C_{i_1}$ est une sous-catégorie de C et $(C_{i_k},C_{i_{k-1}},\dots,C_{i_1})$ en est une décomposition directe en k sous-catégories ;

($\overline{P}$5) (associativité) posons pour $i \leq j$, $C_{[j,i]} = C_j.C_{j-1} \dots C_i$; avec cette convention et toujours pour $1 \leq i_1 < i_2 \dots < i_k \leq n$ on montre que $(C_{[n,i_k]}, C_{[i_k,i_{k-1}]}, \dots, C_{[i_2,i_1]}, C_{[i_1,1]})$ est une décomposition directe de C en k+1 sous-catégories.

($\overline{P}$6) supposons $j \notin \{i_1,i_2,\dots,i_k\} \subset \{1,2,3,\dots,n\}$; alors on a :

$$(C_{i_k}.C_{i_{k-1}} \dots C_{i_1})_j = C_o$$

Il est clair que les conditions $(\overline{P}1)$, $(\overline{P}3)$ et $(\overline{P}6)$ caractérisent les décompositions directes de C en n sous-catégories.
Par morphisme $F : (C_n,\dots,C_1) \longrightarrow (D_n,\dots,D_1)$ entre décompositions on entend un foncteur entre les catégories sous-jacentes tel que $F(C_i) \subset D_i$, pour $i = 1,2,\dots,n$; on obtient ainsi la catégorie $\mathbb{C}^{[\mathbf{n}]}$ des morphismes entre décompositions et son oubli naturel $U_n : \mathbb{C}^{[\mathbf{n}]} \longrightarrow \mathbb{C}$.

<u>PROPOSITION</u> - Le foncteur U_n est triplable ; plus précisément, il admet un adjoint à gauche L_n tel que la paire (U_n,L_n) induise dans $\mathbb{C}$ le triple $\mathbb{E}_{\mathbf{n}}$ et $\mathbb{C}^{[\mathbf{n}]}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{C}^{\mathbb{E}_{\mathbf{n}}}$.

▼ Soit C une catégorie ; il est commode d'adopter les conventions d'écriture suivantes :

- la catégorie $\mathbf{n}$ est engendrée par n-1 flèches composables notées u_i :

$$\underset{0}{\cdot} \xrightarrow{u_1} \underset{1}{} \xrightarrow{u_2} \underset{2}{} \cdots\cdots\cdots\cdots \underset{n-2}{} \xrightarrow{u_{n-1}} \underset{n-1}{\cdot}$$

- si $t : \varphi \longrightarrow \varphi' \in C^{\mathbf{n}}$, on pose $t(i) = t^i$

$\varphi^i = \varphi(u_i)$, de sorte que la place est libre en bas pour les indices se rapportant à la notion de décomposition.

- La catégorie $C^{\mathbf{n}}$ est munie d'une décomposition directe naturelle $(T_n,\dots,T_1)$ où

$$T_i = \{t \in C^{\mathbf{n}} \mid t^j \in C_o,\ \forall j \neq n-i\} ;$$

nous allons montrer que $(T_n,\dots,T_1)$ est une U_n-structure libre engendrée par C, avec $\varepsilon : C \longrightarrow C^{\mathbf{n}}$ comme injection correspondante.

Soit donc $(D_n,\dots,D_1)$ une décomposition directe de D en n sous-catégories et soit $F : C \longrightarrow D$ un foncteur ; alors il existe un unique foncteur $\overline{F} : C^{\mathbf{n}} \longrightarrow D$ satisfaisant :

$$\overline{F}.\varepsilon = F \quad \text{et} \quad \overline{F}(T_i) \subset D_i, \text{ pour } i = 1,2,\dots,n .$$

<u>Description de</u> $\overline{F}$. On pose toujours $\hat{f} = \varepsilon(f)$; dans ce cas,

$$\hat{f}_i^j = \hat{f}_i(j) = \begin{cases} \beta(f) \text{ pour } j > n-i \\ \quad f \quad \text{pour } j = n-i \\ \alpha(f) \text{ pour } j < n-i \end{cases} ;$$

pour une décomposition directe en n sous-catégories, abrégeons l'écriture en posant $a_i(\xi) = \xi_i.\xi_{i-1} \ldots \xi_1$ et $b_i(\xi) = \xi_n \ldots \xi_{i+1}$, le couple (b_i,a_i) définissant une décomposition directe en deux sous-catégories.

Soit $\varphi : \mathfrak{n} \longrightarrow C$ un objet de $C^{\mathfrak{n}}$; on définit par récurrence les transformations naturelles suivantes :

$$\tau^{(1)} = b_{n-1}(\widehat{\varphi^1})$$
$$\tau^{(2)} = b_{n-2}(\widehat{\varphi^2}.\tau^{(1)})$$
$$\vdots$$
$$\tau^{(k)} = b_{n-k}(\widehat{\varphi^k}.\tau^{(k-1)})$$
$$\vdots$$

on voit, par récurrence, que

$$\alpha(\tau^{(1)}) = \varphi^{(1)},$$
$$\vdots$$
$$\alpha(\tau^{(k)}) = \varphi^{(k)},$$
$$\vdots$$
$$\alpha(\tau^{(n-1)}) = \varphi^{(n-1)} = \varphi,$$

où $\varphi^{(k)} : \mathfrak{n} \longrightarrow C$ est le foncteur défini par :

$$\begin{cases} \varphi^{(k)}(u_i) = \varphi^i \quad \text{pour } i \leq k \\ \varphi^{(k)}(u_i) = \beta(\varphi^k) \text{ pour } i > k \end{cases}$$

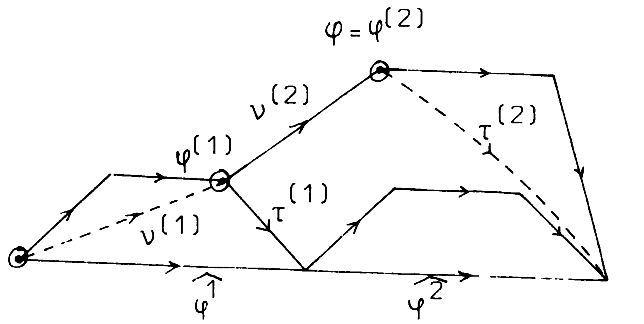
de sorte que $\varphi^{(n-1)} = \varphi$; posons aussi :

$$\nu^{(k)} = a_{n-k}(\widehat{\varphi^{k}}\tau^{(k-1)}),$$ de sorte que :

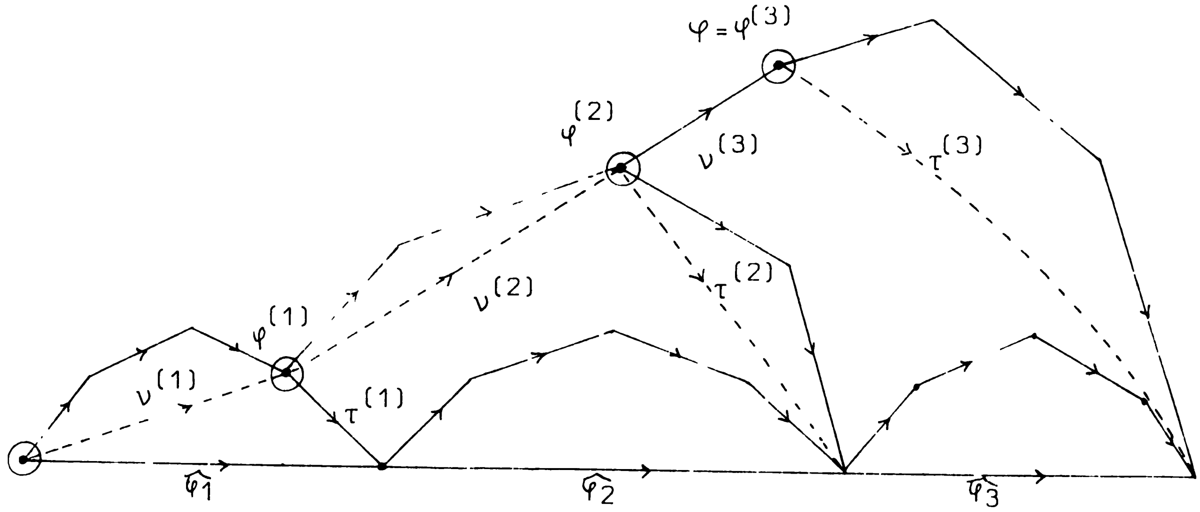
$$\varphi^{(k)} = \beta(\nu^{(k)}) \text{ et } \tau^{(k)}.\nu^{(k)} = \widehat{\varphi^{k}}.\tau^{(k-1)},$$ et en particulier

$\varphi = \beta(\nu^{(n-1)}) = \alpha(\tau^{(n-1)})$; voici les figures correspondantes pour $n = 3$ et $n = 4$ (dans C^3 et C^4 respectivement) :

$\boxed{n = 3}$



$\boxed{n = 4}$



Posons alors $f^i = F(\varphi^i)$; par récurrence, on définit dans D les flèches suivantes (analogues de $\tau^{(k)}$ et $\nu^{(k)}$) :

$$
\begin{aligned}
g^1 &= b_{n-1}(f^1) \quad , \; h^1 = a_{n-1}\,(f^1) \\
g^2 &= b_{n-2}(f^2 g^1) \; , \; h^2 = a_{n-2}(f^2 g_1) \\
&\vdots \\
g^k &= b_{n-k}(f^k g^{k-1}), h^k = a_{n-k}(f^k g^{k-1})
\end{aligned}
$$

les conditions imposées à $\overline{F}$ entraînent successivement :

$$\overline{F}(\widehat{\varphi^1}) = F(\varphi^1) = f^1 \quad \text{d'où} \quad \overline{F}(\tau^{(1)}) = g^1,$$

puis $\overline{F}(\widehat{\varphi^k}.\tau^{(k-1)}) = \overline{F}(\widehat{\varphi^k})\ \overline{F}(\tau^{(k-1)}) = f^k\ g^{k-1}$

d'où $\overline{F}(\tau^{(k)}) = g^k$;

la valeur de $\overline{F}$ sur les objets de C^{n} est donc parfaitement déterminée par :

$$\boxed{\overline{F}(\varphi) = \alpha(g^{n-1}) = \beta(h^{n-1})}$$

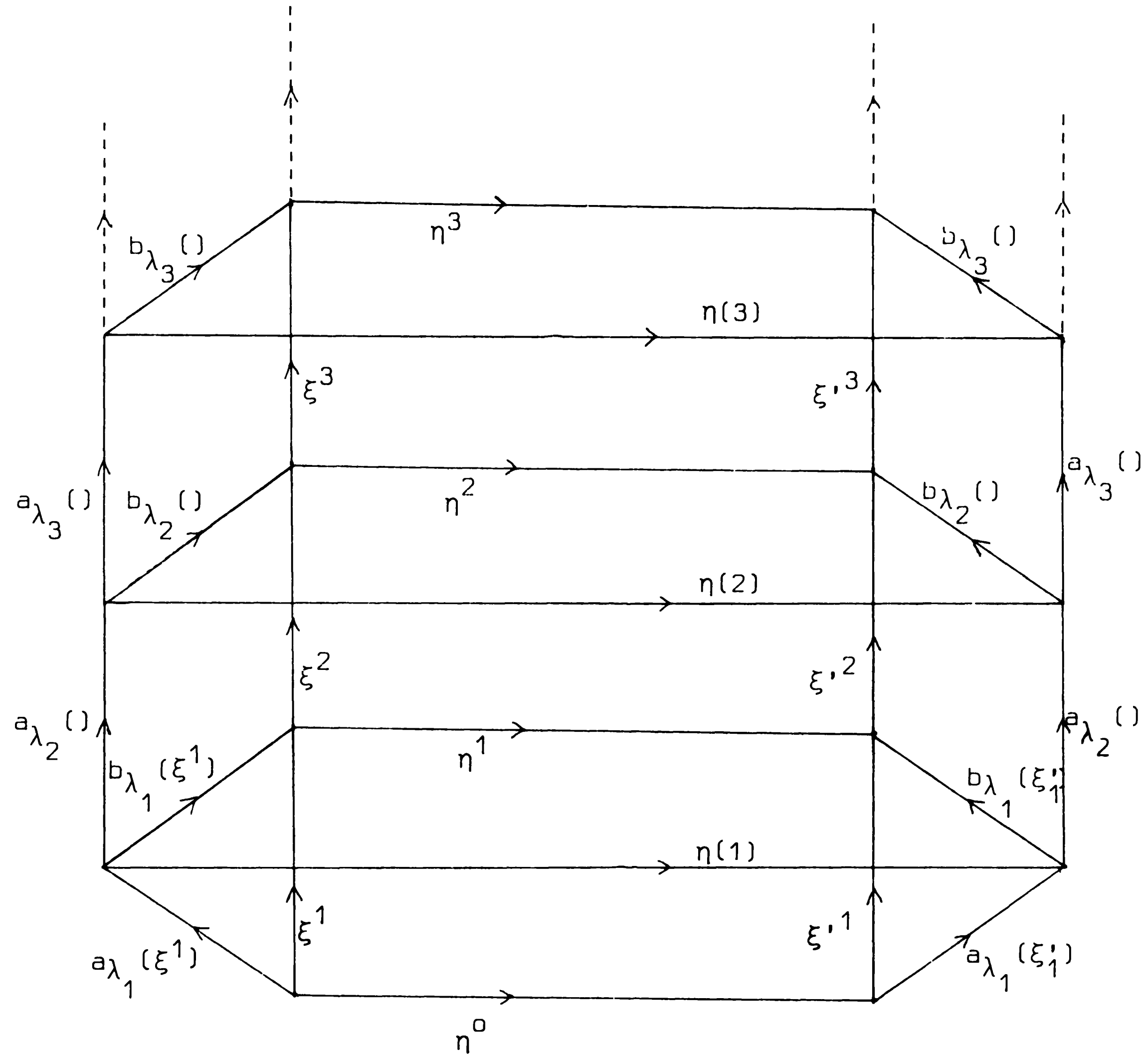
Quant aux morphismes, c'est toujours la propriété (Q), relative aux décompositions directes en deux sous-catégories, qui va en déterminer la valeur par $\overline{F}$, car, pour tout $i = 1,2,\dots,n-1$ les couples (b_i, a_i) déterminent des décompositions directes en deux sous-catégories (qu'on soit dans C^{n}, dans D etc...) ; partant d'un morphisme $t : \varphi \longrightarrow \varphi'$ dans C^{n}, on en déduit les carrés commutatifs suivants, dans C^{n} :

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\widehat{t^i}"] & {} \\
{} \arrow[u, "\widehat{\varphi^i}"] \arrow[r, "\widehat{t^{i-1}}"'] & {} \arrow[u, "\widehat{\varphi'^i}"']
\end{tikzcd}
$$

qui doivent par $\overline{F}$ s'envoyer dans D sur les carrés commutatifs :

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F(t^i)"] & {} \\
{} \arrow[u, "f^i"] \arrow[r, "F(t^{i-1})"'] & {} \arrow[u, "f'^i"']
\end{tikzcd}
$$

Or, dans une catégorie munie d'une η-décomposition, si l'on est en présence de carrés commutatifs composables, soit $(\xi'^{i},\eta^{i},\eta^{i-1},\xi^{i})$, où i = 1,2,..., selon le schéma suivant, et si pour chaque i, on a choisi une décomposition $(b_{\lambda_i},a_{\lambda_i})$ où $\lambda_i \in \{1,2,\dots,n-1\}$, on voit, par récurrence et en utilisant la propriété (Q), qu'il existe une unique suite $(\eta^{(1)},\eta^{(2)},\dots)$, disposée comme indiquée sur la figure et rendant tous les carrés commutatifs :



appliquant ce principe à la suite :

$$(\widehat{\varphi'^{i}}, \widehat{t^{i}}, \widehat{t^{i-1}}, \widehat{\varphi^{i}}) \;,\; i = 1,2,\dots,n-1,$$

et $\lambda_i = n-i$, on voit qu'il existe une unique suite $(\eta^{(i)} : \varphi^{(i)} \longrightarrow \varphi'^{(i)})_{i=1,2,\dots,n-1}$ rendant commutatifs les carrés voulus ; on peut voir aussi (par récurrence) que $\eta^{(n-1)} = t : \varphi \longrightarrow \varphi'$; appliquant ce même principe à la suite :

$$(f'^{i}, F(t^{i}), F(t^{i-1}), f^{i}) \;,\; i = 1,2,\dots,n-1,$$

toujours avec $\lambda_i = n - i$, on voit qu'il existe une unique suite $(m_i)_{i=1,2,\dots,n-1}$ rendant commutatifs les carrés suivants :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "m^{i}"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "h^{i}"] \arrow[r, "m^{i-1}"'] & \cdot \arrow[u, "h'^{i}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "F(t^{i})"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "g^{i}"] \arrow[r, dashed, "m^{i}"'] & \cdot \arrow[u, "g'^{i}"'] \end{tikzcd}$$

ceci entraîne que la valeur nécessaire de $\overline{F}(t)$ est :

$$\boxed{\overline{F}(t) = m^{n-1}}$$

et que $\overline{F}$ est bien un foncteur ; en fait on peut indiquer la valeur exacte de m^{n-1}, par récurrence :

$$m^{0} = F(t^{0})$$

$$m^{1} = b_{n-1}(h'^{1}m^{0})\; a_{n-1}(F(t^{1})g^{1})$$

$\cdot$
$\cdot$
$\cdot$

$$m^{k} = b_{n-k}(h'^{k}m^{k-1})\; a_{n-k}(F(t^{k})g^{k})$$

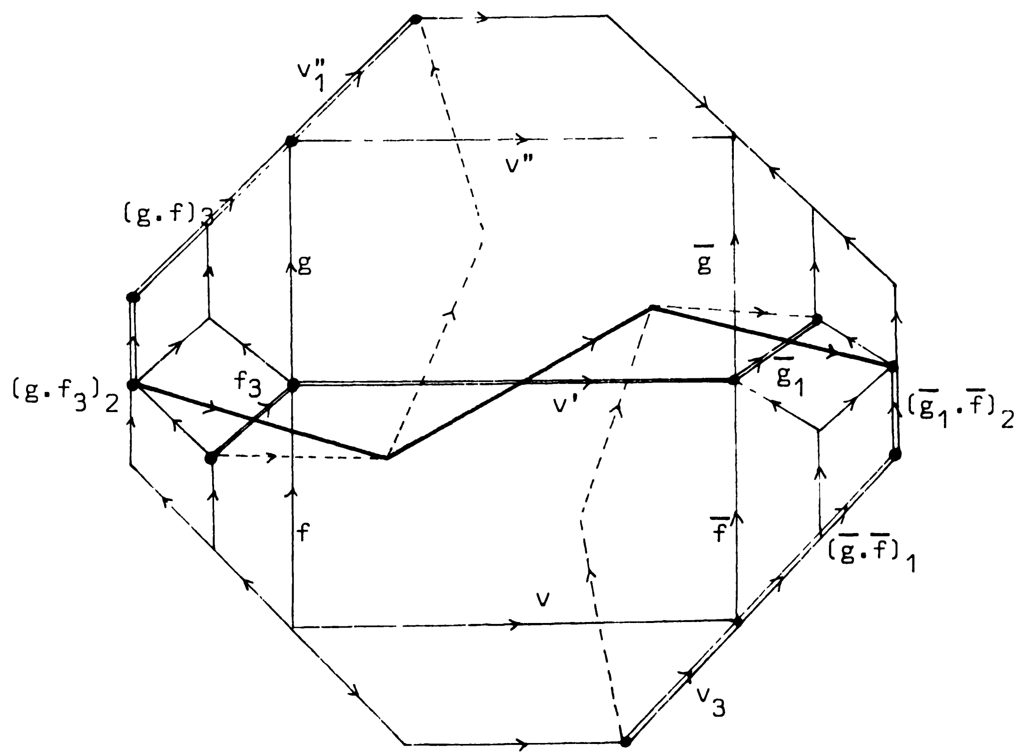
$\cdot$
$\cdot$
$\cdot$

On voit que la formule donnant explicitement $\overline{F}(t)$ en fonction des $F(\varphi^i)_j$, $F(\varphi'^i)_j$, $F(t^i)_j$ est relativement compliquée ; voici, à titre d'exemple, pour $m = 3$, ce que cela donne, après simplifications, et en posant :

$$F(\varphi^1) = f \;,\quad F(\varphi'^1) = \overline{f}\;,$$
$$F(\varphi^2) = g \;,\quad F(\varphi'^2) = \overline{g}\;,$$
$$F(t^o) = v \;,\quad F(t^1) = v' \;,\; F(t^2) = v'' \;;$$

on trouve :

$$\overline{F}(t) = ((\overline{g}_1.\overline{f})_2.(\overline{g}.\overline{f})_1.v_3)_3(\overline{g}_1.v'.f_3)_2(v''_1.(g.f)_3(g.f_3)_2)_1$$



en traits doubles les trois flèches qui figurent dans les parenthèses principales de la formule ci-dessus, et en traits pointillés ou pleins leurs décompositions respectives en trois, les "raccords" devant se faire comme l'indique la figure ; en traits pleins apparaissent les trois facteurs de $\overline{F}(t)$.

Le fait que $\mathbb{C}^{[n]}$ soit canoniquement isomorphe à la catégorie $C^{\mathbb{E}_n}$ des $\mathbb{E}_n$-algèbres s'établit aisément par récurrence à partir de $n = 2$; indiquons seulement que l'inverse ψ_n du foncteur de comparaison ϕ_n est donné par :

$$\psi_n(\theta) = (\theta(T_n),\theta(T_{n-1}),\dots,\theta(T_1)) \; ;$$

en conclusion, on peut affirmer qu'une décomposition directe en n sous-catégories équivaut à la donnée d'un foncteur de $n - 1$ dans la sous-catégorie pleine de $C^{(C^2)}$ dont les objets sont les $\mathbb{E}_2$-algèbres. ▲

<u>Structure cartésienne fermée de $\mathbb{C}^{[n]}$.</u>

Identifions, conformément à la proposition précédente, les catégories $\mathbb{C}^{[n]}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{E}_n}$; soient (C,θ) un objet de $\mathbb{C}^{[n]}$; pour toute catégorie D, on obtient une $\mathbb{E}_n$-algèbre $\theta^{(D)}$ sur C^D en composant $\theta^D : (C^n)^D \to C^D$ avec l'isomorphisme naturel $(C^n)^D \simeq (C^D)^n$; on peut construire explicitement la "décomposition directe $\theta^{(D)}$" à partir de la "décomposition directe θ", point par point, en utilisant la propriété (Q).

Soient (C,θ) et (D,θ') deux objets de $\mathbb{C}^{[n]}$; désignons par $C^{[D]}$ la sous-catégorie pleine de C^D dont les objets sont les foncteurs $F : D \to C$ définissant un morphisme $F : (D,\theta') \to (C,\theta)$; la structure $\theta^{(D)}$ induit sur $C^{[D]}$ une structure $\theta^{\theta'}$, de sorte que $(C^{[D]},\theta^{\theta'})$ est un objet de $\mathbb{C}^{[n]}$: c'est le "hom interne", qu'on désigne par $(C,\theta)^{(D,\theta')}$; la catégorie $\mathbb{C}^{[n]}$ est cartésienne ($(C,\theta) \times (\overline{C},\overline{\theta}) = (C\times\overline{C},\theta\times\overline{\theta})$, où $\theta \times \overline{\theta}$ est la décomposition définie par $(g,f)_i = (g_i,f_i)$, $i = 1,2,\dots,n$) et on montre , comme dans $\mathbb{C}$, que le foncteur $(\ ) \times (D,\theta')$ dans $\mathbb{C}^{[n]}$ est adjoint à gauche de $(\ )^{(D,\theta')}$; en termes de sous-catégories, si $(C_n,\dots,C_1)$ est la décomposition représentée par (C,θ), alors $(C^{[D]} \cap C_n^D, \dots, C^{[D]} \cap C_1^D)$ est la décomposition représentée par $(C,\theta)^{(D,\theta')}$.

<u>Remarque</u> : En général, si (C,θ) est un objet de $\mathbb{C}^{[n]}$ qu'on peut identifier à une décomposition directe $(C_n,\dots,C_1)$ de C, et si K est une sous-catégorie de C, il n'y a pas de structure induite par θ sur K ; par contre, il y a toujours une structure de décomposition induite par θ, engendrée par K (dénombrablement) : elle est définie sur la sous-catégorie $\overline{K}$ de C suivante :

$$\begin{cases} \text{Soit } K^{(o)} = K \text{ et si } K^{(p)} \text{ est définie on pose} \\ K^{(p+1)} = \text{sous-catégorie de } C \text{ engendrée par} \\ \bigcup_{i=1}^{n} (K^{(p)})_i \text{ ; alors } \overline{K} = \bigcup_{0}^{\infty} K^{(p)}. \end{cases}$$

Nous avons déjà rencontré deux exemples de sous-catégories K telles qu'il y ait une structure de décomposition induite (i.e. : $K = \overline{K}$), à savoir :

1°) le groupoïde des éléments inversibles C_γ d'une catégorie C munie d'une décomposition θ ; c'est une autre façon d'exprimer la propriété référencée (P8) et qui résulte de (Q),

2°) la sous-catégorie $C^{[D]}$ de C^D, lorsque cette dernière est munie de la structure $\theta^{(D)}$.

A propos du cas $n = 2$, signalons encore que $C^{\mathbf{2}}$ est naturellement munie de deux lois de composition qui en font une catégorie double ; si (C_2, C_1) est une décomposition directe de C en deux sous-catégories, la propriété (Q) indique que, pour chacune des lois de compositions de $C^{\mathbf{2}}$, il y a une structure de décomposition directe déduite de (C_2, C_1) (cf. l'existence de $\underline{h}$ et de $\underline{k}$ pour un quatuor (g,t',t,f), tels que

$$(g_1,h,t,f_1),\ (g_2,t',h,f_2),\ (g,t'_2,t_2,k),\ (k,t'_1,t_1,f)$$

soient des quatuors) ; le couple de ces deux décompositions directes constitue en fait une décomposition double de la catégorie double $C^{\mathbf{2}}$, conformément à la définition suivante :

Soit ${}^nC = (C^{\perp_1}, \ldots, C^{\perp_n})$ une catégorie n-uple (au sens d'EHRESMANN) ; si θ^i est une décomposition directe de $C^{\perp_i}$ en deux sous-catégories, on note f_2^i et f_1^i les deux composantes de f selon θ^i; donc $f = f_2^i \perp_i f_1^i$.

<u>DEFINITION</u> - On dit que $(\theta^i)_{i=1,2,\ldots,n}$ est une décomposition directe n-uple de ${}^nC$ en deux, lorsque chaque θ^i est une décomposition directe de la catégorie $C^{\perp_i}$ correspondante en deux sous-catégories, et que ces décompositions sont compatibles entre elles, dans le sens suivant :

(1) $\forall f \in {}^nC$, $\forall i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\forall k,k' \in \{1,2\}$

$$(f_k^j)_{k'}^i = (f_{k'}^i)_k^j \quad ;$$

(2) les applications $f \to f_k^i$, pour $k = 1$ ou 2 définissent des endofoncteurs de $C^{\perp_j}$, pour $j \neq i$.

Ces décompositions n-uples sont un cas particulier de décompositions directes structurées d'une catégorie structurée (au sens d'EHRESMANN).

2.3. RELATIONS ENTRE LIMITES ET DÉCOMPOSITIONS.

Ce qu'on va dire dans ce paragraphe n'a d'intérêt que pour les décompositions directes en deux sous-catégories, que nous appelons simplement décompositions.

Soit (C_2, C_1) une décomposition de C, les notations étant toujours celles de (2.1).

PROPOSITION 1 - La catégorie C_2 est stable par changement de base dans C.

▼ Soit (k,h) un produit fibré de (f,g) avec $f = f_2 \in C_2$. Puisque $g.k_2 = f.h_2.(g_1.k_2)_1$, il existe un unique μ tel que $k.\mu = k_2$ et $h.\mu = h_2.(g_1.k_2)_1$; comme

$$k(\mu.k_1) = k \text{ et } h(\mu.k_1) = h_2.(g_1.k_2)_1.k_1 = h_2.(g.k)_1$$
$$= h_2.(f.h)_1 = h_2.h_1 = h \text{ ,}$$

il s'en suit que $\mu.k_1 \in C_0$ et μ admet pour inverse à droite k_1, ce qui prouve déjà que $\mu \in C_1$; mais alors :

$$k_2.k_1.\mu = k.\mu = k_2 \quad \text{entraîne } k_1.\mu \in C_0,$$

puisque $k_1.\mu \in C_1$; donc k_1 est inversible ; on peut donc choisir un produit fibré de (f,g), soit $(k_2, h_2.(g_1.k_2)_1)$, tel que l'image réciproque de f par g soit dans C_2. ▲

On démontre de même que C_1 est stable par sommes fibrées, et plus généralement :

C_2 (resp. C_1) possède le même genre de limites projectives (resp. inductives) connexes que C et les inclusions $C_2 \to C$, $C_1 \to C$ sont compatibles avec ces limites respectives.

Ces résultats sont évidemment faux pour les produits et les sommes.

En général C_1 n'est pas stable par changement de base ; en voici un exemple avec la décomposition $(\mathbb{C}_2,\mathbb{C}_1)$ de $\mathbb{C}$ pour laquelle :

$\mathbb{C}_1$ est la catégorie des foncteurs dont le but est engendré par l'image,

$\mathbb{C}_2$ est la catégorie des injections canoniques de sous-catégories ; considérons les trois catégories particulières :

$$\mathbf{2} = \{\cdot \xrightarrow{u} \cdot\} \qquad \mathbf{2}+\mathbf{2} = \{\cdot \xrightarrow{u_1} \cdot,\ \cdot \xrightarrow{u_2} \cdot\} \qquad \mathbf{3} = \left\{\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr, "v_2"] & \\ \cdot \arrow[ur, "v_1"] \arrow[rr, "v"'] & & \cdot \end{tikzcd}\right\};$$

soient $F : \mathbf{2}+\mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{3}$ et $G : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{3}$, définis par

$$F(u_i) = v_i,\ i = 1 \text{ ou } 2, \text{ et } G(u) = v\ ;$$

il est clair que $F \in \mathbb{C}_1$ et que si (K,H) est un produit fibré de (G,F), alors $H \notin \mathbb{C}_1$; mieux : on peut choisir $H \in \mathbb{C}_2$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{2}+\mathbf{2} \arrow[d, "F"'] & \mathbf{2}_o \arrow[l, "K"'] \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \arrow[l, "G"] \end{tikzcd}$$

Notons au passage que F est justement un épimorphisme régulier, conoyau de la paire $1 \rightrightarrows \mathbf{2}+\mathbf{2}$ envoyant 1 sur $(\beta u_1,\alpha u_2)$, et que H n'est même pas un épimorphisme ($\mathbb{C}$ n'est pas régulière !).

<u>Catégories de Relations.</u>

Dans une catégorie C à limites projectives finies et munie d'une décomposition directe (C_2,C_1) telle que C_1 soit stable par changement de base, on peut développer la théorie des relations :

une relation $R : X \nrightarrow Y$ est une classe d'équivalence de "spans" sur (X,Y) pour l'équivalence ρ engendrée par $A = \{((g',f'),(g,f)) \mid \exists h \mid (g',f')h = (g,f)$ et h_2 inversible$\}$;

la composition des relations se fait par produits fibrés : soient $R : X \nrightarrow Y$ et $S : Y \nrightarrow Z$ deux relations composables ; soient $(g,f) \in R$ et $(\bar{g},\bar{f}) \in S$; soit $(h,\bar{h})$ un produit fibré de $(\bar{f},g)$; alors $(\bar{g}\bar{h},fh)$ définit une relation qui

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & {} \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "\overline{h}"] & & \\
 & {} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & {} \arrow[dl, "\overline{f}"'] \arrow[dr, "\overline{g}"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

ne dépend que de R et de S, et non des représentants qui ont servi à la définir, ou du choix des produits fibrés : c'est la relation $S \circ R$; cette loi de composition fait de l'ensemble des relations une catégorie C^r et on a un foncteur "graphe" naturel $G : C \to C^r$ qui à $f : X \to Y$ fait correspondre $(1_X, f)$ mod ρ. On montre facilement que si ce foncteur G admet un adjoint à droite P, la catégorie C^r est canoniquement isomorphe à la catégorie de Kleisli du triple induit par (P,G) dans C ;

- l'unité du triple s'interprète en un objet X comme "l'application singleton" : $X \xrightarrow[i_X]{} PX \in C$

- la counité du triple s'interprète en un objet X comme la "relation d'appartenance à X" : $PX \xrightarrow[\varepsilon_X]{} X \in C^r$

- $G(i_X) : X \longrightarrow PX \in C^r$ s'interprète comme la relation "égalité dans X"

- $P(\varepsilon_X) : P^2X \longrightarrow PX \in C$ s'interprète comme l'application "réunion".

Il revient au même de dire que G est fidèle ou que les "applications singletons" $X \xrightarrow[i_X]{} PX$ sont des monomorphismes ; dans ce cas, on dit que la décomposition (C_2, C_1) est "fonctionnelle" (intuitivement, C est bien une catégorie "d'applications" pour C^r, car un morphisme $f : X \to Y$ est caractérisé par sa source, son but et son graphe).

On montre facilement qu'une condition suffisante pour que (C_2, C_1) soit fonctionnelle est la suivante :

(K) si $f \in C_1$ (resp. C_2) a un inverse à gauche (resp. à droite), f est inversible.

Images directes et images réciproques.

Lorsque C_1 n'est pas stable par changement de base, il reste quand même la possibilité de développer une théorie "externe" des relations ; en effet, en un objet X, la catégorie C_2/X est une sous-catégorie pleine de C/X qui joue le rôle "d'ensemble ordonné des parties de X".

Supposons que C soit à produits fibrés finis, choisis de telle sorte que C_2 soit envoyée exactement dans elle-même par changements de base.

A tout $f : X \longrightarrow Y \in C$ correspond un foncteur $\vec{f} : C_2/X \longrightarrow C_2/Y$ défini par : $\vec{f}(u) = (f.u)_2$, si $u : U \longrightarrow X$ est un objet de C_2/X (la valeur de $\vec{f}$ sur les morphismes résulte alors de la propriété (Q)) ; on montre facilement, toujours en utilisant la propriété (Q) et sans avoir besoin de supposer que C_2 est formé de monos , que le foncteur $\overleftarrow{f} : C_2/Y \longrightarrow C_2/X$, défini par "le produit fibré par f" , est un adjoint à droite de $\vec{f}$.

L'application $f \longrightarrow \vec{f}$ définit un foncteur Σ_2 de C dans la sous-catégorie $\mathbb{C}_d$ de $\mathbb{C}$ des foncteurs ayant un adjoint à droite.

L'application $f \longrightarrow \Sigma_f$ (foncteur "composition par f" : $C/X \longrightarrow C/Y$) définit aussi un foncteur $\Sigma : C \longrightarrow \mathbb{C}_d$.

Enfin pour tout objet X, l'application qui à $u : U \longrightarrow X$ fait correspondre $u_2 : U_2 \longrightarrow X$ se prolonge en un foncteur $I_X : C/X \longrightarrow C_2/X$ et l'application $X \rightsquigarrow I_X$ définit une transformation naturelle $I : \Sigma \longrightarrow \Sigma_2$; pour chaque $f : X \longrightarrow Y$ on a donc les quatre paires d'adjoints suivantes :

$$\begin{tikzcd}
C/X \arrow[r, shift right, "I_X"'] \arrow[d, shift left, "\Sigma_f"] & C_2/X \arrow[l, shift right, "\iota_X"'] \arrow[d, shift right, "\vec{f}"'] \\
C/Y \arrow[u, shift left, "f^{-1}"] \arrow[r, shift left, "I_Y"] & C_2/Y \arrow[l, shift left, "\iota_Y"] \arrow[u, shift right, "\overleftarrow{f}"']
\end{tikzcd}$$

(ι_X, ι_Y = injections pleines ; f^{-1} = changement de base ; $\overleftarrow{f}$ est un sous-foncteur de f^{-1})

les carrés intérieurs et extérieurs sont commutatifs et chaque foncteur du carré intérieur est adjoint à gauche de son homologue extérieur ; de façon plus condensée, on peut dire que $(\vec{f},\overleftarrow{f})$ est une paire d'adjoints rétracte de (Σ_f, f^{-1}), cette dernière paire correspondant d'ailleurs à la décomposition triviale (C, C_0).

2.4. EXEMPLES.

Pour chaque exemple, on décrit indifféremment (a_2, a_1) ou (C_2, C_1).

- 1. Dans <u>Ens</u> la décomposition usuelle en surjection et injection canonique.

- 2. Dans $\mathbb{C}$, la décomposition déjà citée :

$\mathbb{C}_1$ = {foncteurs à but engendré par l'image}

$\mathbb{C}_2$ = {injections des sous-catégories}

- 3. Toujours dans $\mathbb{C}$, une autre décomposition :

$\mathbb{C}'_1$ = {foncteurs surjectifs sur les objets}

$\mathbb{C}'_2$ = {injections de sous-catégories pleines} ;

ici $\mathbb{C}'_1$ est stable par changement de base et une relation de C vers D s'identifie à une sous-catégorie pleine de C x D.

- 4. Si H et K sont deux catégories, K x H se décompose naturellement en $(K \times H_o, K_o \times H)$ ou en $(K_o \times H, K \times H_o)$, qui sont des produits, dans $\mathbb{C}^{[2]}$, de décompositions triviales.

- 5. La catégorie $\mathbb{C}^{[n]}$ possède une décomposition naturelle ; soit $F : (C,\theta) \longrightarrow (D,\theta')$ un morphisme ; soit $\widetilde{F(C)}$ la sous-catégorie de D, engendrée par F(C) et sur laquelle θ' induit une décomposition θ'' ; alors F se décompose en :

$$(C,\theta) \xrightarrow{F_1} (\widetilde{F(C)},\theta'') \xrightarrow{F_2} (D,\theta'), \text{ où } F_1(f) = F(f) \text{ et } F_2(g) = g \;;$$

plus généralement, si $p : K \longrightarrow$ Ens est un foncteur sous-engendrant, on en déduit une décomposition naturelle dans K ; pour $f : S \longrightarrow S'$, on prend $f_2 : \overline{S} \longrightarrow S'$ = la p-injection telle que $\overline{S}$ soit la p-sous-structure de S' engendrée par $p(f)(p(S)) \subset p(S')$. Dans cet exemple, on peut aussi remplacer Ens par une catégorie munie d'une décomposition.

- 6. Soit Top la catégorie des applications continues ; en voici deux décompositions naturelles :

$(Top)_1$ = {surjections continues}, $(Top)_2$ = {injections de ss-espaces}

$(Top)'_1$ = {applications continues à image dense dans leur but}, $(Top)'_2$ = {injections des ss-espaces fermés}

On rencontre ce genre d'exemple dans toute catégorie où l'on a une notion de "fermeture" dans la classe des sous-objets d'un objet, à condition que cette fermeture soit naturelle.

\- 7. Soit G un groupoïde ; si (G_2,G_1) est une décomposition de G, on a vu que G_1 et G_2 sont des sous-groupoïdes de G satisfaisant (a) $G_1 \cap G_2 = G_0$ et (b) $G = G_2.G_1$; réciproquement, un couple (G_2,G_1) de sous-groupoïdes de G satisfaisant (a) et (b) détermine une décomposition de G, car l'unité de décomposition est conséquence de (a) et (b) (ce n'est plus vrai pour une catégorie !).

Comme cas particuliers de (7) signalons :

- les décompositions d'un groupe abélien en "sommes directes" de deux sous-groupes.
- les décompositions d'un groupe G en "produits semi-direct" de deux de ses sous-groupes ; il s'agit alors des couples (G_2,G_1) tels que G_2 soit stable par les automorphismes intérieurs i_g, $g \in G_1$; il semble toutefois qu'on ne requiert plus cette dernière condition dans l'acceptation actuelle de l'expression "semi-direct"...
- pour un groupe G fixé, l'ensemble des couples (Y,X) de sous-groupes de G satisfaisant : "$Y \cap X = \{e\}$ et Y.X est encore un sous-groupe", est un ensemble inductif pour l'ordre défini par l'inclusion ; il existe donc des couples maximaux (Y,X) qui sont des décompositions (de Y.X) ; on peut aussi fixer l'un des deux facteurs X ou Y.
- les décompositions des groupoïdes de couples (cf. à ce sujet la fin du chapitre 1).

\- 8. Soit E un topos ; incluons dans la structure même de topos la notion de choix canonique de sous-objets (si c'est possible), dans le seul but d'écrire des égalités et non des "égalités à iso-près" ; on se donne donc pour chaque objet X une fonction $S_X : \mathrm{Hom}\,(X,\Omega) \longrightarrow E_X$, où Ω désigne l'objet classifiant les sous-objets ; les S_X satisfaisant :

1) $S_X(\varphi)$ est un mono de but X ayant φ pour fonction caractéristique.

2) les S_X sont cohérents dans le sens suivant :
si $\psi < \varphi$ dans Ω^X, alors on a :

$$S_X(\psi) = S_X(\varphi).S_{X'}(\psi.S_X(\varphi)) \quad \text{où} \quad X' = \alpha\, S_X(\varphi).$$

La décomposition canonique de E est la décomposition (E_2,E_1) "épi-mono" dans laquelle on impose au mono. d'être canonique ; pour que E_1 soit formée de tous les épis la fonction de choix S doit satisfaire en plus $S_X(V_X) = 1_X$ où $V_X : X \longrightarrow \Omega$ est la flèche "vraie" relative à X.

Pour toute topologie j de Grothendieck dans E, on a une décomposition naturelle $(E_2^{(j)},E_1^{(j)})$, déduite de (E_2,E_1) par "fermeture" ; soit $f = f_2^{(j)}.f_1^{(j)}$, où

$$f_1^{(j)} = d(f).f_1 \quad \text{et} \quad f_2^{(j)} = S(j.\varphi_{f_2}) \;;$$

$d(f)$ est l'unique mono. tel que $f_2 = f_2^{(j)}.d(f)$; $d(f)$ est dense et canonique, par suite de la cohérence des S_X. Pour voir que $(E_2^{(j)},E_1^{(j)})$ est bien une décomposition directe de E, on utilise les lemmes suivants, qui sont classiques :

<u>LEMME 1</u> - Si $d : X \longrightarrow X_1$ est un mono dense et si $q : X_1 \longrightarrow Y$ est un épi., alors $(qd)_2$ est encore un mono. dense.

<u>LEMME 2</u> - Si $m : X \longrightarrow X'$ et $m' : X' \longrightarrow X''$ sont deux monos fermés, alors $m'.m$ est encore un mono. fermé.

<u>LEMME 3</u> - (qui justifie la terminologie de fermeture) ; si $d : X \longrightarrow X_1$ est un mono. dense, si $m : X_1 \longrightarrow Y$ est un mono. fermé et si m.d est fermé, alors d est inversible.

Réciproquement, soit (E_2',E_1') une décomposition de E telle que

- E_2' soit formée de monos,
- les monos de E_1' soient stables par changement de base ; alors il

existe une topologie de Grothendieck et une seule, $j : \Omega \longrightarrow \Omega$, telle que $(E_2',E_1') = (E_2^{(j)},E_1^{(j)})$;

en effet, notons $(f_{\overline{2}},f_{\overline{1}})$ l'unique couple de $E_2' \times E_1'$ tel que $f = f_{\overline{2}}.f_{\overline{1}}$; à chaque objet X on fait correspondre l'application

$$\text{Hom}\,(X,\Omega) \xrightarrow{\tau_X} \text{Hom}\,(X,\Omega)$$
$$\tau_X(\varphi) = \overline{\varphi}$$

où φ est la fonction caractéristique de $U \rightarrowtail^{f} X$ et où $\overline{\varphi}$ est celle de $f_{\overline{2}}$; comme E_2'

est stable par changement de base, ainsi que la classe des monos de E_1', on en déduit que τ est une transformation naturelle de Hom $(-,\Omega)$ en lui même, et par le lemme de Yoneda, on en déduit un unique $j : \Omega \longrightarrow \Omega$ tel que τ = Hom $(-,j)$; on a alors, en désignant par $v : 1 \longrightarrow \Omega$ la flèche "vraie" universelle,

- $j.v = v$, car les unités 1_X sont "indécomposables",

- $j^2 = j$, car $f_{\overline{22}} = f_{\overline{2}}$, $\forall f \in E$,

- "j respecte l'ordre" dans les Ω^X (i.e. : $\varphi < \psi \Rightarrow j\varphi < j\psi$) : c'est une conséquence de la propriété (Q) des décompositions ; ceci prouve que j est bien une topologie de Grothendieck dans E.

La décomposition canonique (E_2,E_1) correspond à la topologie grossière et la décomposition (E_0,E) correspond à la topologie discrète.

Une relation de X vers Y, relative à $(E_2^{(j)},E_1^{(j)})$ n'est autre qu'un sous-objet fermé de X x Y ; notons que si E_j désigne la sous-catégorie réflexive et exacte à gauche correspondant à j, c'est encore un topos et sa décomposition canonique (E_{j_2},E_{j_1}) n'est autre que la décomposition induite par $(E_2^{(j)},E_1^{(j)})$ sur E_j.

- 9. Soit $\pi : B \longrightarrow \mathbb{C}$ un foncteur et $p : E_\pi \longrightarrow B$ la fibration associée ; soit H_π la sous-catégorie "horizontale" de E_π formée des $(z,f,s) \in E_\pi$ tels que $z = fs$ (i.e. : $\pi(f)(s) = z$ est unité) et soit V_π la sous-catégorie "verticale" de E_π formée des (z,f,s) tels que $f \in B_0$; tout morphisme (z,f,s) de E_π se décompose de façon unique sous la forme

$$(z,f,s) = (z,\beta(f),fs)(fs,f,s)$$

de sorte que (V_π,H_π) est une décomposition directe de E_π en deux facteurs ; soit $\theta_V : E_\pi^2 \longrightarrow E_\pi$ la $\mathbb{E}_2$-algèbre correspondante et à laquelle on l'identifie.

PROPOSITION - A toute décomposition θ de B correspond une unique décomposition θ_π de E_π, dite "relevée de θ", satisfaisant :

(1) $p : (E_\pi,\theta_\pi) \longrightarrow (B,\theta) \in \mathbb{C}^{[2]}$

(2) si $p : (E_\pi,\theta') \longrightarrow (B,\theta) \in \mathbb{C}^{[2]}$, il existe une seule transformation naturelle $t : \theta_\pi \longrightarrow \theta'$ (elle est à valeurs verticales).

▼ Description de θ_π : les composantes de (z,f,s) sont :

$$a_1(z,f,s) = (f_1s, f_1, s)$$
$$a_2(z,f,s) = (z, f_2, f_1s) \ ;$$

(a_2,a_1) définit clairement une décomposition θ_π de E_π ; soit alors θ' une décomposition de E_π telle que $p : (E_\pi,\theta') \longrightarrow (B,\theta)$ soit un morphisme de $\mathbb{C}^{[2]}$; soit (a_2',a_1') le couple d'applications de E_π dans E_π correspondant ; on a :

$$a_1'(z,f,s) = (u, f_1, s)$$
$$a_2'(z,f,s) = (v, f_2, s') \text{ où } s' = \beta(u) \text{ et } v.f_2u = z \ ;$$

si $t : \theta_\pi \longrightarrow \theta'$ est une transformation naturelle définie par $t(z,f,s) = (\xi, g, f_1s)$, on doit avoir :

$$(\xi,g,f_1s)(f_1s,f_1,s) = (u,f_1,s)$$

et $$(v,f_2,s')(\xi,g,f_1s) = (z,f_2,f_1s),$$

d'où $g.f_1 = f_1$, $\xi = u$ et $f_2g = f_2$, et donc $g = \beta(f_1) \in B_o$; donc t existe bien, est à valeurs verticales, est unique et donnée par :

$$t(z,f,s) = (u, \beta(f_1), f_1s) \qquad \blacktriangle$$

<u>Remarques</u> :

1) La décomposition θ_V de E_π n'est autre que la "relevée de (B_o,B)" ; quant à (B,B_o), elle se relève encore en la décomposition triviale (E_π,E_{π_o}) ; ainsi les décompositions de la base se relèvent "entre" les deux décompositions extrêmes (E_π,E_{π_o}) et (V_π,H_π) ; on notera l'analogie formelle avec les topologies d'un topos (cf. l'exemple (8)).

2) Les fibrations discrètes sont caractérisées par le fait que (B_o,B) se relève encore en la décomposition triviale analogue (E_{π_o},E_π).

(3) A une décomposition θ de B correspond le foncteur $\Sigma_2 : B \longrightarrow \mathbb{C}$ (cf. le §2.3), d'où une fibration $p_2 : E^{(2)} \longrightarrow \mathbb{C}$; de même, à $\Sigma : B \longrightarrow \mathbb{C}$ correspond une fibration $p : E \longrightarrow \mathbb{C}$; on voit que E est canoniquement isomorphe à B^2, et le relèvement de θ dans B^2 fournit la décomposition suivante :

$$(g,t',t,f)_1 = (t'_1.f, t'_1, \alpha(f), f) \quad \text{et} \quad (g,t',t,f)_2 = (g, t'_2, t, t'_1.f) \ ;$$

quant à $E^{(2)}$, elle est canoniquement isomorphe à la sous-catégorie pleine de B^2 formée des (g,t',t,f) tels que f et $g \in B_2$; la décomposition relevée de θ est celle donnée par la propriété (Q) ; de ce point de vue, il y a vraisemblablement une interprétation universelle des décompositions liée à la notion de fibration, mais nous n'avons pas réussi à éclaircir ce point.

CHAPITRE 3

ETUDE GÉNÉRALE DES PRÉCATÉGORIES

3.0. INTRODUCTION DES CHAPITRES 3, 4 ET 5.

Les seules décompositions directes de $\mathbb{N}$ (additif) en "sous-catégories" sont triviales ; elles ne rendent pas compte de la simple division euclidienne ; or celle-ci s'exprime simplement : étant donné un entier $b \neq 0$, posons $A = b\,\mathbb{N}$ et $B = \{0,1,2,\ldots,b-1\}$; alors tout entier n s'écrit de façon unique $n_A + n_B$ avec $n_A \in A$ et $n_B \in B$; ici A est bien une "sous-catégorie" de $\mathbb{N}$, mais pas B.

En fait, nous avons déterminé (cf. Ch. 5) toutes les décompositions directes ensemblistes de $\mathbb{N}$ (en un nombre fini ou non de facteurs) et nous avons prouvé que les facteurs directs étaient toujours ce que nous appellerons des <u>précatégories</u> ; la méthode qui nous a conduit à ce résultat est applicable plus généralement aux "précatégories bien ordonnées", dont $(\mathbb{N},+,<)$ est un exemple assez simple.

Ceci nous a conduit à étudier plus systématiquement les précatégories et leurs décompositions directes ; dans les textes originaux (cf.[6],[7] et [8]) les résultats particuliers sont mêlés aux résultats généraux, le cas des entiers servant de "moteur" ; par souci de clarté, nous avons préféré ici classer les résultats en chapîtres bien séparés, qui offrent chacun un intérêt particulier.

Concernant les entiers, la description des décompositions directes de $\mathbb{N}$ et celle des décompositions directes en deux facteurs de $\mathbb{N}^2$ ont été obtenues respectivement par N.G. DE BRUIJN [3] et par I. NIVEN [20] avec des méthodes qui nous paraissent assez différentes de la nôtre ; celle-ci peut se résumer en quelques mots : il s'agit d'effectuer une bonne lecture transfinie de $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$ ou de toute autre "précatégorie bien ordonnée" et d'y repérer les "places libres", où l'on peut, indépendamment de ce qui précède, choisir le facteur de décomposition auquel elle appartiendra ; lorsque ce choix est effectué, un certain nombre de "places" vont être occupées, en fonction des choix antérieurs, et on recherche alors une "première place libre" dans l'ensemble restant, s'il n'est pas vide ! Dans le cas d'un produit de précatégories bien ordonnées, une lecture "lexicographique" est bien adaptée au problème, si l'on connait déjà les possibilités de décompositions des facteurs du produit, et dans cette voie, nous avons un résultat tout à fait général indiquant une condition suffisante pour qu'une décomposition directe d'un produit soit obligatoirement un produit de décompositions directes des facteurs.

Soulignons enfin qu'à propos des entiers, nous avons obtenu un certain nombre de précisions qui ne figurent ni dans [3] ni dans [20].

Le chapître 3 est une étude générale des précatégories et des précatégories bien ordonnées.

Le chapître 4 regroupe les résultats généraux concernant les décompositions des précatégories ; en ce sens, il est une suite naturelle du chapître 2.

Enfin, au chapître 5 sont présentés les résultats particuliers relatifs aux entiers.

3.1. SITUATION DES PRÉCATÉGORIES ENTRE LES GRAPHES ET LES CATÉGORIES.

Il sera pratique d'adopter dans la suite les conventions suivantes :

(1) si $(x_n,\ldots,x_1)$ est un n-uple composable selon une disposition cohérente de parenthèses d, on désigne le composé correspondant par $d(x_n,\ldots,x_1)$;

(2) l'écriture "$\exists<A,B,\ldots>$" signifie que les expressions A,B,... telles qu'elles sont écrites sont bien définies ; par exemple, $\exists<(xy)z>$ signifie que le composé $(xy)z$ est défini ; l'écriture "$\exists<A = B>$" est un abrégé de "$\exists<A,B>$ et $A = B$" ; par exemple $\exists<x(yz) = (xy)z>$ qu'on peut encore abréger en $\exists<xyz>$;

(3) comme pour les catégories, l'ensemble des unités d'un système multiplicatif S est noté S_o et l'ensemble des couples composables de S est noté $S*S$;

(4) par <u>foncteur</u> $F : S \longrightarrow S'$ entre deux systèmes multiplicatifs, on entend une application satisfaisant :

$$F(S_o) \subset S'_o, \text{ et } \forall (y,x) \in S*S,\ \exists<F(y).F(x) = F(yx)> .$$

On peut alors nommer diverses sous-catégories pleines de la catégorie $\mathbb{S}$ des foncteurs entre systèmes multiplicatifs par le nom de leurs objets ; nous aurons à considérer :

- la catégorie $\mathbb{G}$ des graphes orientés ;

  un graphe orienté G est un objet de $\mathbb{S}$ vérifiant : tout $x \in G$ a une unité à gauche $\beta(x)$ et une unité à droite $\alpha(x)$ et $G{\star}G = \{(y,x) \in G \times G \mid y = \beta(x) \text{ ou } x = \alpha(y)\}$.

- la catégorie $\mathbb{G}_M$ des graphes multiplicatifs ;

  un graphe multiplicatif G est un objet de $\mathbb{S}$ vérifiant : tout $x \in G$ a une unité à gauche $\beta(x)$ et une unité à droite $\alpha(x)$, et si $(y,x) \in G{\star}G$, on doit avoir

  $\beta(yx) = \beta(y)$, $\alpha(yx) = \alpha(x)$ et $\alpha(y) = \beta(x)$;

- la catégorie $\mathbb{G}_A$ des graphes associatifs ;

  un graphe associatif G est un graphe multiplicatif satisfaisant l'axiome d'associativité (faible) suivant :

  $$[A]\ \exists < d(x_n,\dots,x_1), d'(x_n,\dots,x_1) > \Longrightarrow d(x_n,\dots,x_1) = d'(x_n,\dots,x_1) \ ;$$

- la catégorie $\mathbb{G}_{FA}$ des précatégories :

  une précatégorie est un graphe multiplicatif satisfaisant l'axiome d'associativité (fort) suivant :

  $$[FA]\ \exists < x(yz) > \quad \text{ou} \quad \exists < (xy)z > \Longrightarrow \forall d' \ \exists < d(x_n,\dots,x_1) = d'(x_n,\dots,x_1) >,$$

  ce qui justifie la suppression des parenthèses dans une précatégorie, et montre aussi qu'une précatégorie est un graphe associatif.

- la catégorie $\mathbb{C}$ des catégories ;

  une catégorie C est une précatégorie satisfaisant :

  $$\alpha(y) = \beta(x) \Longrightarrow (y,x) \in C{\star}C \ .$$

  Le symbole "$\mathcal{X} \rightarrowtail \mathcal{Y}$" signifiant que $\mathcal{X}$ est sous-catégorie pleine de $\mathcal{Y}$, nous avons le schéma suivant entre les diverses catégories introduites :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[dd, dashed] \arrow[dr] & & & & \\
& \mathbb{G}_{FA} \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & \mathbb{G}_A \arrow[r] \arrow[dll, dashed] & \mathbb{G}_M \arrow[r] \arrow[dlll, dashed] & \mathbb{S} \\
\mathbb{G} \arrow[uu, bend left, "L"] \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

à tout graphe multiplicatif G correspond un graphe orienté sous-jacent $\underline{G}$ obtenu en otant de $G*G$ les couples (y,x) qui ne sont pas de la forme $(y,\alpha(y))$ ou $(\beta(x),x)$; ceci définit un foncteur d'oubli de $\mathbb{G}_M$ et de ses sous-catégories vers $\mathbb{G}$ (en pointillés sur la figure) ; les inclusions pleines $\mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}_{FA}$, $\mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}_A$ et $\mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}_M$ sont des adjoints à gauche des oublis correspondants ; l'oubli $\mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{G}$ a aussi un adjoint à gauche L : si G est un objet de $\mathbb{G}$, $L(G)$ est la catégorie libre des chemins de G (cf.[10]).

<u>Projection des précatégories dans les catégories</u>.

La catégorie $\mathbb{G}_M$ est à $\mathbb{C}$-projections (dans le langage d'EHRESMANN, celà veut dire que $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{G}_M$ a un adjoint à gauche) ; si G est un objet de $\mathbb{G}_M$, une $\mathbb{C}$-projection de G est donnée par le quotient $N(G) = L(\underline{G})/\rho$ où ρ est l'équivalence bicompatible engendrée par la relation qui identifie $(x'.x)$ et (x',x) ; le projecteur $\nu_G : G \longrightarrow N(G)$ est composé de l'injection naturelle $G \longrightarrow L(\underline{G})$ et de la surjection canonique $L(\underline{G}) \longrightarrow N(G)$; bien sûr, $\mathbb{G}_A$ et $\mathbb{G}_{FA}$ sont aussi à $\mathbb{C}$-projections ; mais voici une importante précision concernant les précatégories, et qui est à l'origine du choix de ce mot :

<u>PROPOSITION 1</u> - Si G est une précatégorie, $\nu_G : G \longrightarrow N(G)$ est injectif et $N(G)$ est isomorphe à un quotient d'une catégorie non associative $\tilde{G}$ ayant pour graphe sous-jacent un sous-graphe de $\underline{L(\underline{G})}$.

▼ Soit en effet $\tilde{G}$ l'ensemble des chemins $s = (x_n,\ldots,x_1)$ de $\underline{G}$ tels que $(x_{i+1},x_i) \notin G*G$, pour $i = 1,2,\ldots,n-1$; $n = l(s)$ est la longueur du chemin s.

Dans $\tilde{G}$, on définit la loi de composition suivante :

$s = (x_n,\ldots,x_1)$ et $s' = (y_p,\ldots,y_1)$ sont composables si et seulement

si $\alpha(y_1) = \beta(x_n)$ et dans ce cas, on pose :

$$s's = \begin{cases} (y_p, \ldots, y_1, x_n, \ldots, x_1) & \text{si} \quad (y_1, x_n) \notin G{*}G \\ (y_p, \ldots, y_2, y_1 . x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) & \text{si} \quad (y_1, x_n) \in G{*}G \; ; \end{cases}$$

on vérifie facilement que $s's \in \tilde{G}$; on peut identifier G au sous-ensemble de $\tilde{G}$ formé des s tels que $l(s) = 1$, muni de la loi induite par celle de $\tilde{G}$, car on a :

$$\exists \langle yx \rangle \implies \alpha(y) = \beta(x) \implies \exists \langle (y)(x) = (yx) \rangle \; ;$$

$\tilde{G}$ est une catégorie "non associative" (par exemple : si zy et yx sont définis, mais par zyx, on a dans $\tilde{G}$:

$$z(yx) = (z, yx) \quad \text{tandis que} \quad (zy)x = (zy, x)) \quad ; \text{la longueur satisfait}$$

l'inégalité $l(s's) \geq l(s') + l(s) - 1$; considérons la relation élémentaire suivante, dans $\tilde{G}$:

$$A = \{((s''s')s, s''(s's)) \mid \exists \langle (s''s')s, s''(s's) \rangle\} \; ;$$

avec un argument de longueur, on prouve que si $(\sigma, \sigma') \in A$ avec $\sigma \neq \sigma'$, alors σ et $\sigma' \notin G$; la même remarque vaut pour l'équivalence $\overline{A}$ engendrée par A ; soit A_1 la relation compatible engendrée par $\overline{A}$:

$$A_1 = \{(\sigma_1\sigma_2, \sigma_1'\sigma_2') \mid (\sigma_1, \sigma_1') \in \overline{A} \quad \text{et} \quad (\sigma_2, \sigma_2') \in \overline{A}\} \; ;$$

par un argument de longueur, on prouve encore que si $(\sigma, \sigma') \in A_1$ avec $\sigma \neq \sigma'$, alors σ et $\sigma' \notin G$;
par récurrence on définit A_n à partir de $\overline{A}_{n-1}$, comme A_1 à partir de $\overline{A}$, et $\overline{A}_n$ à partir de A_n, comme $\overline{A}$ à partir de A ; alors $R = \bigcup_n A_n = \bigcup_n \overline{A}_n$ est l'équivalence bicompatible engendrée par A dans $\tilde{G}$; on montre par récurrence que R n'identifie pas les éléments de G ; autrement dit le composé $\nu_G : G \hookrightarrow \tilde{G} \longrightarrow \tilde{G}/R$ est injectif ; il est clair que $\tilde{G}/R$ est une catégorie pour la loi quotient de celle de $\tilde{G}$; montrons que ν_G définit bien une $\mathbb{C}$-projection de G ; soit donc $F : G \longrightarrow K$ un foncteur vers une catégorie K ; soit $\overline{F} : \tilde{G} \longrightarrow K$ définie par :

$$\overline{F}((x_n, \ldots, x_1)) = F(x_n) \ldots F(x_1) \; ;$$

$\overline{F}$ est un foncteur compatible avec R et définit par passage au quotient un foncteur $\tilde{F} : \tilde{G}/R \longrightarrow K$ satisfaisant $\tilde{F}.\nu_G = F$; l'unicité de $\tilde{F}$ résulte du fait que ν_G est aussi un épimorphisme. ▲

Une autre démonstration consiste à utiliser la proposition 8 de [11], mais cela ne donne pas une description aussi explicite de N(G).

Sous-précatégories. Précatégories quotients.

Les notions de sous-structure et de structure-quotient sont ici relatives au foncteur d'oubli vers Ens qui oublie la seule loi de composition définissant les objets de **S**.

PROPOSITION 2 - Soit G une précatégorie et soit $X \subset G$; il existe une plus petite sous-précatégorie de G contenant X, notée $\overline{X}$; elle est engendrée dénombrablement par X.

▼ Quitte à ajouter $\alpha(X) \cup \beta(X)$, on peut déjà supposer que X définit un sous-graphe multiplicatif de G ; la loi de composition induite dans X par celle de G, notée $\underset{X}{.}$, est ainsi définie : $\exists\langle y \underset{X}{.} x\rangle \Longleftrightarrow \exists\langle y.x\rangle$ et $y.x \in X$; posons alors

$$X_1 = \{t \in G \,|\, \exists x,y,z \in X \,|\, \exists\langle x \underset{X}{.} (y \underset{X}{.} z)\rangle \text{ et } t = x.y, \text{ ou bien } \exists\langle (x \underset{X}{.} y) \underset{X}{.} z\rangle \text{ et } t = y.z\} \;;$$

définissant X_n (par récurrence) à partir de X_{n-1}, comme X_1 à partir de X, on voit que $\overline{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. ▲

Remarques :

(1) Posons $n_X = \inf \{n \in \mathbb{N} \mid X_n = \overline{X}\}$ et, si $X_n \neq \overline{X}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $n_X = \infty$; même si G a de bonnes propriétés (engendré par un seul élément, commutatif, simplifiable etc...), il se peut que $n_X = \infty$; en voici un exemple avec $G = \mathbb{N}$; soit $A \subset \mathbb{N}$ un ensemble fini tel que $n_A \geq 1$ (par ex. : $A = \{0,1,2,3,5\}$ où $n_A = 1$) et posons :

$$A^{(1)} = A \cup \{\lambda,\mu\}, \text{ où } \lambda = 2 \sup (A) + 1$$
$$\mu = \lambda + \sup (A_{n_A} - A_{n_A-1}) \ ;$$

on prouve facilement que $n_{A^{(1)}} > n_A$; en construisant $A^{(n)}$ à partir de $A^{(n-1)}$, comme $A^{(1)}$ à partir de A, on trouve que $B = \bigcup\limits_0^\infty A^{(n)}$ satisfait $n_B = \infty$; dans l'exemple cité, on voit que :

$$A^{(1)} = \{0,1,2,3,5,11,15\},\ n_{A^{(1)}} = 2,\ \overset{(1)}{A}{}_2 = \overline{A^{(1)}} = \{0,1,2,3,4,5,11,12,13,14,15\}.$$

(2) Comme autre exemple, prenons A = P = l'ensemble des nombres premiers ; alors $\overline{P} = \mathbb{N}$ (résulte aussitôt de ce que $p_{n+1} < 2p_n$, en désignant par p_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier) ; mais il y a mieux ; on peut prouver que $P_3 = \mathbb{N}$, tandis que $\mathbb{N} - P_2$ est infini (on trouve $\inf(\mathbb{N}-P_2) = 93$).

(3) Soit G une précatégorie, $X \subset G$ et $\overline{X}$ la sous-précatégorie de G engendrée par X ; si $F,F' : \overline{X} \rightrightarrows K$ sont deux foncteurs vers une précatégorie K, coïncidant sur X, alors $F = F'$.

(4) Soit G un graphe multiplicatif ; on a déjà remarqué que toute partie X satisfaisant $X \supset \alpha(X) \cup \beta(X)$ définit un sous-graphe multiplicatif de G pour la loi induite $\underset{X}{\cdot}$; on dit que X est stable dans G si [$y,x \in X$ et $(y,x) \in G{*}G$] entraîne $y.x \in X$; un sous-graphe multiplicatif stable d'une précatégorie est encore une précatégorie, mais ce peut être une sous-précatégorie sans être stable pour autant ; on doit donc bien distinguer entre les "sous-précatégories" et les "sous-précatégories stables" (c'est-à-l'origine de toutes les complications concernant les décompositions directes des précatégories) ; évidemment cette distinction est sans objet pour les catégories.

La question des précatégories quotients (quasi-quotients dans la terminologie d'EHRESMANN) sera réglée lorsqu'on aura indiqué comment un graphe multiplicatif se plonge universellement dans une précatégorie : il suffira d'effectuer le quotient dans $\mathbf{G}_M$, puis de projeter dans $\mathbf{G}_{FA}$.

<u>PROPOSITION 3</u> - La catégorie $\mathbf{G}_M$ est à $\mathbf{G}_{FA}$-projections ; si G est un graphe multiplicatif, une $\mathbf{G}_{FA}$-projection de G est donnée par la sous-précatégorie $\hat{G}$ de N(G) engendrée par $\nu_G(G)$.

▼ On remarque d'abord que la restriction $\nu'_G : G \longrightarrow \hat{G}$ de ν_G est bien un foncteur ; soit alors $F : G \longrightarrow H$ un foncteur de but une précatégorie H ; par propriété universelle, il existe un unique foncteur $\overline{F} : N(G) \longrightarrow N(H)$ tel que $\overline{F}.\nu_G = \nu_H.F$; ceci prouve que $\overline{F}(\nu_G(G)) \subset H$, en identifiant H à une sous-précatégorie de $N(H)$, grâce à la proposition 1 ; en utilisant la proposition 2, on voit que $\overline{F}(\hat{G}) = \overline{F}(\overline{\nu_G(G)}) \subset H$, de sorte que $\overline{F}$ admet une restriction $\hat{F} : \hat{G} \longrightarrow H$ satisfaisant $\hat{F}.\nu'_G = F$ et l'unicité d'un tel F résulte de la remarque (3) précédente. ▲

Remarques :

(5) Nous ne croyons pas que le résultat précédent s'étende aux graphes associatifs ; pour la loi induite, $\nu_G(G)$ est bien un graphe associatif, mais si H est un graphe associatif,son projecteur $\nu_H : H \longrightarrow N(H)$ n'est plus injectif a priori.

(6) Par composition des projections, on voit que $\nu_{\hat{G}} \circ \nu'_G : G \longrightarrow N(\hat{G})$ est un projecteur (de $\mathbb{G}_M$ dans $\mathbb{C}$), et par conséquent $N(\hat{G})$ est isomorphe à $N(G)$, de sorte qu'on peut choisir pour $\nu_{\hat{G}}$ l'inclusion $\hat{G} \hookrightarrow N(G)$.

3.2. TRANSFORMATIONS NATURELLES.

Soient $F,G : C \rightrightarrows D \in \mathbb{G}_{FA}$; une transformation naturelle (en abrégé t.n.) de F vers G, soit t, est la donnée d'une application $t : C_o \longrightarrow D$ satisfaisant :

$$\forall f \in C \text{ avec } \alpha(f) = e,\ \beta(f) = e',\ \exists\langle G(f).t(e) = t(e').F(f)\rangle \quad ;$$

symboliquement, on écrit $t : F \longrightarrow G$, ou bien $t : C \underset{G}{\overset{F}{\Downarrow}} D$ si on veut faire voir les précatégories source et but de F et G.

Les t.n. entre foncteurs de C vers D se composent (composition latérale des t.n.) de la façon suivante :

$t : F \longrightarrow G$ et $u : G' \longrightarrow H$ sont composables si et seulement si

i) $G' = G$

ii) $\forall e \in C_0$, $\exists\langle u(e).t(e)\rangle$

iii) $u.t : C_0 \longrightarrow D$ définie par $(u.t)(e) = u(e).t(e)$ est une t.n. de F vers H ;

dans ce cas la composée de t et de u est u.t ; les conditions ii) et iii) sont aussi équivalentes à l'unique condition :

$\forall f : e \longrightarrow e' \in C$, $\exists\langle u(e').t(e').F(f)\rangle$ <u>ou</u> $\exists\langle u(e').G(f).t(e)\rangle$ <u>ou</u> $\exists\langle H(f).u(e).t(e)\rangle$.

<u>PROPOSITION 1</u> - Munie de la composition latérale, l'ensemble D^C des t.n. entre foncteurs de C vers D est une précatégorie.

▼ C'est une simple vérification.▲ Notons bien que D^C n'est pas une catégorie en général ; c'en est une cependant si D elle-même est une catégorie, mais ce n'est pas une condition nécessaire.

<u>PROPOSITION 2</u> - La catégorie $\mathbb{G}_{FA}$ est cartésienne fermée.

▼Soit $F : X \longrightarrow Y \in \mathbb{G}_{FA}$ et soit C une précatégorie ; soit $t \in X^C$; l'application $F \circ t : C_0 \longrightarrow Y$ définie par $(F \circ t)(e) = F(t(e))$ définit une t.n. $F \circ G \longrightarrow F \circ H$, où $t : G \longrightarrow H$, car F est un foncteur ; pour la même raison, l'application $X^C \longrightarrow Y^C$, définie par $t \rightsquigarrow F \circ t$, détermine en fait un foncteur, de sorte que $(\ )^C$ est un endofoncteur de $\mathbb{G}_{FA}$; il y a aussi l'endofoncteur "produit par C", soit $(\ ) \times C$ qui est bien un adjoint à gauche de $(\ )^C$; ceci se montre comme dans le cas des catégories, en prenant soin à chaque étape de vérifier que les conditions d'existence des composés qui interviennent sont bien satisfaites. ▲

On peut montrer qu'il existe dans $\mathbb{G}_{FA}$ quatre autres structures monoïdales bifermées dont 2 sont symétriques (cf. LAIR et FOLTZ [14]).

A côté de la composition latérale des t.n., il y a la composition longitudinale qu'on va noter par un "$\circ$" puisqu'elle prolonge la composition des foncteurs ;

soient $t : C \underset{G}{\overset{F}{\Downarrow}} D$ et $t' : D \underset{G'}{\overset{F'}{\Downarrow}} E$ deux t.n. ; soit $f : e \longrightarrow e' \in C$; du fait que $t \in D^C$ et que $t' \in E^D$, il vient :

$$\exists\langle t(e').F(f) = G(f).t(e) = d\rangle$$

et $$\exists\langle t'(\beta(d)).F'(d) = G'(d).t'(\alpha(d))\rangle \quad ;$$

alors, on a aussi : $\exists\langle t'(G(e')).F(t(e')).F'\circ F(f)$

$$= G'\circ G(f).t'(G(e)).F'(t(e))\rangle$$

et $\exists\langle G'(t(e')).t'(F(e')).F'\circ F(f)$

$$= G'\circ G(f).G'(t(e)).t'(F(e))\rangle,$$

de sorte que l'application $t'\circ t : C_o \longrightarrow E$ définie par

$$t'\circ t(e) = t'(G(e)).F'(t(e)) = G'(t(e)).t'(F(e))$$

est une t.n. $F'\circ F \longrightarrow G'\circ G$, dite composée longitudinale de t et de t' ; pour cette loi, la classe $\mathfrak{N}_{FA}$ des t.n. entre foncteurs ($\in \mathbb{C}_{FA}$) est une catégorie ; la loi latérale ne fait de $\mathfrak{N}_{FA}$ qu'une précatégorie ; on peut dire que $\mathfrak{N}_{FA}$ est une catégorie enrichie par $\mathbb{C}_{FA}$, ou ce qui revient au même que c'est une 2-précatégorie d'un type particulier ; on définit les précatégories doubles (ou n-uples) ou les 2-précatégories (ou n-précatégories) de façon tout à fait semblable au cas des catégories, à la lumière de ce qui vient d'être dit.

La plupart des résultats généraux concernant $\mathbb{C}$ et la 2-catégorie $\mathfrak{N}$ des t.n. entre foncteurs ($\in \mathbb{C}$) ont leurs "pendants" au niveau des précatégories. Par exemple, $\mathfrak{N}_{FA}$ est une 2-précatégorie représentable : une t.n. $t : C \underset{G}{\overset{F}{\Downarrow}} D$ se représente par un foncteur $\tilde{t} : C \longrightarrow D^{\mathbf{2}}$ où $D^{\mathbf{2}}$ est la précatégorie des quatuors de D (c'est même une précatégorie double). On peut aussi développer une théorie des limites dans les précatégories, mais nous n'aurons pas besoin de celà par la suite ; signalons toutefois que la question des extensions de Kan est nettement plus compliquée que dans le cas des catégories.

3.3. CATÉGORIES DES FRACTIONS D'UNE PRÉCATÉGORIE.

Soit G une précatégorie ; soient $x,y,z \in G$ tels que $\exists\langle z=y.x\rangle$; dans ce cas, on dira que :

(z,y,x) est une fraction à gauche et y diviseur à gauche de z,

et (y,x,z) est une fraction à droite et x diviseur à droite de z ;

l'ensemble $D_g(G)$ des fractions à gauche de G devient une catégorie quand on le munit de la loi de composition :

$$(z',y',x')(z,y,x) = (z',y'.y,x) \text{ si et seulement si } x' = z \text{ ;}$$

de même l'ensemble $D_d(G)$ des fractions à droite de G devient une catégorie lorsqu'on le munit de la loi de composition :

$$(y',x',z')(y,x,z) = (y',x'.x,z) \text{ si et seulement si } y = z' \text{ ;}$$

l'axiome fort d'associativité [FA] est la véritable raison qui fait de $D_g(G)$ et $D_d(G)$ des catégories et pas seulement des précatégories.

On peut assembler les deux notions de fraction à gauche et fraction à droite en une seule : soit $D_t(G)$ l'ensemble des quadruplets (z',y,x,z) tels que $\exists\langle y.z'.x = z\rangle$, appelés fractions ; on dira que z' est un diviseur de z ; on munit $D_t(G)$ d'une structure de catégorie en y définissant la loi de composition suivante :

$$(z'',y',x',z_1')(z',y,x,z) = (z'',y.y',x'.x,z) \text{ si et seulement si } z' = z_1'.$$

D_g, D_d et D_t se prolongent naturellement en des foncteurs de $\mathbb{G}_{FA}$ vers $\mathbb{C}$ (mais pas en des 2-foncteurs de $\mathfrak{n}_{FA}$ vers $\mathfrak{n}$). Nous désignerons leurs restrictions à $\mathbb{C}$ respectivement par D_g', D_d', D_t'.

Remarques :

(1) En termes de "classe d'objets et de classe de flèches", on peut dire que la localisation dans une précatégorie conduit aux catégories, mais ce n'est pas une opération fonctorielle ; soit en effet $f : X \longrightarrow Y \in C$; alors C_X et C_Y

sont des catégories, mais la composition par f, soit $\Sigma_f : C_X \longrightarrow C_Y$, ne définit pas un foncteur ; soit $C_{X,f}$ la sous-catégorie pleine de C_X dont les objets sont les $u : U \longrightarrow X \in C$ satisfaisant $\exists\langle f.u\rangle$; alors Σ_f définit un foncteur de $C_{X,f}$ vers C_Y ; la catégorie $C_{X,f}$ est β-saturée dans C_X, i.e. toute flèche dans C_X de source dans $C_{X,f}$ est dans $C_{X,f}$; remarquons aussi que si g.f est défini dans C, alors $C_{X,g.f}$ est une sous-catégorie de $C_{X,f}$, en général distincte.

(2) L'écriture des fractions à gauche et à droite sous forme de triplets fait apparaître clairement G comme classe d'objets des catégories $D_d(G)$, $D_g(G)$; en fait, ces fractions sont bien déterminées par les couples composables de G, ce qui montre que $G\star G$ porte deux structures naturelles de catégories.

(3) Dans la précatégorie des quatuors de G, soit $G^{\mathbf{2}}$, on peut distinguer, comme pour les catégories de quatuors, les deux sous-précatégories suivantes :

$$T_2 = \{(g,t',t,f) \in G^{\mathbf{2}} \mid t' \in G_o\}$$

$$T_1 = \{(g,t',t,f) \in G^{\mathbf{2}} \mid t \in G_o\} \quad ;$$

ce sont en fait des catégories respectivement isomorphes à $D_d(G)$ et $D_g(G)$; on verra que (T_2,T_1) est encore la structure de décomposition directe libre (en deux sous-précatégories stables) engendrée par G (cf. le chapître 4) ; mais si on supprime le mot "stable", ce n'est plus la structure libre !

Adjonctions.

PROPOSITION 1 - D_g et D_d ont des adjoints à gauche.

▼ Montrons ceci pour D_g ; soit C une catégorie connexe et C^+ la catégorie obtenue en ajoutant à C un objet initial u (l'unique flèche de u vers $e \in C_o$ est notée π_e) ; soit $\varepsilon_C : C \longrightarrow D_g(C^+)$ définie par $\varepsilon_C(f) = (\pi_{\beta(f)}, f, \pi_{\alpha(f)})$; montrons que C^+ est une D_g-structure libre engendrée par C, avec ε_C pour injection correspondante ; en effet, si $\phi : C \longrightarrow D_g(G)$ est un foncteur, il existe un unique $\overline{\phi} : C^+ \longrightarrow G$ tel que $D_g(\overline{\phi}) \circ \varepsilon_C = \phi$; posant $\phi(f) = (\varphi_{e'}, \widehat{\varphi}_f, \varphi_e) \in D_g(G)$, on trouve que $\overline{\phi}$ est donné par :

$\overline{\Phi}(u) = \alpha(\varphi_e)$ (indépendant de e car C est connexe)

$\overline{\Phi}(\pi_e) = \varphi_e$, pour $e \in C_o$

$\overline{\Phi}(f) = \hat{\varphi}_f$, pour $f \in C$;

si C est non connexe, on l'écrit comme somme de ses composantes connexes C_λ et une D_g-structure libre engendrée par C n'est autre que la somme des C_λ^+.

Pour les D_d-structures libres, on remplace "objet initial" par "objet final", dans ce qui précède. ▲

Les foncteurs D_g, D_d sont injectifs, mais non pleins ; ils permettent d'"identifier" $\mathbb{G}_{FA}$ de deux manières différentes à une sous-catégorie de $\mathbb{C}$, stable par limites projectives et aussi par sommes.

Les restrictions D_g' et D_d' ont encore pour adjoints à gauche les restrictions des adjoints à gauche de D_g et D_d. Ce phénomène cesse d'être vrai pour D_t.

PROPOSITION 2 - D_t' a un adjoint à gauche (qui ne peut certainement pas être la restriction d'un adjoint à gauche de D_t).

▼ Soit C une catégorie et S l'ensemble des spans de C^*, i.e. les couples (g,f) tels que $\beta(g) = \beta(f)$; C opère sur S : $\lambda(g,f) = (\lambda.g,\lambda.f)$ lorsque $\alpha(\lambda) = \beta(g) = \beta(f)$; soit ρ l'équivalence engendrée dans S par l'ensemble des couples $((g,f),(g_1,f_1))$ tels qu'il existe $(\lambda,\mu) \in S$ satisfaisant $\lambda(g,f) = \mu(g_1,f_1)$; posons $[g,f] = (g,f) \bmod. \rho$; α définit deux applications naturelles $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ de $\Sigma = S/\rho$ vers C_o : $\overline{\alpha}[g,f] = \alpha(f)$ et $\overline{\beta}[g,f] = \alpha(g)$; C opère à droite sur Σ : $[g,f].f' = [g,f.f']$ si et seulement si $\beta(f') = \overline{\alpha}[g,f]$; C^* opère à gauche sur Σ : $g'^*.[g,f] = [g.g',f]$ si et seulement si $\alpha^*(g'^*) = \overline{\beta}[g,f]$; convenons que C, C^* et Σ sont disjoints et désignons par $F_t(C)$ le joint de C et C^* le long de Σ, via les opérations définies ci-dessus ; la catégorie $F_t(C)$ a pour ensemble sous-jacent $C \cup \Sigma \cup C^*$; l'ensemble de ses unités est $C_o \cup C_o^*$ et les applications source et but sont données respectivement par α et β dans C, α^* et β^* dans C^*, $\overline{\alpha}$: $\Sigma \longrightarrow C_o$ et $\overline{\beta} : \Sigma \longrightarrow C_o^*$; les composés autres que ceux existant dans C et C^* sont du type défini par les opérations précédentes de C et C^* sur Σ ; montrons que ce joint $F_t(C)$ est une D'_t-structure libre engendrée par C, l'injection $\varepsilon : C \longrightarrow D'_tF_t(C)$ étant définie par $\varepsilon(f) = ([e',e'],f^*,f,[e,e])$, où $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$; on a bien $f^*.[e',e'].f = [f,f] = [e,e]$ par définition de ρ et donc $\varepsilon(f) \in D'_tF_t(C)$; soit alors G une <u>catégorie</u> et $\phi : C \longrightarrow D'_t(G)$ un foncteur ; pour $f : e \longrightarrow e' \in C$, posons $\phi(f) = (z_{e'},y_f,x_f,z_e)$, où $z_e = y_f.z_{e'}.x_f$; s'il existe $\overline{\phi} : F_t(C) \longrightarrow G$ tel que $D'_t(\overline{\phi}).\varepsilon = \phi$, on doit avoir

$$(z_{e'},y_f,x_f,z_e) = (\overline{\phi}[e',e'],\overline{\phi}(f^*),\overline{\phi}(f),\overline{\phi}[e,e]) \ ;$$

un élément $[g,f]$ de Σ s'écrit, dans $F_t(C)$, sous la forme $g^*.[e',e'].f$ où $e' = \beta(g) = \beta(f)$; on en déduit les valeurs nécessaires de $\overline{\phi}$:

$$\overline{\phi}(f) = x_f \quad \text{pour} \quad f \in C,\ \overline{\phi}(g^*) = y_g \ , \text{ pour } g^* \in C^*, \text{ et}$$

$\overline{\phi}([g,f]) = y_g.z_{e'}.x_f$ (un simple calcul prouve que cette valeur ne dépend pas du choix du représentant (g,f) de $[g,f]$) ; on montre facilement que $\overline{\phi}$ est un foncteur et ceci achève la démonstration. ▲

<u>Remarques</u> :

(4) Le résultat analogue pour $D_t : \mathbb{G}_{FA} \longrightarrow \mathbb{C}$ ne tient pas, comme nous l'avons précisé dans l'énoncé de la proposition 2 ; en effet, on trouve pour valeur nécessaire de $\overline{\Phi}[g,f]$ l'expression $y_g.z_{e'}.x_f$; or, il se peut que ce composé n'existe pas si G est seulement une précatégorie, bien que $y_g.z_{e'}$ et $z_{e'}.x_f$ soient définis.

(5) On a vu que, si G est une précatégorie, on peut identifier les couples $(D_d(G),D_g(G))$ et (T_2,T_1), qui forment une décomposition directe de G^2 ; d'un autre côté, les couples (T_2,T_1^*) et (T_1^*,T_2) sont des décompositions directes de $D_t(G)$ en deux sous-catégories ; il est remarquable qu'en assemblant T_1 et T_2 en $T_2.T_1$ on obtienne une précatégorie, tandis qu'en les assemblant en $T_2.T_1^*$ (ou $T_1^*.T_2$) on obtient une catégorie.

(6) Les calculs de fractions à la façon de GABRIEL-ZISMAN peuvent être développés dans le cadre des précatégories.

3.4. PRÉCATÉGORIES BIEN ORDONNÉES.

DEFINITION - Une précatégorie G est dite bien ordonnée, b.o. en abrégé, si elle est munie d'un bon ordre < satisfaisant la condition suivante :

$$\begin{cases} \sup(x,y) \leq y.x, \text{ pour } y.x \text{ défini, et si } \sup(x,y) = y.x, \\ \text{alors } \inf(x,y) \in G_0. \end{cases}$$

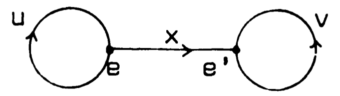
Dans la suite nous aurons besoin des conventions ou définitions suivantes, concernant une précatégorie G donnée :

- si $x \in G$, on désigne par $D(x)$ l'ensemble des diviseurs de x ;
- y est diviseur propre de x s'il existe une fraction $x \to y$ non neutre ;
- G est dite propre si aucun $x \in G$ n'est diviseur propre de lui-même ;
- G est dite sans inverses si "$y.x \in G_0 \Longrightarrow y$ et $x \in G_0$" ;
- si $D(x) = \{\beta(x), x, \alpha(x)\}$, on dit que x est irréductible ; il est équivalent de dire que G est sans inverses ou que G_0 est formé d'irréductibles.
- appelons base de G un ensemble $B \subset G$ qui est générateur et formé seulement d'irréductibles de G ; une précatégorie G a au plus une base (évident).

Remarques :

(1) Une précatégorie peut être propre et avoir cependant des inverses : par exemple, le groupoïde des couples d'un ensemble.

Une précatégorie peut être sans inverses et n'être pas propre : par exemple, la précatégorie suivante :



où $u^2 = u$, $v^2 = v$, $x.u = v.x = x$, $u \neq e$, $v \neq e'$, e et e' étant les seules unités.

(2) Dans une précatégorie propre et sans inverses, la relation "x divise y" est une relation d'ordre ; en effet, elle est clairement réflexive et transitive (axiome [FA]) ; supposons donc $x \leq y$ et $y \leq x$, c'est-à-dire qu'il existe (z',z)

et (t',t) tels que : $y = z'.x.z$ et $x = t'.y.t$; alors $\exists\langle y = z'.t'.y.t.z\rangle$ et comme y n'est pas diviseur propre de lui-même, il vient $z'.t'$, $t.z \in G_0$; comme G est sans inverses, alors $z',t',t,z \in G_0$ et $x = y$.

Si dans une précatégorie G la relation "x divise y" est une relation d'ordre, alors G est sans inverses, mais G peut ne pas être propre (cf. l'exemple cité plus haut où l'on a : $e < u < x$ et $e' < v < x$).

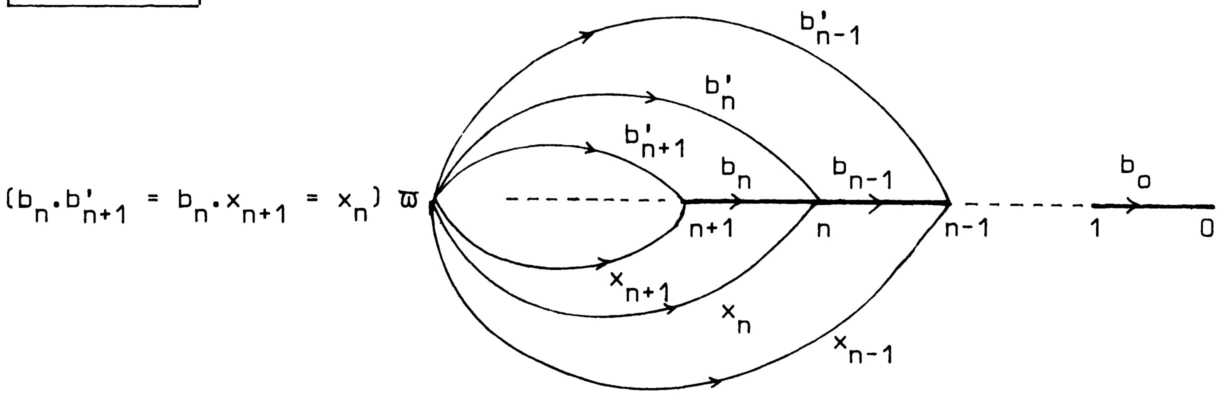
PROPOSITION 1 - Toute précatégorie bien ordonnée est propre, sans inverses et possède une base.

▼ Soit K une précatégorie b.o. ; elle est propre car si $z.y.x = y$ on a $y \leq y.x \leq y$, soit $y.x = y$, donc $\inf(x,y) = x \in K_0$; de même, $z \in K_0$; elle est aussi sans inverses, car la relation "x divise y", impliquant la relation "$x \leq y$" est antisymétrique, donc c'est un ordre ; enfin la classe B des éléments irréductibles n'est pas vide puisqu'elle contient K_0 (on suppose $K \neq \phi$) ; soit $\overline{B}$ la sous-précatégorie stable de K engendrée par B ; écrivons les éléments de K sous la forme "x_λ" où λ est un ordinal, et $x_\lambda < x_\mu$ si et seulement si $\lambda < \mu$; supposons établi que $x_\lambda \in \overline{B}$, $\forall\lambda < \mu$; si, pour tout couple (y,z) tel que $\exists\langle y.z = x_\mu\rangle$ l'un des deux éléments y ou z est égal à x_μ, alors l'autre est une unité et x_μ est irréductible, donc dans B ; si, au contraire, il existe un couple (y,z) tel que $x_\mu = y.z$, avec y et $z \neq x_\mu$, alors on a $y,z < x_\mu$, et y et $z \in \overline{B}$ par hypothèse de récurrence, donc $x_\mu \in \overline{B}$, car $\overline{B}$ est stable dans K ; reste à remarquer que x_0 est obligatoirement une unité, donc $x_0 \in B$ et ceci achève de prouver que $K = \overline{B}$. ▲

Cette proposition n'admet pas de réciproque ; voici en effet un exemple de catégorie propre, sans inverses, munie d'une base et qui pourtant ne peut pas être bien ordonnée : partons de la catégorie opposée à l'ordre naturel de $\mathbb{N}$; l'unique flèche de n+1 vers n est notée b_n ; ajoutons à cette catégorie une nouvelle unité ϖ et deux familles de flèches (x_n) et (b'_n), de source commune ϖ, le but commun de x_n et b'_n étant n ; dans cet ensemble H, on achève de décrire une structure de catégorie en ajoutant que, $\forall n \geq 0$, on doit avoir :

$b_n.b'_{n+1} = b_n.x_{n+1} = x_n$; les irréductibles de H sont : les unités, les b_n et les b'_n ; ils constituent une base B de H ; H est évidemment propre et sans inverses ; enfin H ne peut pas être bien ordonnée, sinon l'ensemble X des x_n aurait un plus petit élément, soit x_{n_0}, mais on peut l'écrire $x_{n_0} = b_{n_0}.x_{n_0+1}$, ce qui prouve que x_{n_0+1} est strictement plus petit que x_{n_0} et contredit la définition de x_{n_0} !

Schéma de H



Cet exemple est sans doute le plus "économique" possible, en vertu de la proposition suivante :

PROPOSITION 2 - Toute précatégorie finie, propre et sans inverses peut être bien ordonnée.

▼ Soit en effet G une telle précatégorie ; pour $x \in G$ posons $\varphi(x) = |D(x)|$; φ est une application de G dans $\mathbb{N}$; à tout entier p tel que $\varphi^{-1}(p) \neq \phi$ faisons correspondre un ordre total (arbitraire) $\leq_p$ sur l'ensemble $\varphi^{-1}(p)$; considérons alors l'ordre "lexicographique" sur G défini par : $x \leq y$ si et seulement si $\varphi(x) < \varphi(y)$ ou, si $\varphi(x) = \varphi(y) = p$, $x \leq_p y$; cet ordre fait de G une précatégorie bien ordonnée ; supposons en effet que y.x soit défini; les inclusions $D(y) \subset D(y.x)$ et $D(x) \subset D(y.x)$ entraînent les inégalités $\varphi(y) \leq \varphi(y.x)$ et $\varphi(x) \leq \varphi(y.x)$; si ces deux inégalités sont strictes, alors on a bien $\sup(x,y) \leq y.x$; supposons $\varphi(y) = \varphi(y.x)$, ce qui équivaut, puisque G est fini, à $D(y) = D(y.x)$; alors y.x est diviseur de y, donc il existe (z',z) tel que $\exists\langle z'.y.x.z = y\rangle$; comme G est propre et sans inverses, celà entraîne que $x \in G_0$. ▲

Le raisonnement précédent ne va pas si G est infini car l'inclusion $D(x) \subset D(y.x)$ peut être stricte bien que $|D(x)| = |D(y.x)|$.

Dans ce qui suit, il faut imaginer que les <u>précatégories b.o.</u> "généralisent" les <u>ensembles b.o.</u> ; on pourrait développer une théorie des ordinaux dans ce sens, sans même la fonder sur la théorie usuelle des ordinaux. Le théorème qui suit est à rapprocher des théorèmes de topologie bien connus sur les produits d'espaces localement compacts ou localement connexes, et à ce titre les <u>précatégories b.o.</u> apparaissent comme des "<u>ensembles localement bien ordonnés</u>" ! (c'est sans doute l'erreur commise dans [8], où l'on ne supposait pas l'ensemble d'indices fini, qui nous a poussés à trouver le bon résultat).

<u>PROPOSITION 3</u> - Un produit de précatégories est bien ordonnable si et seulement si chaque facteur est bien ordonnable et l'ensemble des facteurs non discrets est fini.

▼ Soit $G = \prod_{i \in I} G_i$ un produit de précatégories ; supposons d'abord qu'il existe une infinité de G_i non discrets et montrons que G ne peut pas être bien ordonnée ;

Soit X l'ensemble (non vide) des $(x_i)_{i \in I}$ tels que x_i ne soit pas une unité pour une infinité d'indices $i \in I$; si G était bien ordonné, X aurait un plus petit élément soit $u = (u_i)_{i \in I}$; soit alors (I_1, I_2) une partition de I telle que u_i ne soit pas une unité pour une infinité d'indices $i \in I_1$ et pour une infinité d'indices $i \in I_2$; considérons les deux éléments de G suivants :

$$v = (v_i)_{i \in I} \text{ , où } v_i = u_i \text{ si } i \in I_1 \text{ et } v_i = \alpha(u_i) \text{ si } i \in I_2$$

$$w = (w_i)_{i \in I} \text{ , où } w_i = \beta(u_i) \text{ si } i \in I_1 \text{ et } w_i = u_i \text{ si } i \in I_2 \text{ ;}$$

alors $\exists\langle w.v = u\rangle$, et puisque G est b.o. et que w et v sont différents de u, il vient les inégalités strictes : $v, w < u$, ce qui contredit la définition de u, puisque v et $w \in X$!

Donc si $G = \prod_{i \in I} G_i$ est une précatégorie b.o., il n'y a qu'un nombre fini de G_i non discrètes ; d'autre part, il est clair que chaque G_i est une précatégorie b.o., car G_i est identifiable à une sous-précatégorie b.o. de G.

Réciproquement, soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille de précatégories b.o. contenant seulement une famille finie de précatégories non discrètes ; regroupant les précatégories discrètes on peut considérer que G est un produit fini de précatégories b.o. (car tout ensemble peut être b.o.) dont une au plus est discrète. Supposons donc $G = \prod_{i\in I} G_i$ avec $|I| < \infty$; sur G, on définit l'ordre suivant, après avoir choisi un ordre total < sur I : $x \leq y$ si et seulement si

$$\left| \begin{array}{l} \text{ou bien } x = y \\ \text{ou bien, } x \neq y \text{, et alors } I_{x,y} = \{i \in I | x_i \neq y_i\} \neq \phi, \\ i_0 = \inf (I_{x,y}) \text{ est défini, et } x_{i_0} < y_{i_0} \ ; \end{array} \right.$$

on vérifie aisément que cette relation dans G est un ordre total ; montrons que c'est un bon ordre ; soit $X \subset G$, $X \neq \phi$; définissons $I_X = \{i \in I | \exists (x,y) \in G \times G$ tel que $x_i \neq y_i\}$; si $I_X = \phi$, alors X est réduit à un élément et il n'y a plus rien à montrer ; si $I_X \neq \phi$, nous posons :

$$i_1 = \inf (I_X) \text{ , pour l'ordre < choisi dans I,}$$

$$\xi_1 = \inf (X_{i_1}) \text{, pour l'ordre de } G_{i_1} \text{, où } X_{i_1} \text{ est la projection de X,}$$

$$X^{(1)} = \{x \in X | x_{i_1} = \xi_1\} \ ;$$

on voit que l'inclusion $X^{(1)} \subset X$ est stricte, $X^{(1)} \neq \phi$ et que tout élément de $X - X^{(1)}$ est supérieur à tout élément de $X^{(1)}$; si $X^{(1)}$ n'a qu'un élément, c'est le premier élément de X ; sinon, on recommence tant qu'on peut : par récurrence, on définit $I_{X^{(k)}}, i_{k+1}, \xi_{k+1}, X^{(k+1)}$ à partir de $X^{(k)}$, comme on a défini $I_X, i_1, \xi_1, X^{(1)}$ à partir de $X = X^{(0)}$; comme I est fini et que la suite des i_k est strictement croissante, le processus s'arrêtera : il existe un entier k tel que $X^{(k)}$ soit réduit à un élément : c'est le plus petit élément de X ; reste à vérifier que pour ce bon ordre G est une précatégorie b.o., mais ce n'est pas difficile. ▲

<u>Exemples et remarques</u> :

Soit $\mathbb{2}$ la catégorie à une seule flèche $\{0 \longrightarrow 1\}$ et posons $\mathbb{2}_0 = 2$; ce sont là deux précatégories bien ordonnables, mais, en tant que précatégories, $\mathbb{2}_0^{\mathbb{N}}$ peut être bien ordonnée et pas $\mathbb{2}^{\mathbb{N}}$; d'ailleurs, la première partie de la démonstration précédente revient exactement à montrer que $\mathbb{2}^{\mathbb{N}}$ ne peut pas être bien ordonnée ; toute précatégorie G qui contient une sous-précatégorie isomorphe à

$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ne peut pas être bien ordonnée ; mais ce n'est pas là une condition nécessaire, comme on l'a vu avec l'exemple qui précède la proposition 2 et comme nous le verrons encore avec un exemple qui nous a été communiqué par BENABOU [2] à propos d'une situation beaucoup plus fine qui sera analysée plus loin.

Auparavant, voici encore une proposition, qui généralise en un certain sens la proposition 2 et indique une condition suffisante pour qu'une précatégorie puisse être bien ordonnée.

PROPOSITION 4 - Soit H une précatégorie b.o. et soit $\psi : G \longrightarrow H$ une application satisfaisant les conditions suivantes :

a) $\psi^{-1}(H_o) = G_o$

b) $\forall (y,x) \in G * G$, $(\psi(y),\psi(x)) \in H * H$ et $\psi(y).\psi(x) \leq \psi(y.x)$;

alors G peut être bien ordonnée.

▼ Pour chaque $y \in \psi(G)$ choisissons un bon ordre $<_y$ sur $\psi^{-1}(y)$; définissons alors dans G la relation suivante : $x \leq y$ si et seulement si $\psi(x) < \psi(y)$ ou, lorsque $\psi(x) = \psi(y) = z$, $x <_z y$; la relation $\leq$ est évidemment un ordre total sur G ; soit $X \subset G$, $X \neq \phi$; comme H est b.o., $\psi(X)$ possède un plus petit élément y_o ; soit x_o le plus petit élément de $X \cap \psi^{-1}(y_o)$, pour l'ordre $<_{y_o}$: il est clair que x_o est le plus petit élément de X pour l'ordre $\leq$ sur G, qui de ce fait est un bon ordre sur G ; supposons enfin y.x défini ; alors la condition b) entraîne que $\psi(y).\psi(x)$ est défini dans H et $\psi(y).\psi(x) \leq \psi(y.x)$; comme H est une précatégorie b.o., on voit que $\sup(\psi(y),\psi(x)) \leq \psi(y).\psi(x) \leq \psi(y.x)$; si les inégalités "$\psi(x),\psi(y) \leq \psi(y.x)$ sont strictes, on en déduit $\sup(x,y) < y.x$; supposons au contraire qu'on ait $\psi(y) = \psi(y.x)$; alors, on a aussi $\psi(y) = \psi(y).\psi(x)$, ce qui entraîne $\psi(x) \in H_o$, car H est une précatégorie b.o. ; la condition a) entraîne à son tour que $x \in G_o$, et donc $y = y.x$; dans ce cas, on a bien aussi $x \leq y = y.x$, car $\psi(x) \leq \psi(y).\psi(x) = \psi(y)$ et, si $\psi(x) = \psi(y)$ y est une unité (condition (a)) composable avec x, soit $x = y$! ▲

Exemple.

Soit G une précatégorie ; pour $x \in G$, soit $\Delta(x)$ l'ensemble des n-uples composables du type $s = (x_n,\ldots,x_1)$ où :

- aucun x_i n'est une unité,
- $x = x_n \ldots x_1$; (on posera $l(s) = n$)

soit $\psi(x) = \sup \{n \in \mathbb{N} | \exists s \in \Delta(x)$, avec $l(s) = n\}$; par convention, $\psi(x) = \infty$ si ce sup n'existe pas, et $\psi(x) = 0$ si $\Delta(x) = \phi$. Lorsque G satisfait : $\psi(x) < \infty$, $\forall x \in G$, alors G est bien ordonnable, car ψ satisfait (a) et (b) ; on retrouve les précatégories finies, propres et sans inverses comme cas particulier (prop. 2) de même, la sous-catégorie $\mathbf{2}^{(\mathbb{N})}$ de $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, formée des $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où tous les x_n sauf un nombre fini sont des unités, est bien ordonnable.

Généralisant cet exemple, on aboutit, par récurrence transfinie, à une caractérisation des précatégories b.o. (prop. 5) ; on aurait pu adopter l'ordre de présentation inverse, c'est-à-dire commencer par la proposition 5 et en déduire les propositions déjà énoncées, mais c'eut été en fait inverser l'ordre naturel dans lequel nous avons trouvé les résultats, ce qui n'est pas forcément une bonne chose sur le plan didactique. On dira qu'une suite $(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ est une suite de diviseurs propres si tout x_n est diviseur propre de x_{n-1}, $n \geq 2$. On peut énoncer la :

<u>PROPOSITION 5</u> - Une précatégorie G est bien ordonnable si et seulement si toute suite de diviseurs propres est finie (condition artinienne pour les diviseurs propres).

▼ La condition est évidemment nécessaire, car une suite de diviseurs propres d'une précatégorie b.o. doit avoir un plus petit élément. Montrons qu'elle est suffisante, ce qui n'est pas tout à fait évident. Supposons que G soit une précatégorie dans laquelle toute suite de diviseurs propres est finie ; alors G est propre, car si x était diviseur propre de lui-même, $(x,x,\ldots,x,\ldots)$ serait une suite infinie de diviseurs propres ; G est aussi sans inverses, car si on avait $y.x = e \in G_0$ avec y et $x \neq e$, la suite $(x,y,x,y,\ldots)$ serait une suite infinie de diviseurs propres. Ceci étant, reprenant les notations de l'exemple précédent, posons :

$$G^{(0)} = G,\ G_f^{(0)} = \{x \in G | 0<\psi(x) < \infty\},G_\infty^{(0)} = \{x \in G|\psi(x) = \infty\}$$

Si $G_f^{(0)} = \phi$, alors $G_\infty^{(0)} = \phi$ aussi ; mais $G_\infty^{(0)}$ peut être vide sans que $G_f^{(0)}$ le soit : c'est la situation de l'exemple suivant la proposition 4. Si $G_\infty^{(0)}$ n'est pas vide, on définit $G^{(1)} = G_0 \cup G_\infty^{(0)}$ qui est évidemment une sous-précatégorie stable de G satisfaisant encore la condition artinienne pour les diviseurs propres ; l'analogue de la fonction $\psi : G \longrightarrow \overline{\mathbb{N}}$ est notée $\psi^{(1)} : G^{(1)} \longrightarrow \overline{\mathbb{N}}$; on définit, relativement à $\psi^{(1)}$, les sous-ensembles $G_f^{(1)}$ et $G_\infty^{(1)}$ de $G_\infty^{(0)}$; supposons définies $G^{(\lambda)}$ pour tout $\lambda < \mu$, avec la condition que $G_f^{(\lambda)} \cap G_f^{(\lambda')} = \phi$ pour $\lambda \neq \lambda'$; si μ a un précédesseur $\mu-1$, on définit $G^{(\mu)} = G_0 \cup G^{(\mu-1)}$, puis $\psi^{(\mu)}$, $G_f^{(\mu)}$ et $G_\infty^{(\mu)}$ comme on a défini $G^{(1)}$, $\psi^{(1)}$, $G_f^{(1)}$ et $G_\infty^{(1)}$ à partir de G ; si μ est un ordinal limite, on pose simplement : $G^{(\mu)} = G_0 \cup (\bigcap_{\lambda<\mu} G_\infty^{(\lambda)})$ et $\psi^{(\mu)}$, $G_f^{(\mu)}$, $G_\infty^{(\mu)}$ se laissent définir comme auparavant, remarquant que $G^{(\mu)}$ est encore une sous-précatégorie stable de G. Il est clair que dans tous les cas $G_f^{(\mu)} \cap G_f^{(\lambda)} = \phi$ pour $\lambda < \mu$; G_0 et les $G_f^{(\lambda)}$ constituent une partition de G (il existe un ordinal Λ à partir duquel, $G_f^{(\Lambda)} = \phi$ et $G_\infty^{(\Lambda)} = \phi$ aussi, d'après la remarque faite au début) ; on définit alors, pour tout $x \in G$, l'ordinal $\lambda(x)$ comme étant celui qui satisfait $x \in G_f^{(\lambda(x))}$. Sur G, on considère la relation $x \leq y$ si et seulement si

ou bien $\lambda(x) < \lambda(y)$

ou bien $\lambda(x) = \lambda(y)$ et $\psi^{(\lambda)}(x) < \psi^{(\lambda)}(y)$

ou bien $\lambda(x) = \lambda(y)$, $\psi^{(\lambda)}(x) = \psi^{(\lambda)}(y) = n$

et $x \leq_{(\lambda,n)} y$, où $\leq_{(\lambda,n)}$ est un bon ordre choisi dans

$\psi^{(\lambda)-1}(n) \subset G_f^{(\lambda)}$

(par convention, on introduit en plus des ordinaux $\lambda \geq 0$ un prédécesseur de 0, soit -1, et $\lambda(x) = -1 \iff x \in G_0$) ; On vérifie sans peine que la relation $\leq$ est un bon ordre sur G qui fait de G une précatégorie bien ordonnée. ▲

Filtration naturelle d'une précatégorie b.o. par retraits successifs d'irréductibles.

Soit G une précatégorie b.o. ; avec les notations de la proposition 5, on remarque que la base B de G est caractérisée par

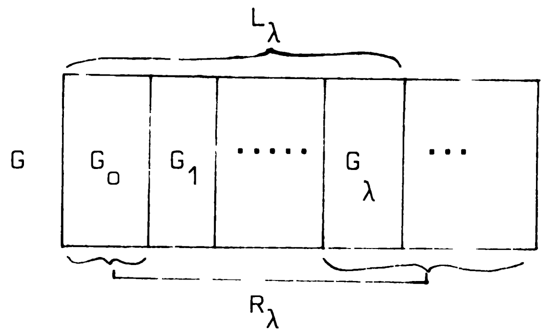
$$B = \{x \in G \mid \psi(x) = 0 \text{ ou } 1\} ;$$

posons $G_1 = B - G_o$; soit μ un ordinal (limite ou non) ; supposons G_λ défini pour tout ordinal $\lambda < \mu$ et supposons aussi que les G_λ satisfont les deux conditions suivantes :

(a) $G_\lambda \cap G_{\lambda'} = \phi$ pour $\lambda \neq \lambda'$, λ et $\lambda' < \mu$,

(b) $\forall\lambda < \mu$, si le composé $y.x \in L_\lambda = \bigcup_{\lambda' \leq \lambda} G_{\lambda'}$, alors x et $y \in L_\lambda$ aussi.

L'ensemble $G' = G - \bigcup_{1 \leq \lambda < \mu} G_\lambda$ est stable dans G ; muni de l'ordre induit par celui de G, c'est encore une précatégorie b.o. ; elle possède alors une base B' ; nous posons $G_\mu = B' - G_o$; si $B' = G_o$, alors $G_\mu = \phi$ et $G = \cup G_\lambda$. Par définition de G_μ, la propriété (a) est satisfaite ; montrons que (b) aussi est satisfaite ; Soit $L_\mu = \bigcup_{\lambda \leq \mu} G_\lambda$ et supposons $y.x \in L_\mu$; s'il existe $\lambda < \mu$ tel que $y.x \in L_\lambda$, l'hypothèse de récurrence prouve que $x,y \in L_\lambda \subset L_\mu$; supposons donc $y.x \in G_\mu$; comme G est réunion disjointe de $G' - B'$ et de L_μ, il suffit de prouver que ni x ni y ne peuvent être dans $G' - B'$; si x et $y \in G' - B'$, $y.x \in G_\mu = B' - G_o$ ne serait pas un irréductible ; supposons donc $x \in G' - B'$ et $y \in L_\mu$ (ou l'inverse) ; comme il n'est pas possible que $y \in G_\mu$, il existe $\lambda < \mu$ tel que $y \in G_\lambda$; l'élément x s'écrit au moins d'une façon : $x = b'_n.b'_{n-1}\ldots b'_1$, où $b'_i \in B' - G_o$, $i = 1,2,\ldots,n$ et $n \geq 2$, car B' engendre G' et $x \notin B'$; comme $z = y.b'_n \ldots b'_2$ est diviseur propre de $y.x$ et que $y.x \in B'$, z ne peut pas être élément de G' ; donc $z \in L_{\lambda'}$, pour un certain $\lambda' < \mu$; mais alors $y, b'_n, \ldots, b'_2$ seraient dans $L_{\lambda'}$, aussi, ce qui contredit le fait que $b'_i \in B' - G_o$, pour $i \geq 2$; ceci achève de prouver que G_μ satisfait (a) et (b) ; la définition des G_λ par récurrence transfinie est bien correcte. Choisissant Λ assez grand, on épuise G qui apparaît ainsi comme réunion disjointe des G_λ ; chaque L_λ définit une sous-précatégorie de G, non stable en général, (ceci résulte de (b), mais (b) indique plus) ; la famille $(L_\lambda)_{\lambda<\Lambda}$ constitue une filtration croissante de G par des sous-précatégories ; posant $R_\lambda = G - \bigcup_{1 \leq \lambda' < \lambda} G_{\lambda'}$, on voit que chaque R_λ est une sous-précatégorie stable de G ayant pour base $G_\lambda \cup G_o$ (c'est la définition même de G_λ) ; la famille $(R_\lambda)_{\lambda<\Lambda}$ constitue une filtration décroissante de G par des sous-précatégories stables (on convient que $R_1 = G$) ; on a toujours $R_\lambda \cap L_\lambda = G_o \cup G_\lambda$ qui est la base de R_λ (cf.



le schéma ci-contre).

On peut être tenté de croire (nous l'avons été dans [8], où un mélange malencontreux des G_λ et des $G^{(\lambda)}$ nous a conduit à écrire des choses fausses) que la partition de G en $(G_\lambda)_{\lambda<\Lambda}$ ainsi décrite est caractéristique des précatégories bien ordonnables ; il n'en est rien comme le montre le contre-exemple suivant, que J. BENABOU nous a communiqué, et dans lequel :

- les G_λ forment une partition de G, et posant :

$$L_\lambda = \bigcup_{\lambda'\leq\lambda} G_\lambda \qquad\qquad R_\lambda = G - \bigcup_{1\leq\lambda'<\lambda} G_\lambda$$

- les L_λ sont des sous-précatégories de G satisfaisant (b) :

$$y.x \in L_\lambda \Longrightarrow y \text{ et } x \in L_\lambda$$

- les R_λ sont des sous-précatégories stables de G, propres, sans inverses, et ayant pour base $G_0 \cup G_\lambda$.

Nous remarquons d'abord que la précatégorie H qui nous a servi de contre-exemple à l'énoncé réciproque de la proposition 1 est insuffisant ici ; en effet, reprenant les notations précédentes et celles de l'exemple en question, on trouve :

$$H_1 = \{b_n, b'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;,\; L_1 = H_1 \cup H_0 \quad \text{et} \quad R_1 = H \;;$$

alors $R_2 = H - H_1 = H_0 \cup \{x_{n,n\in\mathbb{N}}\} \cup \{b_n.b_{n+1}\ldots b_{n+p},\ \substack{n\in\mathbb{N}\\ p\geq 1}\}$; mais R_2 est une sous-précatégorie stable de H qui n'a pas de base ! On ne peut donc pas définir G_2.

<u>Contre-exemple de J. BENABOU</u> [2].

La précatégorie G (c'est en fait une catégorie) a pour classe des unités $G_0 = \mathbb{N} \cup \{\varpi\}$, comme dans notre exemple H. Les flèches entre entiers sont celles définies par l'ordre opposé à l'ordre usuel de $\mathbb{N}$, comme pour H ; donc, pour $m \leq n$, il y a une seule flèche $n \longmapsto m$ notée $\tau_{m,n}$. De ϖ vers ϖ il y a la flèche

identique notée encore ϖ ; de ϖ vers n, il y a n+1 flèches distinctes $\varpi \longrightarrow n$ notées (n,k), où $k = 0,1,\ldots,n$.
La composition est définie entre les $\tau_{m,n}$ par l'ordre ; reste à exprimer les composés de la forme $\tau_{m,n} \circ (n,k)$; on posera :

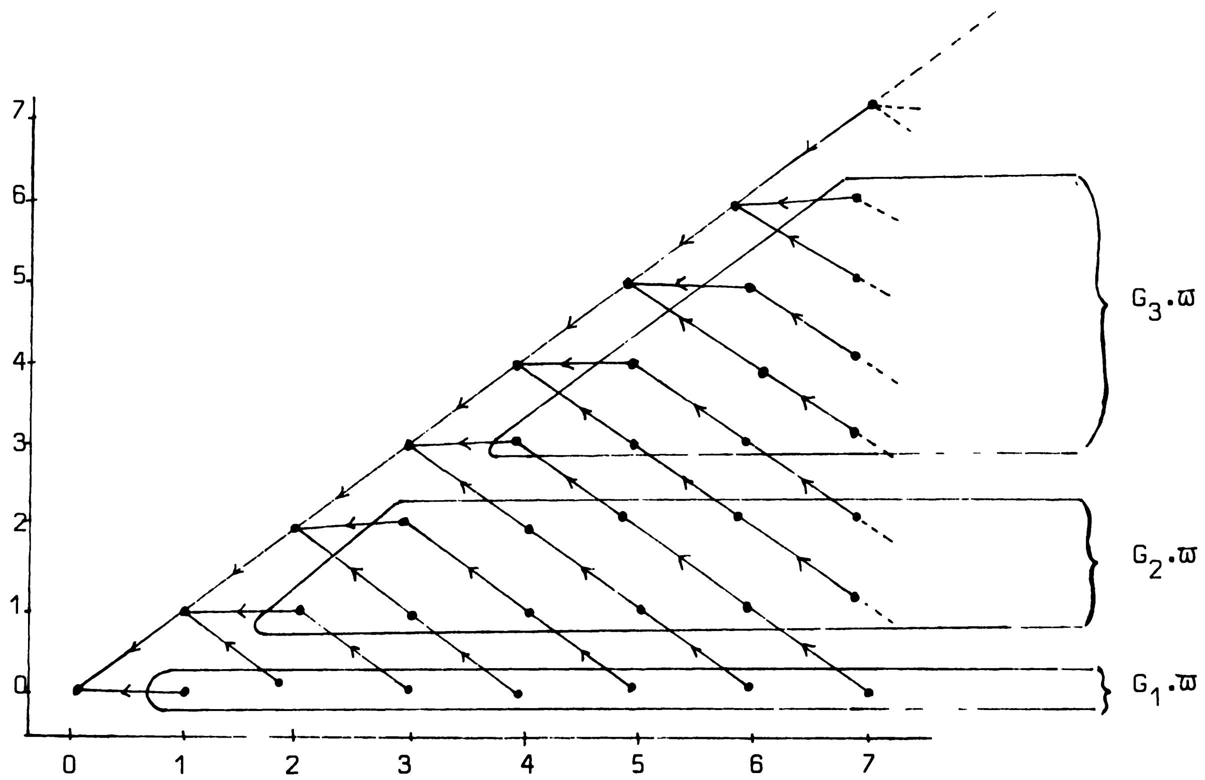
$$\tau_{m,n} \circ (n,k) = (m, \inf(m,k+n-m)) ;$$

il est pratique de représenter par un graphique une partie de la catégorie $D_g(G)$ des diviseurs de G : celle des fractions à gauche $f \longrightarrow f'$ où f est une flèche de source ϖ ; alors, la flèche (n,k) de source ϖ est représentée par le point de coordonnées (n,k) ; sur le schéma sont reliés (n,k) et $\tau_{n-1,n} \circ (n,k)$, ce qui représente la fraction "élémentaire" : $(n,k) \longrightarrow (n-1,\inf(n-1,k+1))$,

soit : $(n,k) \longrightarrow (n-1,k+1)$, pour $k = 0,1,\ldots,n-2$,

et $(n,n-1) \longrightarrow (n-1,n-1)$

et $(n,n) \longrightarrow (n-1,n-1)$



La relation de divisibilité est clairement représentée sur ce graphique. Les irréductibles de G de source ϖ sont : ϖ et les $(n,0)$ avec $n \geq 1$ (i.e .

représentés par les points qui ne sont but d'aucune "flèche de divisibilité").
Les irréductibles non neutres sont donc :

$$G_1 = \{\tau_{n,n+1} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n,0) | n \geq 1\} ;$$

les éléments $x \in G$ de source ϖ ont une décomposition finie formée d'irréductibles qui se "lit" sur le graphique : il y a toujours un chemin fini de source un $(n,0)$, $n \geq 1$, et de but x ; ce chemin est unique pour tout x en dessous de la diagonale ; au contraire, pour tout x de la diagonale, il y a une infinité de décompositions possibles en nombre fini d'irréductibles, mais pour chaque $n \geq 2$, il n'y a qu'une décomposition en n irréductibles.

Par récurrence, on établit alors que G_p existe, $\forall p \geq 1$, et est donné par :

$$G_p = \{\tau_{n,n+k} | 2^{p-1} \leq k < 2^p\} \cup \left\{(n,l) \,\middle|\, \begin{array}{l} n \geq 2^{p-1} \\ 2^{p-1}-1 \leq l < \inf(n, 2^p-1) \end{array}\right\} ;$$

autrement dit, G_p est constitué des flèches dans $\mathbb{N}^{op}$ de longueur k comprise entre 2^{p-1} (inclus) et 2^p (exclus) et des flèches de source ϖ représentées par les points de la figure qui sont strictement en dessous de la diagonale et strictement compris entre les horizontales de hauteurs $2^{p-1}-2$ et 2^p-1 ; on a fait apparaître sur la figure, en les entourant, les trois ensembles $G_1.\varpi$, $G_2.\varpi$ et $G_3.\varpi$.

Toujours par récurrence, on démontre que les ensembles $L_p = \bigcup_{q \leq p} G_q$ sont bien des sous-précatégories de G satisfaisant $y.x \in L_p \Longrightarrow x$ et $y \in L_p$ (ceci se"voit" sur le schéma, lorsqu'on a bien repéré les G_p) ; ce ne sont évidemment pas des sous-catégories.

Enfin, et c'est le point moins évident, on montre que les $R_p = G - \bigcup_{1 \leq q < p} G_p$ définissent bien des sous-catégories de G (ayant mêmes unités) et $G_p \cup G_o$ est la base de R_p ; tout ceci nécessite d'envisager plusieurs "cas de figure" différents, ce qui conduit à établir quelques lemmes d'arithmétique que nous ne reproduisons pas ici, pour alléger.

Passons à l'infini ; conformément à la définition récurrente des G_λ, on aura :

$$R_\omega = G_0 \cup \{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$G_\omega = \{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

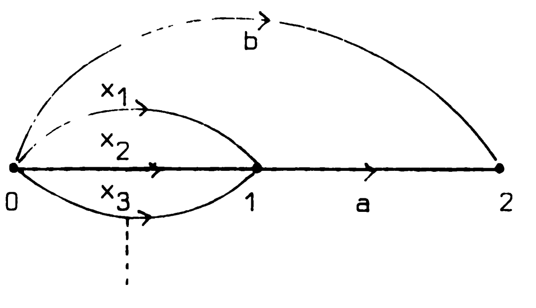
($\approx$ adjonction d'un objet initial ϖ à la catégorie discrète $\mathbb{N}$).

alors R_ω a encore une base, à savoir R_ω elle-même et $L_\omega = G$ satisfait encore (b) évidemment. Le processus de retrait des irréductibles s'arrête alors au cran $\omega+1$. Toutes les conditions requises pour les familles (G_λ), (R_λ), (L_λ) sont bien satisfaites, mais G ne saurait être bien ordonnable puisqu'elle contient des suites infinies de diviseurs propres, par exemple $((0,0),(1,1),(2,2),\ldots,(n,n),\ldots)$!

Remarque à propos de la proposition 5.

Le bon ordre indiqué pour toute précatégorie G satisfaisant la condition artinienne n'est pas en général le plus petit bon ordre faisant de G une précatégorie bien ordonnée, même si l'on choisit pour bons ordres $\leq_{(\lambda,n)}$ les cardinaux $|\psi^{(\lambda)-1}(n)|$; par exemple, si $\widehat{\mathbb{N}}$ est la catégorie associée à l'ordre naturel de $\mathbb{N}$ et si l'on choisit pour $\leq_{(\lambda,n)}$ des cardinaux, on trouve que le bon ordre décrit dans la proposition correspond à ω^2, tandis que le plus petit bon ordre faisant de $\widehat{\mathbb{N}}$ une catégorie bien ordonnée est ω.

D'une façon générale, si G est une précatégorie satisfaisant la condition artinienne pour les diviseurs propres, on peut définir le cardinal précatégorique de G, soit $|G|_{FA}$: c'est le plus petit ordinal correspondant à un bon ordre sur G, faisant de G une précatégorie b.o. ; entre le cardinal ordinaire $|G|$ et le cardinal précatégorique, on a la relation (dans la classe des ordinaux) : $|G| \leq |G|_{FA}$; il peut y avoir égalité, comme on vient de le voir pour $\widehat{\mathbb{N}}$, mais il peut y avoir aussi inégalité stricte comme le montre l'exemple suivant : soit K ayant trois unités 0,1,2 ; de 0 à 1 il y a une infinité de flèches distinctes, par exemple une infinité dénombrable : $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; de 1 à 2 il y a une seule flèche, soit a, et à part les composés triviaux, on suppose :



$a.x_n = b$,
pour tout $n \geq 1$;

K est évidemment bien ordonnable, et il est clair que

$$|K| = \omega \text{ tandis que } |K|_{FA} = \omega+1 \ .$$

Deux questions naturelles se posent, auxquelles nous n'avons pas de réponse :

1) caractériser les précatégories G telles que $|G| = |G|_{FA}$
2) caractériser les précatégories G pour lesquelles $|G|_{FA}$ est le bon ordre décrit dans la proposition 5 quand on prend pour $\leq_{(\lambda,n)}$ des cardinaux.

CHAPITRE 4

DÉCOMPOSITIONS DES PRÉCATÉGORIES

4.0. INTRODUCTION.

Ce chapître contient des résultats généraux concernant les décompositions des précatégories. Les résultats du chapître 2 subsistent à condition de remplacer l'expression "sous-catégorie" par l'expression "sous-précatégorie stable" ; si l'on n'exige pas que les facteurs d'une décomposition soient stables la situation change complètement ; c'est en cela que ce chapître se démarque du chapître 2, tout en le prolongeant.

La recherche des structures libres de décomposition conduit naturellement à définir les décompositions partielles d'un graphe multiplicatif, ce par quoi nous commencerons ; on distinguera parmi les différents types de décompositions envisagés ceux qui sont algébriques au sens des triples et ceux qui ne le sont pas.

Lorsque les facteurs d'une décomposition d'une précatégorie ne sont pas stables, la décomposition peut cependant être ω-stable (on montrera au chapître 5 que c'est le cas des décompositions de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$) : intuitivement, cette propriété signifie que, par alternance de compositions et de décompositions élémentaires des éléments d'un chemin composable, on aboutit en un nombre fini d'opérations à la décomposition de l'élément associé au chemin ; la stabilité des facteurs entraîne l'ω-stabilité des décompositions et non l'inverse.

Enfin, lorsqu'on s'intéresse aux décompositions d'une précatégorie G en un nombre de facteurs non précisé, il convient de regarder la loi de composition partielle $\circledast$ entre parties de G (ayant éventuellement certaines propriétés) définie de la manière suivante : $B \circledast A = C$ si et seulement si (B,A) est une décomposition directe de C ; ce point de vue occupe le dernier paragraphe ; il sera illustré au chapître 5 par les résultats particuliers concernant les entiers.

4.1. STRUCTURES LIBRES DE DÉCOMPOSITIONS. (Directes, fortement associatives, stables etc...).

Soit G un graphe multiplicatif (cf. § <u>3.1</u>) ;

<u>DEFINITION 1</u> - Une <u>décomposition partielle</u> de G est une application $d : G' \longrightarrow G{*}G$, où G' est une partie de G contenant G_0, satisfaisant les conditions suivantes :

(DP_0) $d(e) = (e,e)$, $\forall e \in G_0$;

(DP_1) si $d(x) = (x_2,x_1)$, alors $x = x_2.x_1$

(DP_2) si $d(x) = (x_2,x_1)$, alors x_1 et $x_2 \in G'$ et
$d(x_1) = (\beta(x_1),x_1)$ et $d(x_2) = (x_2,\alpha(x_2))$

La catégorie $\widetilde{\mathbb{D}}$.

Les objets de $\widetilde{\mathbb{D}}$ sont les couples (G,d) formés d'un graphe multiplicatif G et d'une décomposition partielle d de G ; un morphisme $F : (G,d) \longrightarrow (H,d')$ est la donnée d'un foncteur $F : G \longrightarrow H$ satisfaisant $(F{*}F) \circ d = d' \circ F$ où $F{*}F : G{*}G \longrightarrow H{*}H$ est définie par $(F{*}F)(y,x) = (F(y),F(x))$; l'image par F de la source de d est donc contenue dans la source de d'.

DEFINITION 2 - Soit d une décomposition partielle de G. On dira que d est totale si sa source est égale à G.

On dira que d est directe si elle satisfait l'axiome d'unicité suivant, dans lequel on pose $d(x) = (x_2,x_1)$:

(U) si x et $y \in G'$ et si $y_2.x_1$ est défini et $\in G'$, alors $d(y_2.x_1) = (y_2,x_1)$.

Par convention, une décomposition qui est à la fois totale et directe s'appellera simplement une décomposition de G.

Soit G un graphe multiplicatif ; une décomposition d de G est parfaitement déterminée par la donnée d'un couple (B,A) de parties de G satisfaisant

i) $B \cap A = G_0$

ii) la composition induit une bijection $\gamma : B{*}A \longrightarrow G$ (on rappelle que $B{*}A = G{*}G \cap B{\times}A$) ;

c'est le couple $(B,A) = (p_2.d(G),p_1.d(G))$, où p_1 et p_2 sont les projections naturelles $G{*}G \rightrightarrows G$; on posera $\underline{a} = p_1.d$ et $\underline{b} = p_2.d$ et B et A s'appelleront les facteurs de la décomposition d ; on parlera aussi de "la décomposition (B,A) de G".

Les catégories $\tilde{\mathbb{D}}_X$ et $\mathbb{D}_X$.

Le symbole X indique des propriétés possibles de décomposition ; par exemple :

X = T	signifie	"décomposition totale"
X = $\oplus$	signifie	"décomposition directe"
X = T$\oplus$	signifie	"décomposition totale et directe" (encore appelée décomposition)
X =	signifie	"décomposition partielle"
X = FA	signifie	"décomposition (totale et directe) en sous précatégories"
X = S	signifie	"décomposition en sous-précatégories stables".

Ceci étant, la catégorie $\tilde{\mathbb{D}}_X$ est la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathbb{D}}$ dont les objets sont les couples (G,d) où d est une décomposition du graphe multiplicatif G ayant la propriété X ; quant à $\mathbb{D}_X$ c'est la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathbb{D}}_X$ dont les objets sont les couples (G,d) où G est une précatégorie.

Extension d'une décomposition partielle de graphe multiplicatif.

PROPOSITION 1 - La catégorie $\tilde{\mathbb{D}}$ est à $\tilde{\mathbb{D}}_T$ -projections ; une projection de $\tilde{\mathbb{D}}$ dans $\tilde{\mathbb{D}}_T$ se restreint encore en une projection de $\tilde{\mathbb{D}}_\oplus$ dans $\tilde{\mathbb{D}}_{T\oplus}$; enfin, si $(G,d) \longrightarrow (\bar{G},\bar{d})$ est un projecteur et si G est un graphe associatif, alors $\bar{G}$ est encore un graphe associatif.

▼ Soit (G,d) un objet de $\tilde{\mathbb{D}}$; posons $G_d = G-G'$ où G' est la source de d ; soient a,b,u trois éléments tels que (x,a), (x,b) et (x,u) ne soient pas éléments de G, quel que soit $x \in G$. Considérons l'ensemble $\bar{G}$ suivant :

$$\bar{G} = G \cup (G_d \times \{a\}) \cup (G_d \times \ b) \cup \ (G_d \times \{u\});$$

on le munit d'une structure de graphe multiplicatif de la façon suivante :

- on conserve la structure de G qui devient un sous-graphe multiplicatif stable de $\bar{G}$;
- les "nouvelles unités" sont les (x,u), $x \in G$; l'élément (x,a) a pour source $\alpha(x)$ et pour but (x,u) ; l'élément (x,b) a pour source (x,u) et pour but $\beta(x)$;

les "nouveaux composés" non triviaux sont définis par :

$$x = (x,b).(x,a), \text{ pour } x \in G_d.$$

Alors, on peut étendre d en une application $\overline{d} : \overline{G} \longrightarrow \overline{G}*\overline{G}$ par la condition d'être égale à d sur G', et définie ailleurs par :

$$\begin{cases} \overline{d}(x) = ((x,b),(x,a)) \;, & \\ \overline{d}(x,u) = ((x,u),(x,u)) \;, & (x \in G_d) \\ \overline{d}(x,a) = ((x,u),(x,a)) \;, & \\ \overline{d}(x,b) = ((x,b),(x,u)) \;; & \end{cases}$$

le couple $(\overline{G},\overline{d})$ est objet de $\widetilde{\mathbb{D}}_T$ et l'inclusion de G dans $\overline{G}$ définit un morphisme $(G,d) \longrightarrow (\overline{G},\overline{d})$ qui est clairement un $\widetilde{\mathbb{D}}_T$-projecteur : $(\overline{G},\overline{d})$ est l'extension libre totale engendrée par (G,d). Si G est un graphe associatif, il en est de même de $\overline{G}$; si d est une décomposition directe, il en est de même de $\overline{d}$, car les seuls composés (dans $\overline{G}$) de la forme $(x,a)y$ ou $z(x,b)$ sont forcément triviaux (i.e. : $y = \alpha(x)$, $z = \beta(x)$!). ▲

<u>Extension d'une décomposition partielle de précatégorie.</u>

Si dans la construction précédente on suppose que G est une précatégorie, c'est-à-dire (G,d) objet de $\mathbb{D}$, on trouve que $\overline{G}$ est seulement un graphe associatif ; si $G*G$ n'est pas trivial, $\overline{G}$ n'est certainement pas une précatégorie. Il faut donc poursuivre la construction pour obtenir une $\mathbb{D}_T$-projection de (G,d). C'est ce que nous allons faire dans la démonstration de la

<u>PROPOSITION 2</u> - La catégorie $\mathbb{D}$ est à $\mathbb{D}_T$-projections ; une projection de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}_T$ se restreint encore en une projection de $\mathbb{D}_\oplus$ dans $\mathbb{D}_{T\oplus}$.

▼ On reprend les notations précédentes ; on va construire d'abord l'objet (G_1,d_1) de $\mathbb{D}$ engendré par $(\overline{G},\overline{d})$; on peut procéder de deux façons : l'une est naturelle à partir de $\overline{G}$, mais nécessite de nombreuses vérifications (que nous ne donnerons pas) ; l'autre consiste à oublier $\overline{G}$; elle est longue et artificielle, mais a l'avantage de réduire les vérifications à des évidences.

<u>1ère description de</u> G_1. Soit $c = (x_n,x_{n-1},\dots,x_1)$ un chemin composable dans G et

posons $c_d = (y_{2n}, y_{2n-1}, \ldots, y_2, y_1)$ où $(y_{2i}, y_{2i-1}) = \overline{d}(x_i)$, pour $i = 1,2,\ldots,n$; c_d est un chemin dans $\overline{G}$; soit c'_d un morceau de c_d, c'est-à-dire un chemin $(y_j, \ldots, y_i)$ où $[i,j] \subset [1,2n]$; on fabrique alors le chemin réduit correspondant, la réduction s'effectuant dans $\overline{G}$ et le résultat de cette réduction ne pouvant être qu'unique ; on obtient un chemin irréductible dans $\overline{G}$, soit $r_c(c'_d)$, de longueur 1, 2 ou 3 ; s'il est de longueur 1 on peut l'identifier à l'élément de $\overline{G}$ correspondant ; soit G_1 l'ensemble des chemins irréductibles obtenus par ce procédé; on définit dans G_1 la loi de composition partielle suivante, qui fait de G_1 une précatégorie :

> soit (r'', r') un couple d'éléments de G_1 ; on dit qu'il est composable s'il existe un chemin composable c dans G et deux morceaux c'_d et c''_d de c tels que $c''_d \circ c'_d$ soit défini, $r' = r_c(c'_d)$, $r'' = r_c(c''_d)$; dans ce cas $r''r' = r_c(c''_d \circ c'_d)$.

Il convient de vérifier que la composition ainsi définie dans G_1 ne dépend pas des représentants (c, c'_d, c''_d) choisis pour la définir, ce qui conduit à examiner environ 16 cas ; puis il faut encore montrer que G_1 devient bien une précatégorie et que celle-ci est la précatégorie libre engendrée par $\overline{G}$ (cf. § <u>3.1</u>, prop. 3), ce qui est fort long.

<u>2ème description de G_1</u>. Soit G_1^* l'ensemble des triplets $((x,a),z,(y,b))$ tels que $z \in G$, x et $y \in G_0 \cup G_d$ et $x.z.y$ est défini dans G ; soit G_d^e un ensemble disjoint de G_1^*, en bijection avec G_d, l'élément correspondant à $z \in G_d$ étant noté e_z. L'ensemble sous-jacent à la précatégorie G_1 est la réunion disjointe de G_1^* et de G_d^e.

On munit d'abord G_1 d'une structure de graphe orienté, dont les applications source et but notées respectivement α_1 et β_1 sont définies comme suit :

- pour $e_z \in G_d^e$, on pose $\alpha_1(e_z) = \beta_1(e_z) = e_z$;
- pour $t = ((x,a),z,(y,b)) \in G_1^*$, on pose

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} ((y,a),y,(y,b)) & \text{si } y \in G_0 \\ e_y & \text{si } y \in G_d \,, \end{cases}$$

$$\beta_1(t) = \begin{cases} ((x,a),x,(x,b)) \text{ si } x \in G_o \\ e_x \text{ si } x \in G_d \text{ ;} \end{cases}$$

on munit ensuite G_1 d'une structure de graphe multiplicatif telle qu'il sera pratiquement évident qu'il est fortement associatif :

- le composé $((x',a),z',(y',b)).((x,a),z,(y,b))$ est défini si et seulement si $y' = x$ d'une part, et si le composé des cinq éléments $x'.z'.x.z.y$ est défini dans G, d'autre part ; dans ce cas, le composé vaut $((x',a),z'.x.z,(y,b))$;
- le composé $((x,a),z,(y,b)).e_v$ est défini si et seulement si $v = y$, et vaut dans ce cas $((x,a),z,(y,b))$; de même le composé $e_{v'}.((x,a),z,(y,b))$ est défini si et seulement si $v' = x$, et vaut dans ce cas $((x,a),z,(y,b))$;
- enfin $e_{v'}.e_v$ n'est défini que si $v = v'$, et vaut alors e_v.

Il est clair que l'application $G \longrightarrow G_1$ définie par :

$$z \rightsquigarrow ((\beta(z),a),z,(\alpha(z),b))$$

est un foncteur injectif et permet donc d'identifier G à une sous-précatégorie stable de G_1, ce que nous faisons à partir de maintenant ; on munit G_1 de la décomposition partielle d_1 de source $G_1' = G \cup G_d^e$, définie par :

- $d_1(z) = d(z)$, pour $z \in G'$, source de d,
- $d_1(e_z) = (e_z,e_z)$, pour $e_z \in G_d^e$,
- $d_1(z) = (((\beta(z),a),\beta(z),(z,b)),((z,a),\alpha(z),(\alpha(z),b)))$, pour $z \in G_d$;

alors (G,d) est un sous-objet de (G_1,d_1) dans $\mathbb{D}$, et si d est directe, il est clair que d_1 est encore directe ; bien sûr, si d est totale, $G_d = \phi$ et $(G_1,d_1) = (G,d)$.

Soit alors $F : (G,d) \longrightarrow (H,d')$ un morphisme de $\mathbb{D}$ de but un objet de $\mathbb{D}_T$; montrons qu'il s'étend de façon unique en un morphisme $F_1 : (G_1,d_1) \longrightarrow (H,d')$; à cet effet, remarquons que tout élément $((x,a),z,(y,b))$ de G_1^* s'écrit sous la forme $\underline{a}_1(x).z.\underline{b}_1(y)$, où $(\underline{a}_1,\underline{b}_1)$ est le couple d'applications de G_1' dans G_1 associé à la décomposition partielle d_1 (i.è. : $d_1(t) = (\underline{b}_1(t),\underline{a}_1(t))$) ; on doit avoir $F_1(z) = F(z)$, car F_1 doit prolonger F ; comme on veut que F_1 soit un morphisme de $\mathbb{D}$, cela nécessite $F_1(\underline{a}_1(x)) = \underline{a}'(F_1(x)) = \underline{a}'(F(x))$ et $F_1(\underline{b}_1(y)) = \underline{b}'(F_1(y)) = \underline{b}'(F(y))$ (remarquons que $\underline{a}'$ et $\underline{b}'$ sont des applications partout définies, car d' est une décomposition totale de H) ; enfin, comme x.z.y est défini dans G, il s'en suit que F(x).F(z).F(y) est défini dans H, donc aussi $\underline{b}'(F(x)).\underline{a}'(F(x)).F(z).\underline{b}'(F(y)).\underline{a}'(F(y))$, de sorte que la valeur de F_1 sur G_1^* est parfaitement déterminée par :

$$F_1((x,a),z,(y,b)) = \underline{a}'(F(x)).F(z).\underline{b}'(F(y)) \ ;$$

soit encore $e_z \in G_d^e$; on sait que $z \in G_d$, donc $e_z = \beta_1((z,a),\alpha(z),(\alpha(z),b)) = \beta_1(\underline{a}_1(z))$, d'où $F_1(e_z) = \beta(\underline{a}'(F(z)))$, car F_1 doit être un foncteur ; on montre facilement alors que F_1 est bien un morphisme de (G_1,d_1) vers (H,d').

On achève la démonstration par récurrence ; en effet, d_1 est seulement une décomposition partielle de G_1, mais sa source contient G, donc ce défaut s'effacera à l'infini ; soit plus précisément (G_n,d_n) l'objet de $\mathbb{D}$ construit à partir de (G_{n-1},d_{n-1}), comme (G_1,d_1) a été construit à partir de (G,d) ; on peut identifier G_{n-1} à une sous-précatégorie stable de G_n, de sorte que d_n est une extension de d_{n-1} ; prenant la limite inductive de

$$(G,d) \longrightarrow (G_1,d_1) \longrightarrow \dots \longrightarrow (G_n,d_n) \longrightarrow \dots$$

on obtient une $\mathbb{D}_T$-projection (G_∞,d_∞) de (G,d), le projecteur $(G,d) \xrightarrow{i} (G_\infty,d_\infty)$ étant défini par l'inclusion limite des inclusions $G \longrightarrow G_n$; pour chaque entier n il existe un unique $F_n : (G_n,d_n) \longrightarrow (H,d')$ prolongeant F, d'où, par passage à la limite, un unique $\overline{F} : (G_\infty,d_\infty) \longrightarrow (H,d')$ prolongeant F ; si d est une décomposition directe, il en est de même des d_n (par récurrence) et donc de d_∞, et ceci achève la démonstration de la proposition 2. ▲

Pour tout symbole X, désignons par V_X le foncteur d'oubli (de la structure de décomposition) de $\mathbb{D}_X$ vers $\mathbb{G}_{FA}$; nous pouvons énoncer la

PROPOSITION 3 - Pour $X \in \{\phi, T, \oplus, T\oplus, FA, S\}$, le foncteur V_X a un adjoint à gauche, mais seuls V_T et V_S sont triplables ; en particulier les décompositions de précatégories en sous-précatégories ne sont pas algébriques au-dessus de $\mathbb{G}_{FA}$, ce qui correspond à la non-triplabilité de V_{FA}.

▼ Soit G un graphe multiplicatif et soit d^0 la décomposition partielle triviale sur G, où $d^0 : G_0 \longrightarrow G{*}G$ est définie par $d(e) = (e,e)$; il est évident que (G, d^0) est une structure libre engendrée par G pour l'oubli naturel de $\tilde{\mathbb{D}}$ vers $\mathbb{G}_M$; ainsi, par composition d'adjoints, on voit que les foncteurs d'oubli de $\tilde{\mathbb{D}}_X$ vers $\mathbb{G}_M$ ont des adjoints à gauche, pour $X = \phi$, $T, \oplus$ ou $T\oplus$; de même, pour les foncteurs de $\mathbb{D}_X$ vers $\mathbb{G}_{FA}$, notés $V, V_T, V_\oplus$ et $V_{T\oplus}$; (G, d^0) est une V-structure libre engendrée par la précatégorie G et si (G_∞, d^0_∞) est la $\mathbb{D}_T$-projection de (G, d^0), c'est une V_T-structure libre engendrée par G ; mais comme (G, d^0) est directe, il en est de même de (G_∞, d^0_∞), qui se présente donc aussi comme une $V_\oplus$-ou $V_{T\oplus}$-structure libre engendrée par G ; mieux encore, si un composé du type $\underline{a}_\infty(x).\underline{a}_\infty(y)$ est défini et appartient à $\underline{a}_\infty(G_\infty)$, la construction de G_∞ montre que l'un au moins des deux éléments $\underline{a}_\infty(x)$ et $\underline{a}_\infty(y)$ doit être une unité ; donc $\underline{a}_\infty(G_\infty)$ et $\underline{b}_\infty(G_\infty)$ sont des sous-précatégories (triviales) de G_∞, de sorte que (G_∞, d^0_∞) est aussi une V_{FA}-structure libre engendrée par G ; montrons maintenant que V_T est triplable, ce qui prouvera du même coup que $V_\oplus$, $V_{T\oplus}$ et V_{FA} ne sont pas triplables, puisque le triple associé dans $\mathbb{G}_{FA}$ est toujours le même ; notons-le $((\ )_\infty, i, m)$; en un objet G, on a donc :

$$G \xrightarrow{i} G_\infty \underset{m}{\overset{i_\infty}{\rightleftarrows}} G_{\infty\infty}$$

où i est l'inclusion et où m est l'extension totale de $(G_\infty, d^0) \xrightarrow{Id} (G_\infty, d^0_\infty)$, d^0 désignant encore la décomposition triviale de G_∞ ; montrons d'abord que i_∞ est aussi l'inclusion (naturelle) de G_∞ dans $G_{\infty\infty}$; soit I cette inclusion ; par définition de i_∞, on a $i_\infty = \overline{I \circ i}$ = l'extension totale de l'inclusion $I \circ i : (G, d^0) \longrightarrow (G_{\infty\infty}, d^0_{\infty\infty})$; supposons prouvé que $(I \circ i)_n$ est l'inclusion de G_n dans $G_{\infty\infty}$; soit alors $((x,a), z, (y,b)) \in G_{n+1}$; par définition, x et $y \in G_{n,d}$, $z \in G_n$ et x.z.y est défini dans G_n ; par construction (cf. Proposition 2) on a :

$$(I \circ i)_{n+1}((x,a),z,(y,b)) = \underline{a}^0_{\infty\infty}((I \circ i)_n(x)).(I \circ i)_n(z).\underline{b}^0_{\infty\infty}((I \circ i)_n(y))$$
$$= \underline{a}^0_{\infty\infty}(x).z.\underline{b}^0_{\infty\infty}(y), \text{ par}$$

hypothèse de récurrence ; mais x et y ϵ $G_{n,d} \subset G_n \subset G_\infty$, et G_∞ est dans le domaine de la décomposition partielle d_1^o de $G_{\infty,1}$, ce qui signifie que :

$$\underline{a}^o_{\infty\infty}(x) = \underline{a}^o_1(x) = ((x,a),\alpha(x),(\alpha(x),b))$$

et $$\underline{b}^o_{\infty\infty\infty}(y) = \underline{b}^o_1(y) = ((\beta(y),a),\beta(y),(y,b)) \text{ ; alors on trouve :}$$

$$(I\circ i)_{n+1}((x,a),z,(y,b)) = ((x,a),\alpha(x),(\alpha(x),b)).z.((\beta(y),a),\beta(y),(y,b))$$

$$= ((x,a),z,(y,b)), \text{ et ceci montre que}$$

$(I\circ i)_{n+1}$ est encore l'inclusion ; finalement i_∞ est l'inclusion et $\underline{i}_\infty = I$. A un objet (G,d) de $\mathbb{D}_T$ correspond une algèbre $\theta_d : G_\infty \longrightarrow G$, par le foncteur de comparaison d'Eilenberg-Moore : ce n'est autre que l'extension totale de $(G,d^o) \xrightarrow{Id} (G,d)$; réciproquement, soit $\theta : G_\infty \longrightarrow G$ une algèbre sur G ; on lui fait correspondre l'application $d_\theta = G \xrightarrow{i} G_\infty \xrightarrow{d^o_\infty} G_\infty * G_\infty \xrightarrow{\theta*\theta} G*G$; si $x \in G_o$, alors $i(x) \in (G_\infty)_o$ et $d_\theta(x) = (\theta\circ i(x),\theta\circ i(x)) = (x,x)$, ce qui prouve que d_θ satisfait (DP_o). Comme pour tout $x \in G$, on a $\underline{b}_\infty(ix).\underline{a}_\infty(ix) = ix$ et que θ est un foncteur inverse à gauche de i, on en déduit que $\underline{b}(x).\underline{a}(x)$ est défini et égal à x, c'est-à-dire que d_θ satisfait (DP_1). Supposons enfin que $x' = \underline{a}(x)$ et prouvons que $d_\theta(x') = (\underline{b}(x'),\underline{a}(x')) = (\beta(x'),x')$; on a :

$$\begin{aligned}
\underline{a}(x') = \underline{a}^2(x) &= (\theta\circ\underline{a}_\infty\circ i\circ\theta\circ\underline{a}_\infty\circ i)(x), \text{ par définition de } \underline{a},\\
&= (\theta\circ\underline{a}_\infty\circ\theta_\infty\circ i_\infty\circ\underline{a}_\infty\circ i)(x), \text{ parce que i est naturelle,}\\
&= (\theta\circ\theta_\infty\circ\underline{a}_{\infty\infty}\circ i_\infty\circ\underline{a}_\infty\ i)(x), \text{ parce que } \theta_\infty \text{ définit}\\
&\quad \text{un morphisme } (G_{\infty\infty},d^o_{\infty\infty}) \longrightarrow (G_\infty,d^o_\infty),\\
&= (\theta\circ m\circ\underline{a}_{\infty\infty}\circ i_\infty\circ\underline{a}_\infty\circ i)(x), \text{ parce que } \theta \text{ est une algèbre}\\
&= (\theta\circ\underline{a}_\infty\circ m\circ i_\infty\circ\underline{a}_\infty\circ i)(x), \text{ parce que m est un morphisme}\\
&\quad (G_{\infty\infty},d^o_{\infty\infty}) \longrightarrow (G_\infty,d^o_\infty) \text{ aussi,}\\
&= (\theta\circ\underline{a}^2_\infty\circ i)(x), \text{ parce que } m\circ i_\infty = Id,\\
&= (\theta\circ\underline{a}_\infty\circ i)(x), \text{ parce que } d^o_\infty \text{ satisfait } (DP_2),\\
&= \underline{a}(x) = x', \text{ par définition de } \underline{a}.
\end{aligned}$$

On prouve de même les autres égalités, ce qui montre que d_θ est bien une décomposition totale de G ; elle n'a aucune raison d'être directe ; d'ailleurs, pour toute décomposition totale d de G, on voit que :

$$d_{\theta_d} = (\theta_d * \theta_d) \circ d_\infty \circ i = d \circ \theta_d \circ i = d, \text{ car } \theta_d \circ i = 1,$$

et si θ est une algèbre sur G, θ_{d_θ} est l'unique morphisme $(G_\infty, d_\infty^0) \longrightarrow (G, d_\theta)$ tel que $\theta_{d_\theta} \circ i = Id_G$; comme $\theta \circ i = Id_G$ aussi, il suffit de montrer que θ est encore un morphisme $(G_\infty, d_\infty^0) \longrightarrow (G, d_\theta)$ pour être sûr que $\theta = \theta_{d_\theta}$; or ceci résulte essentiellement du fait que $I = i_\infty$; en effet :

$$\begin{aligned}(\theta * \theta) \circ d_\infty^0 \circ i \circ \theta &= (\theta * \theta) \circ d_\infty^0 \circ \theta_\infty \circ I, \text{ par naturalité} \\ &= (\theta * \theta) \circ d_\infty^0 \circ \theta_\infty \circ i_\infty, \text{ car } I = i_\infty \\ &= (\theta * \theta) \circ d_\infty^0 \text{ , car } \theta_\infty \circ i_\infty = (\theta \circ i)_\infty = 1 \text{ ;}\end{aligned}$$

ainsi les correspondances $\theta \rightsquigarrow d_\theta$ et $d \rightsquigarrow \theta_d$ sont inverses l'une de l'autre et ceci achève la démonstration de la triplabilité de V_T et de la non triplabilité de $V_\oplus$, $V_{T\oplus}$ et V_{FA}. Quant à V_S, il admet aussi un adjoint à gauche, mais celui-ci n'est pas fourni par la construction de la proposition 2 ; une V_S-structure libre engendrée par G est donnée par (G^2, d^2) où G^2 est la précatégorie des quatuors de G et d^2 en est la décomposition totale définie par :

$$d^2(y, t_1, t_0, x) = ((y, \beta(t_1), t_0, y.t_0), (t_1.x, t_1, \alpha(t_0), x)) \text{ ;}$$

ce résultat, établi pour les catégories au chapitre 2, subsiste ici comme nous l'avons indiqué dans l'introduction : il suffit d'ajouter partout où celà est nécessaire l'expression "si les composés écrits sont définis" ; en fait (G^2, d^2) apparaît aussi comme un quotient de (G_∞, d_∞^0). Ceci achève la démonstration de la proposition 3. ▲

Remarques.

(1) La décomposition libre en deux sous-précatégories stables (G^2, d^2) a été indiquée en 3.3; les facteurs étaient désignés T_2 et T_1, et on a remarqué que c'étaient en fait des catégories isomorphes aux catégories des fractions à gauche et à droite de G. Nous tenons à souligner que le seul fait d'imposer aux facteurs

d'être non seulement des sous-précatégories, mais encore des graphes stables modifie complètement la situation : les structures stables "redeviennent" algébriques (triplabilité du foncteur V_S) et la structure stable libre engendrée par G est beaucoup plus "petite" que la structure FA-libre engendrée par G, soit (G_∞, d^o_∞) ! On peut retrouver ces résultats en raisonnant sur de bonnes esquisses projectives des divers types de décompositions introduits ; il convient de dessiner correctement de telles esquisses ; l'existence et le calcul explicite des adjoints aux foncteurs V_X résultent de la théorie générale des esquisses (extensions de Kan successives...) ; notre procédure n'est finalement qu'un raccourci agréable ; de plus la triplabilité ou la non triplabilité de certains foncteurs est un phénomène qu'on peut "lire" sur certaines esquisses, grâce à des théorèmes tout à fait généraux, justement applicables ici (dus essentiellement à LAIR [17]) ; toute la question consiste à trouver de "bonnes" esquisses des structures considérées ; nous ne le ferons pas ici pour alléger le texte, mais la possibilité de le faire n'est pas seulement destinée à illustrer les travaux sur les esquisses (ou à les utiliser) ; elle est aussi la preuve que tout ce que nous avons dit dans ce chapître est vrai de façon "interne".

(2) On notera que la structure (G_∞, d^o_∞) est la plus "instable" qui soit, puisque les facteurs de la décomposition d^o_∞ sont des sous-précatégories triviales de G_∞. Nous allons décrire dans le paragraphe suivant une situation intermédiaire entre la stabilité totale (V_S) et l'instabilité totale (V_{FA}) ; il s'agit des décompositions ω-stables ; la définition précise de telles décompositions est assez longue ; il y a sans doute des décompositions ω-stables libres engendrées par les précatégories, mais celles-ci doivent être vraiment très compliquées (ici, les esquisses purement projectives ne suffisent plus).

4.2. DÉCOMPOSITIONS ω-STABLES.

Dans ce paragraphe il s'agit de décompositions totales et directes, que nous avons déjà convenu d'appeler simplement "décompositions" ; on ne suppose donc pas a priori que les facteurs d'une telle décomposition sont des sous-précatégories.

Les monoïdes Ω_n.

Soit M_n le monoïde libre à n générateurs $r_1, r_2, \ldots, r_n$; soit ρ la relation d'équivalence dans M_n engendrée par les relations élémentaires suivantes :

$$(E) \qquad \begin{cases} r_i^2 \sim r_i \ , \text{ avec } i = 1,2,\ldots,n \\ \\ r_i r_j \sim r_j r_i \ , \text{ pour tout couple } (i,j) \text{ tel que } |i-j| \geq 2 \ ; \end{cases}$$

On va montrer que cette relation ρ est compatible avec la composition des mots et définit donc par passage au quotient un monoïde Ω_n ; pour cela, introduisons la forme normale d'un mot $m \in M_n$ compte-tenu des relations élémentaires (E) ; dans la classe de m modulo ρ il existe un mot et un seul, soit $\nu(m)$, ayant la forme suivante, dite normale :

$$\nu(m) = \sigma_{n_k,n'_k} \circ \sigma_{n_{k-1},n'_{k-1}} \circ \ldots \circ \sigma_{n_1,n'_1} \ ,$$

où $n'_{i+1} > n_i$, pour $i = 1,2,\ldots,k-1$,

et où on a posé $\sigma_{n_i n'_i} = r_{n'_i} \circ r_{n'_i - 1} \circ \ldots \circ r_{n_i}$, avec $n'_i \geq n_i$;

en effet, en utilisant les relations de commutation, on peut remplacer m par un mot équivalent $m'_1 = m_1 \circ (\alpha)$ où α est la lettre d'indice le plus petit figurant dans m qui puisse venir en dernière position ; appliquant ce même principe à m_1, on peut remplacer m_1 par un mot équivalent $m'_2 = m_2 \circ (\beta)$, et m est équivalent à $m'_2 \circ (\alpha) = m_2 \circ (\beta) \circ (\alpha)$; trois cas se présentent alors, où l'on convient que l'inégalité "$\beta \leq \alpha$" concerne les indices correspondants des lettres α et β :

(i) $\beta < \alpha$; dans ce cas $\beta = \alpha - 1$, sinon β aurait pu être placé à droite de α, grâce aux relations (E), ce qui contredit la définition de α ;

(ii) $\beta = \alpha$; dans ce cas m est équivalent à $m_2 \circ (\alpha)$ et m_2 a une longueur strictement plus petite que m_1 ;

(iii) $\beta > \alpha$; dans ce cas, on a trouvé le mot ci-dessus désigné par σ_{n_1,n'_1} qui n'est autre que $\sigma_{n_1,n'_1} = (\alpha)$, et la lettre la plus à droite de σ_{n_2,n'_2} est β . Itérant ce procédé, on obtiendra $\sigma_{n_1 n'_1}$ quand, après apparitions des (i) et (ii), le cas (iii) se présentera pour la première fois ; à ce moment, on obtiendra

σ_{n_2,n'_2} en appliquant de nouveau le procédé au mot formé par les lettres restantes à gauche de $\sigma_{n_1n'_1}$; ceci achève de prouver qu'il existe bien dans m mod. ρ une forme normale ; l'unicité est à peu près évidente ; ainsi la relation "$m \sim m'$ modulo ρ" est équivalente à "$\nu(m) = \nu(m')$" ; identifiant $\Omega_n = M_n/\rho$ avec l'ensemble des formes normales, la composition $\star$ dans Ω_n est définie par :

$$\nu(m')\star\nu(m) = \nu(\nu(m')\nu(m)) = \nu(m'm),$$

ce qui montre que ν définit aussi l'homomorphisme canonique de M_n sur Ω_n.

Notons qu'avec n lettres distinctes on peut former exactement 2^{n-1} formes normales de longueur n ne contenant qu'une fois chaque lettre : cet ensemble est en bijection naturelle avec l'ensemble des applications croissantes f de $[n]$ dans $[n]$ satisfaisant $f(1) = 1$, et pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $0 \leq f(i+1)-f(i) \leq 1$; si $\nu = \sigma_{n_kn'_k} \circ \ldots \circ \sigma_{n_1n'_1}$ est l'une des formes normales précédentes, on prouve par récurrence sur N, que $\underbrace{\nu\circ\nu\circ\ldots\circ\nu}_{N \text{ fois}} = \nu^N$ a la forme suivante, dans Ω_n, pour $N \geq k-1$:

$$\nu^N = \overline{[n'_{k-1}]}\cdot\overline{[n'_{k-2}]} \;\ldots\; \overline{[n'_1]}\cdot[n]^{N-k+1}\cdot[n'_{k-1}]\cdot[n'_{k-2}] \;\ldots\; [n'_1] \;,$$

où on a posé $[p] = \sigma_{1,p}$ et $\overline{[p]} = \sigma_{p+1,n}$, et où $n = n'_k$ est le nombre de lettres distinctes ; la composition des mots du membre de droite peut être lue indifféremment dans Ω_n ou dans M_n ; par exemple, pour n=5, $\nu = r_5r_4r_3r_2r_1$, $N \geq 3$, on a :

$$\nu^N = (r_5)(r_3r_4r_5)(r_2r_3r_4r_5)(r_1r_2r_3r_4r_5)^{N-3}(r_1r_2r_3r_4)(r_1r_2)(r_1).$$

Dans [8], nous avons donné une description graphique des éléments de Ω_n et de leur composition, dans un réseau plan ; cette description suggère que certains quotients de M_n, plus généraux que Ω_n, pourraient servir de modèles pour les configurations stables des molécules (la composition dans le monoïde s'interprétant comme une réaction chimique ou une liaison électrostatique, suivie d'un retour à une configuration stable) ; à cet égard, le modèle Ω_n est bien simpliste, quoique suggestif ; les quotients de M_n auxquels nous faisons allusion sont ceux pour lesquels il existe un algorithme conduisant à une forme normale du type décrit ci-dessus.

Opération naturelle des Ω_n sur les chemins composables d'une précatégorie munie d'une décomposition.

Soit G une précatégorie, d une décomposition de G et (B,A) le couple de facteurs correspondant ; dans $\mathbb{C}_{FA}$, Hom $(G,\mathfrak{n})$ s'identifie à l'ensemble des chemins composables $(x_n,\dots,x_1)$ de G ; soit L_n le sous-ensemble de Hom $(G,\mathfrak{n})$ formé des chemins $\hat{x}$ tels que $\hat{x}(\mathfrak{n}) \subset A \cap B$; si $\mathfrak{n} \to \mathfrak{p}$ est surjectif, Hom (G,s) : Hom $(G,\mathfrak{p}) \longrightarrow$ Hom $(G,\mathfrak{n})$ envoie L_p dans L_n ; un chemin $\hat{x}$ de la forme $\hat{y}\circ s$ pour un certain couple $(\hat{y},s)$, où s est surjectif et $\hat{y} \in$ Hom $(G,\mathfrak{p})$, sera dit p-réductible ; l'ensemble des chemins p-réductibles de L_n est noté $L_{n,p}$; les $L_{n,p}$ forment une filtration de L_n.

Soit $r_i \in M_{n-1}$ un générateur du monoïde libre M_{n-1} et soit $\hat{x} = (x_n,\dots,x_1) \in L_n$; r_i opère sur $\hat{x}$ de la façon suivante :

$$r_i\hat{x} = (y_n,\dots,y_1), \text{ où } y_j = x_j \text{ si } j \neq i,\ i+1$$
$$\text{et } (y_{i+1},y_i) = d(x_{i+1}.x_i) \ ;$$

il est clair que $r_i\hat{x} \in L_n$, et de cette façon M_{n-1} opère dans L_n ; d'autre part, quel que soit $\hat{x} \in L_n$, on trouve :

$$r_i^2\hat{x} = r_i\hat{x} \ , \ \forall i = 1,2,\dots,n-1 \quad \text{(à cause de } DP_3)$$

et
$$r_ir_j\hat{x} = r_jr_i\hat{x} \ , \ \forall (i,j) \text{ satisfaisant } |i-j| \geq 2,$$

de sorte que Ω_{n-1} opère dans L_n et cette opération respecte la fibration de L_n par les $L_{n,p}$. Nous pouvons alors poser la :

DEFINITION - Avec les notations précédentes, la décomposition d de G est dite ω-stable si elle satisfait la propriété (P_n) suivante, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{x} \in L_n,\ \forall \mu \in \Omega_{n-1},\ \mu \text{ contenant une fois et une seule chaque lettre} \\ r_i, \text{ il existe un entier N (dépendant a priori de } \mu \text{ et de } \hat{x}) \text{ tel que} \\ \mu^N\hat{x} \text{ soit 2-réductible.} \end{array} \right.$$

La propriété P_1 est trivialement satisfaite, en convenant que $\Omega_0 = \phi$ et P_2 résulte de la définition d'une décomposition ; la propriété P_n n'est consistante qu'à partir de n=3.

PROPOSITION - Pour qu'une décomposition de G soit ω-stable il faut et il suffit que pour tout n et pour tout chemin $\hat{x} \in L_n$, il existe un entier N tel que $[n-1]^N\hat{x}$ soit (n-1)-réductible, où $[n-1] = r_1r_2\dots r_{n-1}$.

▼ Remarquons d'abord qu'on peut remplacer, dans cet énoncé, le mot particulier $[n-1]$ par n'importe quel autre de longueur n-1, où figure chacune des lettres r_i, et supposer d'ailleurs que ce mot est écrit sous forme normale. Les conditions de l'énoncé sont évidemment nécessaires ; montrons qu'elles sont suffisantes ; si $\mu \in \Omega_{n-1}$ est une forme normale où figure une fois et une seule chaque r_i, on a vu qu'il existe un entier k et deux éléments μ_o et $\mu_1 \in \Omega_{n-1}$, tels que :

$$\mu^N = \mu_1.[n-1]^{N-k}.\mu_o \ , \ \forall N \geq k \ ;$$

soit $\hat{x} \in L_n$; s'il existe N' assez grand tel que $[n-1]^{N'}\mu_o\hat{x}$ soit 2-réductible, on en déduit que $\mu^{N'+k}\hat{x} = \mu_1[n-1]^{N'}\mu_o\hat{x}$ est aussi 2-réductible, car l'opération de Ω_{n-1} respecte la filtration de L_n par les $L_{n,p}$; reste donc à prouver que si pour chaque n, il existe N_n tel que $[n-1]^{N_n}\hat{x}$ soit (n-1)-réductible, alors il existe N tel que $[n-1]^N\hat{x}$ soit 2-réductible. Soit donc N_n tel que $[n-1]^{N_n}\hat{x} = (b_n,b_{n-1},\dots,b_2,a_1)$ soit (n-1)-réductible ; il est clair que, comme le suggère la notation, $b_2,b_3,\dots,b_n \in B$ et $a_1 \in A$; quitte à augmenter N_n (d'au plus n-2) on peut supposer que $b_{n-1} = e \in G_o$; dans ce cas, on trouve :

$$[n-1]^{N_n+1}\hat{x} = (b_n,b_{n-2},b_{n-3},\dots,b_2,e,a_1) \ ;$$

soit $i_k : L_{n-1} \longrightarrow L_{n,n-1}$ l'application qui à $(x_{n-1},x_{n-2},\dots,x_k,\dots,x_1)$ fait correspondre $(x_{n-1},x_{n-2},\dots,x_k,e,x_{k-1},\dots,x_1)$, où $e = \alpha(x_k)$ (c'est l'opérateur "face") et soit σ_k l'application partielle de $L_{n,n-1}$ dans L_{n-1} qui à un chemin $(y_n,y_{n-1},\dots,y_k,\dots,y_1)$ satisfaisant $y_k \in G_o$ fait correspondre $(y_n,y_{n-1},\dots,y_{k+1},y_{k-1},\dots,y_1)$; $\sigma_k i_k(\hat{x})$ est toujours défini et égal à $\hat{x}$ et, si $i_k\sigma_k(\hat{y})$ est défini , il est égal encore à $\hat{y}$; on peut écrire :

$$[n-1]^{N_n+1}\hat{x} = i_2\,\sigma_{n-1}([n-1]^{N_n}\hat{x}) \ ;$$

on vérifie facilement qu'en appliquant de nouveau $[n-1]$, on trouve :

$$[n-1]^{N_n+2}\hat{x} = i_3[n-2]\sigma_{n-1}[n-1]^{N_n}\hat{x},$$

car $\sigma_2 i_2$ = Id ; de proche en proche, on trouve, pour $k \leq n-1$:

$$[n-1]^{N_n+k-1}\hat{x} = i_k[n-2]^{k-2}\sigma_{n-1}[n-1]^{N_n}\hat{x} ;$$

lorsque $k = n-1$, l'élément e reviendra à la $(n-1)^{\text{ème}}$ place, et en appliquant σ_{n-1}, il viendra :

$$\sigma_{n-1}[n-1]^{N_n+n-2}\hat{x} = [n-2]^{n-3}\sigma_{n-1}[n-1]^{N_n}\hat{x} ;$$

on établit alors, par récurrence sur p, l'égalité :

$$[n-2]^{p(n-3)}\sigma_{n-1}[n-1]^{N_n}\hat{x} = \sigma_{n-1}[n-1]^{N_n+p(n-2)}\hat{x} ;$$

l'hypothèse relative aux chemins de longueur n-1 permet d'affirmer qu'en choisissant p assez grand (de sorte que $p(n-3) \geq N_{n-1}$) le chemin $[n-2]^{p(n-3)}\sigma_{n-1}[n-1]^{N_n}\hat{x}$ sera (n-2)-réductible, et donc le chemin $[n-1]^{N_n+p(n-2)}\hat{x}$ sera lui-même (n-2)-réductible ; en poursuivant, on trouvera bien un entier N assez grand tel que $[n-1]^{N}\hat{x}$ soit 2-réductible ; cet entier N ne dépend évidemment que de n et de $\hat{x}$. ▲

Dans les énoncés de la définition et de la proposition on peut remplacer L_n par Hom $(G,\mathfrak{n})$, car lorsqu'on a appliqué une seule fois un élément $\mu \in \Omega_{n-1}$ contenant une seule fois chaque lettre à un chemin quelconque $\hat{x}$, on obtient un chemin $\hat{x}' \in L_n$.

Il existe des notions "voisines" de l'ω-stabilité, mais qui ne lui sont pas équivalentes ; par exemple celle-ci : "pour tout $\hat{x} \in L_n$, il existe un élément $\mu \in \Omega_{n-1}$ tel que $\mu\hat{x}$ soit 2-réductible" ; l'ω-stabilité est une notion plus forte. Nous démontrerons au chapître 5 que les décompositions additives des entiers sont ω-stables.

4.3. DÉCOMPOSITIONS DES PRÉCATÉGORIES B.O. (CAS D'INSTABILITÉ).

Soit G une précatégorie ; disons qu'une partie X de G est un <u>facteur direct</u> dans G s'il existe une décomposition de G, dont X soit un des facteurs, l'autre s'appelant alors un supplémentaire de X. Pour les précatégories b.o. nous avons la :

PROPOSITION 1 - Un facteur direct d'une précatégorie b.o. admet un supplémentaire au plus, de chaque côté ; il peut en avoir un de chaque côté.

Soit G une précatégorie b.o. et soient (Y,X) et (Z,X) des décompositions ; supposons $Y-Z \neq \phi$; soit y_0 le plus petit élément de $Y-Z$; il existe un unique $(z,x) \in Z*X$ et un unique $(y,x') \in Y*X$ tels que $y_0 = z.x$ et $z = y.x'$; alors $y_0 = y.x'.x$ et $y \leq y_0$, car G est b.o. ; on a alors les implications contradictoires suivantes :

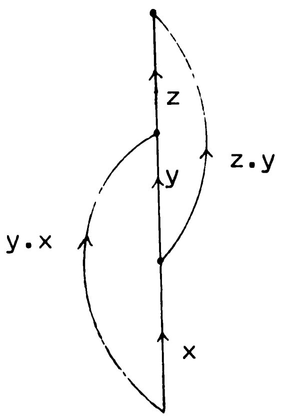
$$y \neq y_0 \Rightarrow y \in Z \Rightarrow x' \in G_0 \text{ et } z = y \Rightarrow x \in G_0 \text{ et } z = y_0 = y$$

$$y = y_0 \Rightarrow x'x \in G_0 \Rightarrow x = x' \in G_0 \Rightarrow y_0 = z \in Z \; ;$$

donc $Y-Z = \phi$ et de même $Z-Y = \phi$, donc $Y=Z$.

Voici un exemple de facteur direct Y admettant deux supplémentaires (un à gauche et un à droite) distincts. Soit G la précatégorie ayant trois irréductibles propres x,y,z, les seuls composés non triviaux étant y.x et z.y (cf. la figure) ;

(G)



prenons

$Y = G_0 \cup \{y\}$

$X = G_0 \cup \{x,z,z.y\}$

$Z = G_0 \cup \{z,x,y.x\}$;

alors (Y,X) et (Z,Y) sont des décompositions directes de G, qui est b.o., et $Z \neq X$. ▲

Soit toujours G une précatégorie et (B,A) une décomposition de G.

DEFINITION 1 - On appelle noyaux d'instabilité de (B,A) les sous-ensembles N_A et N_B de G définis par :

$$N_A = \{x \in A | \exists x' \in A \ , \ \exists <x.x' \in B>\}$$

$$N_B = \{x \in B | \exists x' \in B \ , \ \exists <x'.x \in A>\}.$$

DEFINITION 2 - On dit qu'une décomposition (B,A) est instable lorsque ses noyaux d'instabilité satisfont $N_A = A$ et $N_B = B$.

Remarques.

1) Le sens des composés intervenant dans la définition de N_A et N_B n'est pas arbitraire, comme on le verra plus loin ; on aurait pu définir des noyaux à gauche, à droite et des deux côtés à la fois, mais nous n'aurons besoin ici que de ceux définis plus haut ; de plus, ces distinctions sont sans objet dans le cas commutatif (cf. le cas des entiers).

2) On a toujours $G_o \subset N_A \subset A$ et $G_o \subset N_B \subset B$, et les noyaux mesurent en partie les défauts de stabilité des facteurs A et B ; même si $N_A = N_B = G_o$, cela n'entraîne pas pour autant la stabilité de A et de B dans G.

3) Les propriétés d'ω-stabilité et d'instabilité n'ont pas de rapport direct : on a vu qu'une décomposition stable était toujours ω-stable et on verra plus loin que certaines décompositions additives des entiers sont instables, bien que toujours ω-stables.

La recherche des décompositions multiplicatives des entiers est équivalente à celle des décompositions additives des $\mathbb{N}^k$, pour $k \geq 1$; c'est ce qui nous a conduit au problème suivant : quand peut-on affirmer qu'une décomposition d'un produit de précatégories G_i est un produit de décompositions des G_i ? Nous avons une réponse partielle à cette question (cf. la proposition 2 qui suit) dans le cas des précatégories b.o., ce qui oblige à se restreindre à des produits finis, en vertu de la proposition 3 de 3.4 ; comme application, nous verrons qu'on obtient ainsi des conditions nécessaires pour qu'une décomposition de $\mathbb{N}^k$, avec $k \geq 2$, soit indécomposable en produit de décompositions des $\mathbb{N}^{k'}$ avec $k' < k$.

Soit donc $G = G_n \times G_{n-1} \times \ldots \times G_1$ un produit de n précatégories b.o. et (B,A) une décomposition de G ; nous posons :

$$\widehat{G}_i = \{x \in G \mid x_j \in G_{j,o} \text{ pour } j \neq i\}$$

$$B_i = p_i(B \cap \widehat{G}_i),\ A_i = p_i(A \cap \widehat{G}_i)$$

$$B' = \prod_{i=1}^{n} B_i\ ,\ A' = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

$$\widehat{B}_i = p_i^{-1}(B_i) \cap \widehat{G}_i \text{ et } \widehat{A}_i = p_i^{-1}(A_i) \cap \widehat{G}_i\ ;$$

pour $x \in \widehat{G}_i$, on voit que $\underline{b}(x)$ et $\underline{a}(x) \in \widehat{G}_i$, car les précatégories G_i sont sans inverses ; donc la décomposition (B,A) de G induit des décompositions $(B \cap \widehat{G}_i, A \cap \widehat{G}_i)$ des sous-précatégories $\widehat{G}_i$ de G ; si, lorsque x parcourt $\widehat{G}_i$, $\underline{a}_i(x) = p_i \circ \underline{a}(x)$ et $\underline{b}_i(x) = p_i \circ \underline{b}(x)$ ne dépendent que de $x_i = p_i(x)$, alors (B_i,A_i) est une décomposition de G_i et $\widehat{B}_i = B \cap \widehat{G}_i$, $\widehat{A}_i = A \cap \widehat{G}_i$; avec ces notations et sous cette hypothèse, nous pouvons énoncer la

<u>PROPOSITION 2</u> - Si les décompositions (B_i,A_i) sont instables, sauf peut-être une, alors $(B',A') = (B,A)$; ceci signifie que (B,A) est le produit des décompositions facteurs (B_i,A_i).

▼ On peut se restreindre au cas d'un produit $G = G_2 \times G_1$ de deux précatégories b.o., car un produit de décompositions instables est encore instable et le résultat s'établit alors par récurrence sur le nombre des G_i.

Commençons par une remarque utile concernant le choix du bon ordre sur G ; pour une précatégorie b.o. H quelconque on peut toujours supposer que le bon ordre a été choisi de sorte que toute unité soit plus petite que les éléments non unités ; en effet, si $<$ est un bon ordre faisant de H une précatégorie b.o., on définit la relation $<'$ suivante dans H :

$$x <' y \text{ si et seulement si } \begin{cases} \text{ou bien } x < y, \text{ avec } y \notin G_o \text{ ou } y,x \in G_o, \\ \text{ou bien } x > y, \text{ avec } y \notin G_o \text{ et } x \in G_o, \end{cases}$$

ces deux cas s'excluant mutuellement ; on montre facilement que $<'$ est encore un bon ordre faisant de H une précatégorie b.o. ; choisissant pour G_1 et G_2 de tels bons ordres et pour G l'ordre lexicographique (c'est celui de la proposition 3 de 3.4), on est assuré que dans G les inégalités strictes suivantes sont satisfaites :

$$\forall e_i \in G_{i,o}\ ,\ \forall x_i \in G_i - G_{i,o}\ ,\ i=1,2\quad (x_2,e_1) < (e_2,x_1) < (x_2,x_1)\ .$$

Pour toute partie E de G, notons $E_x = \{y \in E | y < x\}$; il est clair que pour toute unité $e \in G_o$, les égalités suivantes sont satisfaites : $A_e = A'_e = B_e = B'_e = G_e$; supposons prouvées les égalités $A_x = A'_x$ et $B_x = B'_x$, pour un $x \notin G_o$ et soit y le successeur immédiat de x dans G ; si $x \notin A \cup B$, on a $x = b.a$ avec $(b,a) \in B \times A$, et b et a < x strictement ; d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $(b,a) \in B' \times A'$ et donc $x \notin A' \cup B'$ et les égalités $A_y = A'_y$, $B_y = B'_y$ sont encore vraies puisque $A_y = A'_y = A_x$ et $B_y = B'_y = B_x$; supposons maintenant que $x \in A \cup B$; il existe un unique couple $(b',a') \in B' * A'$ tel que $x = b'.a'$; si les inégalités $b' < x$ et $a' < x$ étaient strictes on en déduirait que $(b',a') \in B * A$, mais ceci contredit le fait que $x \in A \cup B$ (unicité de décomposition) ; alors x = a' ou b', c'est-à-dire que $x \in A' \cup B'$; supposons $x \in A$; si $x \in A'$ aussi, on trouve $A_y = A'_y = A_x \cup \{x\}$ et $B_y = B'_y = A_y$; montrons qu'on ne peut pas avoir $x \in A \cap B'$; pour cela, utilisons le fait qu'une des décompositions facteurs (B_i,A_i) est instable ; supposons que ce soit (B_1,A_1) ; d'abord $x_1 \notin G_{1,o}$ si non $x = (x_2,x_1) \in \widehat{B}_2 = B \cap \widehat{G}_2$ et $x \in A \cap B$ serait une unité, contrairement à l'hypothèse ; il existe x'_1 $(\notin G_{1,o})$ tel que $x'_1 \in B_1$, $x'_1.x_1$ est défini et élément de A_1 ; considérons les quatre éléments suivants de G :

$$x = (x_2,x_1)\ ;\ x' = (\beta(x_2),x'_1)\ ;\ y = (\alpha(x_2),x'_1.x_1)\ ;\ y' = (x_2,\beta(x'_1))$$

on voit que $x'.x = y'.y = (x_2,x'_1.x_1)$; compte tenu du choix du bon ordre de G, on a : $x \in A$, $x' \in B$, $y \in A$, $y' \in B$ et ceci contredit l'unicité de décomposition selon (B,A) ; on montre de même que si $x \in B$, alors $x \in B'$ aussi, et ceci achève de prouver que dans tous les cas $A_y = A'_y$ et $B_y = B'_y$; on a ainsi établi par récurrence transfinie dans G, que A = A' et B = B'. ▲

Remarques.

1) L'hypothèse d'instabilité des décompositions facteurs (sauf peut-être une) est essentielle comme le prouvent de nombreux contre exemples ; voici "le plus simple" dans $\mathbb{N}^2$: posons $A_o = \{0,1\}$ et $B_o = 2\mathbb{N}$ (division euclidienne par 2) ; il

existe une infinité (non dénombrable) de décompositions (B,A) de $\mathbb{N}^2$ telles que $(B_1,A_1) = (B_2,A_2) = (B_o,A_o)$, et donc (B_o^2,A_o^2) n'est pas la seule possible !

2) On montrera que les décompositions instables (B,A) de $\mathbb{N}$ sont exactement celles pour lesquelles $|B| = |A| = \infty$.

3) Le résultat pour un produit $G_1 \times G_2$ subsiste, si, au lieu de l'instabilité d'une des décompositions facteurs, on suppose que $N_{B_1} = B_1$ et $N_{A_2} = A_2$, ou encore que $N_{A_1} = A_1$ et $N_{B_2} = B_2$.

4.4. REMARQUES (dans le cas d'un nombre de facteurs non fixé à l'avance).

Soit G un graphe multiplicatif ; dans l'ensemble $P_o(G)$ des sous-graphes multiplicatifs de G, on définit la loi de composition $\odot$ suivante :

> B $\odot$ A est défini si et seulement si $A_o = B_o$ et si l'application de composition définit une bijection de $B * A$ sur B.A ;

dans la catégorie $\mathbb{G}_M$ des graphes multiplicatifs, $P_o(G)$ est une somme de graphes multiplicatifs n'ayant qu'une unité. Si G est une précatégorie, $P_o(G)$ est encore une précatégorie : c'est l'objet naturel à considérer lorsqu'on étudie les décompositions de G en un nombre de facteurs non prescrit à l'avance. Pour des types particuliers de facteurs (précatégories, catégories, etc...) il convient de considérer des sous-précatégories de $P_o(G)$: par exemple si G est un groupe abélien (ou un module) on s'intéresse à la sous-précatégorie S de $P_o(G)$ dont les éléments sont les sous-groupes (ou les sous-modules) de G. Si G est une précatégorie b.o., alors la loi $\odot$ est simplifiable (cf. la proposition 1 de 4.3). L'application $G \rightsquigarrow P_o(G)$ ne s'étend pas en un foncteur dans $\mathbb{G}_{FA}$. Remarquons enfin que se donner une décomposition partielle directe revient exactement à se donner un couple composable (B',A') pour la loi $\odot$ de $P_o(G)$. Dans l'étude du cas des entiers, nous apportons un certain nombre de précisions concernant $P_o(\mathbb{N})$.

<u>Composés infinis.</u>

Cette notion n'étant définie qu'à inversible près, elle n'aura d'intérêt réel que dans le cas des précatégories sans inverses (par ex. : les précatégories b.o.) ; nous la présentons cependant pour une précatégorie a priori quelconque.

Soit G une précatégorie et $D_g(G)$ sa catégorie des fractions à gauche ; soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'éléments de G telle que $X_n.X_{n-1}\dots X_o$ soit défini dans G quel que soit n ; à $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspond un foncteur $\hat{X} : \hat{\mathbb{N}} \longrightarrow D_g(G)$, où $\hat{\mathbb{N}}$ désigne toujours la catégorie associée à l'ordre usuel de $\mathbb{N}$: $\hat{X}(n)$ est l'objet $X_n\dots X_o$ et $\hat{X}(n+1,n) = (\hat{X}(n+1), X_{n+1}, \hat{X}(n))$; supposons que $\hat{X}$ ait une limite inductive naturalisée $(X,(y_n)_{n \in \mathbb{N}})$ où $y_n = (X, Y_n, \hat{X}(n))$; alors X peut être appelé "produit infini" des X_n dans G ; il n'est défini qu'à inversible près ; on posera $X = \prod_0^\infty X_n$; pour l'associativité mettant en jeu un composé infini, on doit alors distinguer trois genres de composés : soit $X_o, X_1, \dots, X_n, \dots$ une suite infinie d'éléments de G ; peuvent être définis :

1) le produit infini $\prod_n^\infty Y_p$ où $\left|\begin{array}{ll} Y_p = X_p & \text{pour } p > n \\ Y_n = X_n\dots X_o & \end{array}\right.$ (et)

2) le produit fini $(\prod_{n+1}^\infty X_p).X_n\dots X_1.X_o$

3) le produit infini $\prod_0^\infty X_n$;

l'associativité s'exprimera en disant : si l'un des composés du type 1) ou 3) est défini, les deux le sont et sont égaux ; si le composé du type 2) est défini, les deux autres le sont et sont égaux. A partir de là, on peut donner un sens à l'associativité, dans le cas général, mettant en jeu des composés infinis ; intuitivement, cela correspond à pouvoir déplacer vers la droite toute parenthèse située à droite d'un composé infini.

On peut assouplir la définition de composé infini en la relativisant ; il est parfois nécessaire de le faire ; par exemple, si G est l'ensemble des sous-groupes d'un groupe ábélien M, les sommes directes quelconques de sous-groupes de M ne sont pas des limites inductives dans $D_g(G)$; si l'on veut les regarder encore comme des composés dans G, il convient d'introduire le foncteur d'oubli de $D_g(G)$ vers $\mathcal{A}b$ (catégorie des groupes abéliens), qui "oublie le facteur supplémentaire". D'une façon générale, si $\varphi : D_g(G) \longrightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur tel que $\varphi|_G$ soit une bijection et que φ reflète les inversibles, on pourra définir le produit infini $\prod_{0\,\varphi}^\infty X_n$ relatif à φ comme étant égal à $\varphi^{-1}(L)$, où L est une limite inductive de $\varphi.\hat{X}$.

CHAPITRE 5

DÉCOMPOSITIONS DES ENTIERS

5.1. L'ENSEMBLE ORDONNÉ $P_0(\mathbb{N})$.

Ici, nous excluons de $P_0(\mathbb{N})$ l'élément ϕ qui est sans intérêt ; donc $P_0(\mathbb{N}) = \{X \subset \mathbb{N} | 0 \in X\}$; la loi de composition dans $P_0(\mathbb{N})$, définie en 4.4 est notée additivement :

> $X \oplus Y$ est défini si et seulement si l'addition définit une bijection de $X \times Y$ sur $X + Y$;

muni de cette loi, $P_0(\mathbb{N})$ est une précatégorie commutative, simplifiable, à une seule unité, soit $\{0\}$; la catégorie $D_g(P_0(\mathbb{N}))$ est un ordre ; si X est facteur direct dans B, il n'a qu'un supplémentaire possible, soit A, et on écrira indifféremment :

- $B = A \oplus X$, donnant ainsi la préférence à $\oplus$
- $A \xrightarrow{X} B$, donnant ainsi la préférence à l'ordre ;

$P_0(\mathbb{N})$ a un plus petit élément : $\{0\}$; par contre, $P_0(\mathbb{N})$ n'a pas de plus grand élément ; $\mathbb{N}$ est maximal, mais il existe une infinité (non dénombrable) d'éléments maximaux distincts.

Irréductibles.

Il s'agit des irréductibles propres pour la loi $\oplus$; ce sont aussi les atomes pour la relation d'ordre. Il est clair que tout A de cardinal premier est irréductible ; mais cette condition n'est pas nécessaire ; pour chaque entier n, il existe une infinité d'atomes A de cardinal n ; voici deux types d'exemples :

$$N_n = \{0, N, N+1, N+2, \ldots, N+n-2\} \ , \quad \forall N > n$$

$$A = \{0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}\} \ , \text{ avec } a_i + a_{i+1} < a_{i+2} \ , \ \forall i \geq 1.$$

Désignons par S_n l'ensemble $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$; S_n est irréductible si et seulement si n est premier ; en effet si n n'est pas premier on peut décrire explicitement toutes ses décompositions : soit $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition de n en facteurs premiers distincts ; posons $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ et soit $\tilde{a} = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$ un arrangement des facteurs premiers p_i comptés avec leur multiplicité, i.e. q_j est un des p_i et p_i intervient exactement α_i fois dans $\tilde{a}$; posons encore $d_j = n/q_1q_2\ldots q_j$; on fait correspondre à $\tilde{a}$ la décomposition suivante de S_n en facteurs irréductibles :

$$S_n = d_1 S_{p_{\mu(1)}} \oplus d_2 S_{p_{\mu(2)}} \oplus \ldots \oplus d_j S_{p_{\mu(j)}} \oplus \ldots \oplus d_m S_{p_{\mu(m)}} ,$$

où $\mu(j)$ est l'unique entier compris entre 1 et k tel que $q_j = p_{\mu(j)}$; on démontre que ce sont les seules décompositions possibles de S_n en facteurs irréductibles ; il y en a donc autant que d'arrangements $\tilde{a}$ des facteurs premiers de n; par exemple, pour n = 12, il y a les trois arrangements (2,2,3), (2,3,2) et (3,2,2) auxquels correspondent respectivement les trois décompositions de S_{12} suivantes :

$$S_{12} = 6S_2 \oplus 3S_2 \oplus S_3 = 6S_2 \oplus 2S_3 \oplus S_2 = 4S_3 \oplus 2S_2 \oplus S_2 .$$

Pour tout A fini il existe des décompositions en facteurs irréductibles ; il n'y a pas unicité comme le montre l'exemple précédent ; on peut être tenté de croire cependant que, modulo une division, il y a unicité (pour S_{12}, on trouve toujours deux fois S_2 et une fois S_3 !) ; mais ceci est faux comme le montre l'exemple suivant, dans lequel les deux décompositions en facteurs irréductibles de A sont "incomparables" :

$$A = \{0,1,2,3,4,6,7,8,9,10\} = S_{11} - \{5\} ;$$

$$A = \{0,1,2,3,4\} \oplus \{0,6\} = \{0,1,4,7,8\} \oplus \{0,2\} ;$$

Pour A infini, il convient d'introduire les composés infinis dont on a parlé en <u>4.4</u> ; nous y reviendrons plus loin ; donnons seulement ici des exemples d'irréductibles infinis ; mieux encore, voici une infinité (non dénombrable) d'irréductibles qui ne sont diviseurs propres d'aucun autre élément (i.e. : atomes isolés, du point de vue de l'ordre) : soit $(p_0,p_1,\ldots)$ une suite infinie d'entiers telle que :

$$p_0 = 1 \quad \text{et} \quad p_{k+1} > p_k + k \ , \ \forall k \geq 0 ;$$

alors $\quad A = \{p_k + j \mid 0 \leq j \leq k\}$ est un atome isolé.

Caractérisation des éléments maximaux.

Soit $A \in p_0(\mathbb{N})$; définissons A_d comme étant l'ensemble des différences $a'-a \geq 0$ d'éléments de A ; alors A est maximal si et seulement si $A_d = \mathbb{N}$.

Composés infinis-Limites.

Comme $p_0(\mathbb{N})$ est ordonné, on parle en termes de sup. ou de inf. ; remarquons d'abord que même si $A \oplus B$ est défini (c'est un majorant commun de A et de B) il n'en résulte pas que sup (A,B) existe ; prenons, par exemple, $A = \{0,2,4\}$ et $B = \{0,3\}$; alors $A \oplus B = \{0,2,3,4,5,7\}$; supposons que S = sup (A,B) existe ; alors S doit être facteur direct dans $A \oplus B$, donc $|S|$ divise 6 ; mais $|S| = 6$ car A et B sont facteurs directs dans S ; donc $S = A \oplus B$; or ceci n'est pas possible car S n'est pas facteur direct de S_6, qui est un majorant de A et B !
Inversement le sup. peut exister sans que la somme soit définie ; l'exemple le plus simple étant : sup (A,A) = A tandis que $A \oplus A$ n'est pas défini si $A \neq \{0\}$!
Cependant, il y a un lien entre $A \oplus B$ et sup. (A,B), qu'on a remarqué dans l'exemple ci-dessus :

PROPOSITION 1 - Si $A \oplus B$ et sup (A,B) existent, ils sont égaux.

▼ En effet S = sup (A,B) doit être facteur direct dans $A \oplus B$; soit X tel que $S \oplus X = A \oplus B$; soient aussi A' et B' tels que $A \oplus A' = B \oplus B' = S$; $X \oplus A'$ est défini et égal à B, car $\oplus$ est simplifiable ; de même $X \oplus B'$ est défini et égal à A ; alors X est contenu dans $A \cap B = \{0\}$, donc $S = A \oplus B$.▲

Remarques.

On pourrait croire que si A et B ont un majorant commun et si $A \cap B = \{0\}$, alors $A \oplus B$ est défini ; il n'en est rien comme le prouve le contre-exemple suivant, qui est sans doute le "plus simple" :

$$A = \{0,3\} \quad \text{et} \quad B = \{0,1,4,5\}$$

A et B sont tous deux facteurs directs dans S_{24} et pourtant $A \oplus B$ n'est pas défini, sinon 4 aurait deux décompositions. Remarquons ici que sup (A,B) n'existe pas non plus ; en effet, A et B sont aussi facteurs directs dans $S_{17} - \{8\}$:

$$\{0,3\} \oplus \{0,1,2,6,7,11,12,13\} = \{0,1,4,5\} \oplus \{0,2,9,11\}$$

si S = sup (A,B) existait, $|S|$ serait un diviseur de $|S_{17} - \{8\}| = 16$; mais il est facile de voir que S doit nécessairement contenir $\{0,1,2,3,4,5,6,7,9,10\}$ par exemple ; la seule possibilité serait $S = S_{17} - \{8\}$; ceci est absurde, car S doit être facteur direct dans S_{24} et 16 n'est pas diviseur de 24.

On pourrait croire alors que $A \oplus B$ n'existe pas justement parce que sup (A,B) n'existe pas ; il n'en est rien comme le prouve le contre-exemple suivant, qui est sans doute le "plus simple" :

$$A_1 = \{0,3,6\} \text{ et } B_1 = \{0,1,4,5,8,9\} ;$$

on a bien : $A_1 \cap B_1 = \{0\}$; $A_1 \oplus B_1$ n'est pas défini, sinon 4 aurait deux décompositions distinctes (7,8 et 11 aussi) ; par contre sup $(A_1,B_1) = S_{36}$ (on montre, par forcing, que le sup. doit contenir S_{36} et comme A_1 et B_1 sont facteurs directs dans S_{36}, le sup. ne peut être que S_{36} ; toujours par forcing, on établit que tout majorant commun de A_1 et B_1 est de la forme $S_{36} \oplus X$ où $X = \{x_0,x_1,x_2,\ldots\}$ est fini ou non et satisfait $x_0 = 0$ et $x_{k+1} \geq x_k + 36$, $\forall k \geq 0$).

Terminons ces remarques en notant qu'il existe bien des couples (A,B) tel que $A \oplus B$ soit défini et égal à sup. (A,B).

PROPOSITION 2 - Les composés infinis existent dans $P_0(\mathbb{N})$ et la loi $\oplus$ est encore associative lorsqu'on introduit des composés infinis.

▼ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $P_0(\mathbb{N})$ telle que $B_n = A_0 \oplus A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ existe pour tout n ; pour tout $I \subset \mathbb{N}$, posons $\sum_{i\in I} A_i = \{x = \sum_{i_k} x_{i_k}$, avec $i_k \in I$ et $x_{i_k} \in A_{i_k}\}$; si I est fini, on voit facilement que $\bigoplus_{i\in I} A_i$ est défini et égal à $\sum_{i\in I} A_i$; dans tous les cas, l'écriture d'un élément de $\sum_{i\in I} A_i$ sous forme $\sum_{i\in I} x_i$, avec $x_i \in A_i$, est unique d'après l'existence des B_n (prendre n assez grand) ; il est clair que $\bigcup_0^\infty B_n = \sum_0^\infty A_n$ et que B_n est facteur direct dans $\bigcup_0^\infty B_n$ avec pour supplémentaire $\sum_{n'>n} A_{n'}$; reste à prouver que $\sum_0^\infty A_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} (B_n)$; supposons donc que chaque B_n soit facteur direct dans un certain C, soit $C = B_n \oplus C_n$; alors $\bigcup_0^\infty B_n$ est encore facteur direct dans C et son supplémentaire est l'ensemble $\bigcap_0^\infty C_n$; en effet, il est clair que $(\bigcup_0^\infty B_n) + (\bigcap_0^\infty C_n) \subset C$; d'autre part, si $x \in C$, il existe pour tout n un couple $(b_n,c_n) \in B_n \times C_n$ unique tel que $x = b_n + c_n$; comme le nombre de décompositions additives de x est fini et que les C_n forment une suite décroissante, on voit qu'il existe un entier n_x pour lequel $c_{n_x} \in \bigcap_0^\infty C_n$ et ceci prouve que C est bien la somme de $\bigcup_0^\infty B_n$ et de $\bigcap_0^\infty C_n$; cette somme est directe parce que les sommes $B_n + C_n$ le sont. L'associativité est immédiate ; ajoutons qu'ici la parenthèse située à droite d'un composé infini peut se déplacer à gauche comme à droite. ▲

Comme application de cette proposition, énonçons la :

PROPOSITION 3 - Tout élément $A \in P_0(\mathbb{N})$ est facteur direct dans un élément $\overline{A}$ maximal, au moins.

▼ En effet, soit d_1 le plus petit élément de $\mathbb{N} - A_d$ (si $A_d = \mathbb{N}$, A est lui-même maximal) ; alors $A_1 = A \oplus \{0,d_1\}$ est défini ; supposons A_n défini et définissons $A_{n+1} = A_n \oplus \{0,d_{n+1}\}$ où d_{n+1} est le plus petit élément de $\mathbb{N} - A_{n,d}$ (supposé exister) ; si pour un certain n on trouve $A_{n,d} = \mathbb{N}$, alors A_n est maximal et A est facteur direct dans A_n ; si au contraire le processus ne s'arrête pas, on passe à la limite ; d'après la proposition 2, A est facteur direct dans $\overline{A} = \bigcup_n A_n = A \oplus \sum_1^\infty \{0,d_n\} = A \oplus (\bigoplus_1^\infty \{0,d_n\})$; on remarque alors que la suite des d_n est strictement croissante ; supposons que $\overline{A}$ soit facteur direct dans B, soit $B = \overline{A} \oplus X$ avec $X \neq \{0\}$; soit $x \in X$, $x \neq 0$; il existe un entier n tel que $d_n \leq x < d_{n+1}$; par définition de d_{n+1}, $x \notin \mathbb{N} - A_{n,d}$, donc $x \in A_{n,d}$, c'est-à-dire que $x = a'_n - a_n$, avec a_n et $a'_n \in A_n$; on trouve alors $x + a_n = a'_n$; or ceci est impossible, car a'_n aurait deux décompositions distinctes relativement à $B = (\Sigma A_n) \oplus X$; donc $X = \{0\}$ et $\overline{A}$ est bien maximal. ▲

Remarques.

Même si A est infini, il se peut que l'élément $\overline{A}$ construit par le processus ci-dessus ne soit effectivement obtenu qu'au bout d'une infinité d'opérations $\oplus \{0,d_n\}$; par exemple $A = \{0,1,2,6,\ldots,n!,\ldots\}$ et, dans ce cas $\overline{A}$ n'est pas égal à $\mathbb{N}$ ($7 \notin \overline{A}$) et d'ailleurs A ne peut être facteur direct dans $\mathbb{N}$; nous n'avons pas de critère permettant de caractériser tous les éléments maximaux supérieurs à un élément A donné ; remarquons simplement que deux éléments $\overline{A}_1$ et $\overline{A}_2$ peuvent être maximaux, avec $\overline{A}_1 \subset \overline{A}_2$, et contenir un facteur direct commun A infini ; voici un exemple : $\overline{A}_1 = \{0,p,p+1,p+2,\ldots\}$ avec $p > 1$ et $\overline{A}_2 = \mathbb{N}$; l'élément $A = p\mathbb{N}$ est facteur direct dans $\overline{A}_1$ et $\overline{A}_2$ qui sont tous deux maximaux ; on peut même construire des exemples avec $\overline{A}_2 - \overline{A}_1$ infini ! Notons enfin que tout $A \in P_0(\mathbb{N})$ dont le complémentaire dans $\mathbb{N}$ est fini est maximal. Le problème des décompositions de $\mathbb{N}$ est exactement celui qui consiste à trouver tous les A tels que $\overline{A} = \mathbb{N}$; c'est la recherche des prédécesseurs de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble ordonné $P_0(\mathbb{N})$; la méthode utilisée est applicable, avec des modifications évidentes, à toute partie A de $\mathbb{N}$, même infinie : elle consiste en un forcing mettant en jeu l'addition, l'ordre et l'unicité de décomposition ; en celà elle diffère de la méthode de N.G. de BRUIJN, qui utilise explicitement la division euclidienne ; nous utilisons aussi la division euclidienne, mais en tant qu'outil simplificateur et non en tant qu'argument essentiel.

5.2. LES DÉCOMPOSITIONS DIRECTES DE $\mathbb{N}$.

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ une suite de nombres entiers ≥ 2, limitée ou non ; posons $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2.a_1, \ldots, b_{n+1} = a_{n+1}.a_n \ldots a_1 = a_{n+1}.b_n$, etc... ; $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ est appelée "base généralisée" (les bases ordinaires correspondent à $a_n = c^{te}$) ; tout nombre entier s'écrit de façon unique dans B sous la forme suivante :

$$x = \sum_n x_n\, b_n \;,\text{ avec } 0 \leq x_n < a_{n+1} \;;$$

si la suite des a_n est limitée à a_s, on pose par convention $a_{s+1} = \infty$; soit $(B_k)_{k\in K}$ une partition de B telle que $b_n \in B_k \Rightarrow b_{n+1} \notin B_k$; alors, il correspond à cette partition de B la décomposition directe de $\mathbb{N}$ suivante :

$$\mathbb{N} = \bigoplus_{k\in K} A_k \;,\text{ où } A_k = \{x = \sum_n x_n\, b_n \mid x_n = 0 \text{ si } b_n \notin B_k\}.$$

<u>PROPOSITION 1</u>. Toute décomposition directe de $\mathbb{N}$ est du type décrit ci-dessus.

▼ Soit $\mathbb{N} = \bigoplus_{k\in K} A_k$ une telle décomposition ; il existe $k_o \in K$ tel que $1 \in A_{k_o}$; si $\mathbb{N} = A_{k_o}$, il suffit de prendre $a_1 = \infty$; supposons donc $\mathbb{N} - A_{k_o} \neq \phi$ et soit $b_1 = \inf(\mathbb{N} - A_{k_o})$; supposons définie la suite des b_n jusqu'à b_m, avec les propriétés suivantes :

i) $\forall p \leq m$, $b_p \in \bigcup_k A_k$ et $b_p / b_{p-1} = a_p$ est un entier ≥ 2 $(b_o = 1)$,

ii) $\forall p < m$, $b_p \in A_k \Rightarrow b_{p+1} \notin A_k$,

iii) $A_k \cap [0, b_n[\; = \{x = \sum_h x_h\, b_h \mid h < m,\; b_h \in A_k,\; 0 \leq x_h < a_{h+1}\}$;

nous posons $M_k = \{p < m \mid b_p \in A_k\}$; soit $j \in K$ l'indice pour lequel $b_m \in A_j$; tout $x < b_m$ s'écrit de façon unique $\sum_{h<m} x_h\, b_h$, avec $x_h < a_{h+1}$, de sorte que les composantes $x_{[k]}$ de x selon la décomposition donnée sont les suivantes :

$$x_{[k]} = \sum_{h\in M_k} x_h\, b_h \;;$$

pour tout $k \in K$, nous posons $c_k = \sum_{h\in M_k} (a_{h+1} - 1)\, b_h$; $c_k \in A_k$ d'après iii) et puisque $\sum_k c_k = b_m-1$, l'unicité de décomposition selon les A_k prouve que $c_k = (b_m-1)_{[k]}$.

$\boxed{1}$ Prouvons d'abord que les successeurs immédiats de b_m dans A_j sont tous les nombres de la forme $b_m + \lambda$, avec $\lambda \in A_j$ et $\lambda \leq c_j$; supposons ceci établi $\forall\lambda < \mu \leq c_j$ avec λ et $\mu \in A_j$ et montrons que $b_m + \mu \in A_j$; pour $x < \mu$, on voit que

$$(b_m+x)_{[k]} = x_{[k]} \text{ si } k \neq j$$

$$(b_m+x)_{[j]} = b_m + x_{[j]}, \text{ car } b_m + x_{[j]} < b_m + \mu \text{ est élément de } A_j \text{ ;}$$

ceci prouve que le successeur de c_k dans A_k est nécessairement plus grand ou égal à $b_m + \mu$, pour $k \neq j$; supposons $b_m + \mu \in A_k$, avec $k \neq j$; soit $\mu = \sum_{h \in M_j} \mu_h b_h$, avec $0 < \mu_h < a_{h+1}$; posons alors $\overline{\mu} = \sum_{h \in M_j} \overline{\mu}_h b_h$, où $\overline{\mu}_h$ est tel que que $\mu_h + \overline{\mu}_h = a_{h+1}$; l'hypothèse (ii) entraîne alors que $\mu + \overline{\mu} = \sum_{h \in M_j} b_{h+1}$ a une composante nulle dans A_j, de sorte que l'élément $b_m + \mu + \overline{\mu}$ apparaît avec deux décompositions possibles :

$$\approx (b_m + \mu + \overline{\mu})_{[k]} = b_m + \mu \text{ , } (b_m+\mu+\overline{\mu})_{[j]} = \overline{\mu}$$

$$\approx (b_m + \mu + \overline{\mu})_{[k']} = (\mu + \overline{\mu})_{[k']} \text{ pour } k' \neq j \text{ et } (b_m + \mu + \overline{\mu})_{[j]} = b_m \text{ ;}$$

il résulte de ceci que $(b_m + \mu)_{[k]} \leq c_k$, $\forall k \neq j$; si on avait aussi $(b_m + \mu)_{[j]} \leq c_j$, celà entraînerait, par addition : $b_m + \mu \leq b_m -1$, ce qui est absurde ; donc $(b_m + \mu)_{[j]} \geq b_m$, qui est le successeur de c_j dans A_j ; ainsi $(b_m + \mu)_{[j]}$ est de la forme $b_m + \lambda$, avec $\lambda \leq \mu$; si $\lambda < \mu$, l'hypothèse de récurrence prouve que $\lambda \in A_j$, ainsi que $b_m + \lambda$, et alors $\mu = \sum_{k \neq j} (b_m + \mu)_{[k]} + \lambda$ apparaît avec deux décompositions possibles ; donc $\lambda = \mu$ et $(b_m + \mu)_{[j]} = b_m + \mu \in A_j$, ce qui achève de prouver le point $\boxed{1}$.

$\boxed{2}$ Soit $\Omega = \{p \in \mathbb{N} | qb_m \in A_j, \forall q \leq p\}$; Ω n'est pas vide puisque $1 \in \Omega$, par hypothèse ; on prouve comme dans $\boxed{1}$ que si $p \in \Omega$, les successeurs immédiats de pb_m dans A_j sont les nombres $pb_m + \lambda$, avec $\lambda \leq c_j$ et $\lambda \in A_j$ (récurrence sur p) et que les composantes d'un $y = pb_m + x$ avec $x < b_m$ sont données par :

$$y_{[k]} = x_{[k]} \text{ pour } k \neq j$$

et $$y_{[j]} = pb_m + x_{[j]} \; ;$$

deux cas se présentent alors concernant Ω :

<u>1er cas</u> : $\Omega \neq \mathbb{N}$; alors on prend $a_{m+1} = \sup(\Omega) + 1$ et $b_{m+1} = a_{m+1}.b_m$

<u>2ème cas</u> : $\Omega = \mathbb{N}$; alors on prend $a_{m+1} = \infty$ et la démonstration de la récurrence est achevée (les vérifications des points i), ii) et iii) au cran m+1 sont triviales). ▲

<u>Remarque.</u>

On peut fabriquer des décompositions $\bigoplus_{k \in K} A_k$ de $\mathbb{N}$ pour lesquelles :

- K est infini et chaque A_k est fini,
- K est infini et chaque A_k est infini,
- K est fini et un seul A_k est infini etc...

Les cas où la suite (b_n) est illimitée correspondent à K infini, ou bien à K fini, avec deux facteurs au moins infinis.

<u>Cas particulier des décompositions en deux facteurs.</u>

Soit $\mathbb{N} = A \oplus B$ une décomposition de $\mathbb{N}$ en deux facteurs ; on supposera que $1 \in A$; d'après ce qui précède, il existe une suite $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ telle que $b_{2p} \in A$, $b_{2p+1} \in B$ et

$$A = \{x = \sum_p x_{2p}\, b_{2p} \mid 0 \leq x_{2p} < a_{2p+1}\}$$

$$B = \{x = \sum_p x_{2p+1}\, b_{2p+1} \mid 0 \leq x_{2p+1} < a_{2p+2}\} ,$$

où on a posé, comme ci-dessus, $a_{n+1} = b_{n+1}/b_n$; l'un au moins des deux facteurs est infini ; les deux peuvent être infinis ; si $a_{2p} = \infty$, B est infini ; si $a_{2p+1} = \infty$, A est infini ; et si la suite des a_n (ou des b_n) est illimitée, A et B sont infinis. Nous pouvons énoncer la :

PROPOSITION 2 - Soit (A,B) une décomposition de $\mathbb{N}$; les noyaux d'instabilité sont donnés par :

$$N_A = \{x \in A \mid \exists y \in B,\ y > x\} \text{ et } N_B = \{x \in B \mid \exists y \in A,\ y > x\} ;$$

en particulier (A,B) est une décomposition instable si et seulement si $|A| = |B| = \infty$.

▼ Par définition de N_A (cf. § 4.3), la condition $x \in N_A$ entraîne l'existence d'un $y \in B$ satisfaisant $y > x$; réciproquement soit $x \in A$, $x \neq 0$, et $y \in B$, $y > x$; on peut écrire x sous la forme $\sum_0^n x_k\, b_{2k}$ et supposer $x_n \neq 0$; si $b_{2n+1} = \infty$, on voit que tout $y \in B$ s'écrit $\sum_0^{n-1} y_k\, b_{2k+1}$; mais alors :

$$y \leq \sum_0^{n-1} (a_{2k+2}-1)\, b_{2k+1} \leq \sum_0^{2n-1} (a_{h+1}-1)\, b_h = b_{2n} - b_o < b_{2n},$$

ce qui contredit l'existence d'un $y \in B$ satisfaisant $y > x$; donc $b_{2n+1} < \infty$; alors on considère $\overline{x} = \sum_0^n (a_{2k+1}-x_k)\, b_{2k}$; on voit que $x + \overline{x} = \sum_0^n a_{2k+1}\, b_{2k} = \sum_0^n b_{2k+1} \in B$ et comme $\overline{x} \in A$, on a bien $x \in N_A$. ▲

Il ne semble pas qu'on puisse établir directement le résultat suivant, dont l'énoncé est pourtant simple, sans utiliser la proposition 1.

PROPOSITION 3 - Tout facteur direct de $\mathbb{N}$ définit une sous-précatégorie de $\mathbb{N}$ (pour l'addition).

▼ Soit A un facteur direct de $\mathbb{N}$ et B son supplémentaire ; on peut supposer que $1 \in A$, c'est-à-dire qu'en reprenant les notations du début de ce paragraphe, on a :

$$A = \{x = \sum_p x_{2p}\, b_{2p} \mid 0 \leq x_{2p} < a_{2p+1}\} ;$$

on doit prouver que si x, x', x'', $x+x'$ et $x+x'+x'' \in A$, alors $x'+x'' \in A$ encore. A cet effet, remarquons que si $x = \sum_p x_{2p}\, b_{2p}$ et $x' = \sum_p x'_{2p}\, b_{2p}$, avec $0 \leq x_{2p}, x'_{2p} < a_{2p+1}$, et si $x+x' \in A$, alors on a obligatoirement $x_{2p}+x'_{2p} < a_{2p+1}$, $\forall p$, ce qui signifie encore que $(x+x')_{2p} = x_{2p} + x'_{2p}$, $\forall p$.
En effet, si on avait $x_{2p}+x'_{2p} \geq a_{2p+1}$, on déduirait des inégalités suivantes :

$$a_{2p+1} \leq x_{2p}+x'_{2p} < 2a_{2p+1}$$

l'égalité :

$$(x_{2p}+x'_{2p})\, b_{2p} = b_{2p+1} + r_p b_{2p} \text{ avec } r_p < a_{2p+1}$$

qui montre clairement que $x+x' \notin A$ puisque $(x+x')_{2p+1} = 1$ et que la décomposition de $x+x'$ est unique. Appliquant cette remarque au couple (x,x'), puis au couple $(x+x',x'')$, on en déduit que pour tout p on a :

$$x_{2p} + x'_{2p} + x''_{2p} < a_{2p+1} \;;$$

ceci entraîne que $x'+x'' \in A$, car $(x'+x'')_{2p} = x'_{2p}+x''_{2p} < a_{2p+1}$ ▲

Remarque.

Cette proposition n'admet pas de réciproque ; il ne suffit pas que A soit une sous-précatégorie de $\mathbb{N}$ pour que A soit facteur direct dans $\mathbb{N}$. Notons aussi que si A est facteur direct dans $\mathbb{N}$, et si $x \in A$ et $x' \in A$, il est équivalent de dire "$x+x' \in A$" ou bien "$(x+x')_n = x_n+x'_n$, $\forall n$".

Voici maintenant une caractérisation des facteurs directs de $\mathbb{N}$; pour $A \in P_0(\mathbb{N})$, définissons par récurrence sur n, à partir de $A_0 = A$, les ensembles et les nombres suivants :

$$A_{n+1} = A + \{0,x_1,\ldots,x_{n+1}\} \text{ où } x_{n+1} = \inf(\mathbb{N}-A_n),$$

et en convenant de poser $\inf(\phi) = 0$.

PROPOSITION 4 - A est facteur direct dans $\mathbb{N}$ si et seulement si, $\forall n \geq 1$, $A \oplus \{0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ est défini et A_n contient le segment $[0,x_n]$; dans ce cas, le supplémentaire de A dans $\mathbb{N}$ n'est autre que $B = \{0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$.

▼ Supposons d'abord que A soit facteur direct dans $\mathbb{N}$ et soit B son supplémentaire ; la proposition 1 montre que B est justement l'ensemble $\{0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ de sorte que $A \oplus \{0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ est défini ; il contient $[0,x_n]$ (ceci s'établit par récurrence par exemple).

Montrons que les conditions de l'énoncé sont suffisantes : supposons qu'il existe un plus petit entier $n \geq 1$ tel que $x_n = 0$; alors $\mathbb{N} = A_{n-1}$ et A est bien facteur direct dans $\mathbb{N}$ avec $\{0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}\}$ pour supplémentaire (convenir que $x_0 = 0$ si $n = 1$) ; supposons $x_n \neq 0$, $\forall n \geq 1$; alors $A + \{0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ est une somme directe et vaut $\mathbb{N}$; en effet, si $x \in \mathbb{N}$ s'écrit $x = a_1 + x_{i_1} = a_2 + x_{i_2}$, avec a_1 et $a_2 \in A$, il suffit de choisir $n \geq \sup(i_1,i_2)$ et d'appliquer l'hypothèse que $A \oplus \{0,x_1,\ldots,x_n\}$ est défini pour voir que $a_1 = a_2$ et $x_{i_1} = x_{i_2}$; tout x se décompose bien en $a + x_n$, avec $a \in A$, car il suffit de choisir n assez grand de sorte que $x_n \geq x$ et d'utiliser l'hypothèse $A_n \supset [0,x_n]$. ▲

<u>Remarque.</u>

En général, la somme $A_n + \{0,x_n\}$ n'est pas directe ; elle l'est si et seulement si x_n est un élément de la base généralisée associée à la décomposition (B,A), donc pour une suite d'entiers, soit $n_1 = 1$, $n_2,\ldots,n_k,\ldots$ définie par :

$x_{n_k} = b_{2k-1}$, en supposant ici que $1 \in A$; les autres éléments de B

sont donc donnés par :

$$x_{r.n_k+p} = r.x_{n_k} + x_p \ ,$$

$\forall r \in [0,a_{2k-1}[$, $\forall p \in [0,n_k[$; remarquons que $x_{n_{k+1}}/x_{n_k} - a_{2k-1}$.

5.3. LES DÉCOMPOSITIONS MULTIPLICATIVES DE $\mathbb{N}^*$.

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ est muni de sa structure de monoïde multiplicatif.
Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des ensembles finis de nombres premiers, ordonné par l'inclusion ; on note encore $\mathcal{O}$ la catégorie correspondante ; à un objet $J = \{p_1,p_2,\ldots,p_r\}$ faisons correspondre l'entier ordonné $[r]$; soit $J' \longrightarrow J$ un morphisme ; on suppose que :

$$J' = \{q_1,q_2,\ldots,q_s\} \text{ et } J = \{p_1,p_2,\ldots,p_r\} \ ,$$

avec $q_1 < q_2 <\ldots< q_s$, et $p_1 < p_2 <\ldots< p_r$; on fait correspondre à $J' \longrightarrow J$ l'application croissante $i_{J',J} : [s] \longrightarrow [r]$ définie comme suit : pour

$k \in \{1,2,\dots,s\}$, il existe un unique entier l tel que $p_l = q_k$; on pose $i_{J',J}(k) = l$.

Définissons alors le foncteur $S : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{G}_{FA}$ suivant ; à un objet J, il fait correspondre $\mathbb{N}^{|J|}$; et si $J' \longrightarrow J$ est un morphisme, l'application $S_{J',J} : \mathbb{N}^{|J'|} \longrightarrow \mathbb{N}^{|J|}$ correspondante est définie par :

$S_{J',J}(m_1,m_2,\dots,m_s) = (n_1,n_2,\dots,n_r)$, où, avec les notations précédentes, $n_l = m_k$ si $l = i_{J',J}(k)$ et $n_l = 0$ si $l \notin i_{J',J}([s])$; c'est bien un homomorphisme entre monoïdes.

Soit alors (B,A) une décomposition (directe et totale) de $\mathbb{N}^*$; soit $J = \{p_1,p_2,\dots,p_r\}$ un objet de $\mathcal{O}$; tout entier $p_1^{n_1}\dots p_r^{n_r}$ doit s'écrire de façon unique sous la forme $a.b$, avec $a \in A$ et $b \in B$; a et b sont donc de la forme

$$a = p_1^{a_1}\dots p_r^{a_r} \quad \text{et} \quad b = p_1^{b_1}\dots p_r^{b_r} \text{ , avec}$$

$$n_1 = a_1+b_1 \text{ , } n_2 = a_2+b_2,\dots,n_r = a_r+b_r.$$

Ainsi à J correspond une décomposition (additive) de $\mathbb{N}^{|J|}$, soit $(B_J,A_J) = d_J$; on a posé :

$$A_J = \{(a_1,a_2,\dots,a_r) \mid p_1^{a_1}\dots p_r^{a_r} \in A\}$$

$$B_J = \{(b_1,b_2,\dots,b_r) \mid p_1^{b_1}\dots p_r^{b_r} \in B\}$$

Soit maintenant $J' \longrightarrow J$ un morphisme de $\mathcal{O}$; montrons que l'application $S_{J',J} : \mathbb{N}^{|J'|} \longrightarrow \mathbb{N}^{|J|}$ définit en fait un morphisme $d_{J'} \longrightarrow d_J$ dans la catégorie $\mathbb{D}_{T\oplus}$.

En effet, soit $(m_1,m_2,\dots,m_s) \in \mathbb{N}^{|J'|}$ et soit

$$(m_1,m_2,\dots,m_s) = (a'_1,a'_2,\dots,a'_s) + (b'_1,b'_2,\dots,b'_s)$$

sa décomposition selon $d_{J'}$; l'élément $(n_1,n_2,\dots,n_r)$, image de $(m_1,m_2,\dots,m_s)$ par $S_{J',J}$, doit se décomposer selon d_J de la façon suivante :

$$(n_1,n_2,\dots,n_r) = (a_1,a_2,\dots,a_r) + (b_1,b_2,\dots,b_r), \text{ où}$$

$$(a_1,a_2,\dots,a_r) = S_{J',J}(a'_1,a'_2,\dots,a'_s)$$

et $$(b_1,b_2,\dots,b_r) = S_{J',J}(b'_1,b'_2,\dots,b'_s) ;$$

en effet, si $l \notin i_{J',J}([s])$, on a $n_l = 0$ et donc $a_l = b_l = 0$ aussi ; par contre si $l = i_{J',J}(k)$, alors $n_l = m_k = a'_k + b'_k$; mais $a'_k = a_l$ et $b'_k = b_l$, parce que la décomposition en facteurs premiers est unique. Nous noterons $D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{D}_{T\oplus}$ le foncteur qui vient d'être décrit ; si $V_{T\oplus} : \mathbb{D}_{T\oplus} \longrightarrow \mathbb{G}_{FA}$ est l'oubli naturel, D est un relèvement de S, c'est-à dire que $V_{T\oplus} \circ D = S$.

PROPOSITION La correspondance ainsi définie entre décompositions de $\mathbb{N}^*$ et relèvement de S dans $\mathbb{D}_{T\oplus}$ est une bijection.

▼ Il est clair qu'elle est injective ; montrons qu'elle est surjective ; soit $D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{D}_{T\oplus}$ un foncteur satisfaisant $V_{T\oplus} \circ D = S$; on définit la décomposition (B,A) de $\mathbb{N}^*$ suivante :

$$A = \{p_1^{n_1}\dots p_r^{n_r} \mid (n_1,n_2,\dots,n_r) \in A_J\}$$

$$B = \{p_1^{n_1}\dots p_r^{n_r} \mid (n_1,n_2,\dots,n_r) \in B_J\}, \text{ où}$$

$(B_J,A_J) = d_J$ est la décomposition de $\mathbb{N}^{|J|}$ donnée par D(J), avec $J = \{p_1,p_2,\dots,p_r\}$;

tout entier $n \neq 0$ s'écrivant sous la forme $p_1^{n_1}\dots p_r^{n_r} = p_1^{a_1}\dots p_r^{a_r}.p_1^{b_1}\dots p_r^{b_r}$ où $(n_1,\dots,n_r) = (a_1,\dots,a_r) + (b_1,\dots,b_r)$ se décompose bien en un produit d'un élément de A et d'un élément de B ; si $n = a.b = a'.b' = p_1^{n_1}\dots p_r^{n_r}$, avec $a,a' \in A$ et $b,b' \in B$, il est clair qu'en introduisant éventuellement des "exposants 0" dans l'écriture en facteurs premiers de a,a',b et b', on peut supposer que ces quatre nombres sont de la forme $p_1^{x_1}.p_2^{x_2}\dots p_r^{x_r}$ et l'unicité de décomposition relative à d_J prouve alors que $a = a'$ et $b = b'$; donc (B,A) est bien une décomposition de $\mathbb{N}^*$, à laquelle correspond évidemment le relèvement D de S dont on est parti.▲

Ainsi le problème de la détermination des décompositions directes multiplicatives de $\mathbb{N}^*$ est ramené à celui de la détermination explicite des décompositions additives des $\mathbb{N}^r$, pour $r \geq 2$; nous allons traiter le cas $r = 2$ par une méthode qui, à l'évidence, a une portée plus générale ; la difficulté pour $r > 2$ consiste à déterminer, pour les décompositions non triviales de $\mathbb{N}^2$, les noyaux d'instabilité, ce qui est un problème d'arithmétique assez difficile.

5.4. DÉCOMPOSITIONS ADDITIVES NON TRIVIALES DE $\mathbb{N}^2$.

Cas de trivialité.

Soit (B,A) une décomposition de $\mathbb{N}^2$; on désigne par $(\underline{b},\underline{a})$ le couple d'applications de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^2$ correspondant ; donc, pour tout $x \in \mathbb{N}^2$ il existe un unique couple $(\underline{b}(x),\underline{a}(x)) \in B \times A$ tel que $x = \underline{b}(x) + \underline{a}(x)$; nous posons :

$$B_1 = B \cap (\mathbb{N} \times \{0\}) \quad , \quad A_1 = A \cap (\mathbb{N} \times \{0\}) \text{ et}$$

$$B_2 = B \cap (\{0\} \times \mathbb{N}) \quad , \quad A_2 = A \cap (\{0\} \times \mathbb{N}) .$$

Il est clair que (B_2,A_2) est une décomposition directe de $\{0\} \times \mathbb{N}$ et (B_1,A_1) une décomposition directe de $\mathbb{N} \times \{0\}$; ces décompositions sont naturellement isomorphes à des décompositions de $\mathbb{N}$ (auxquelles on les identifiera le cas échéant) ; d'après la proposition (2) de 4.3, la remarque (3) qui suit cette proposition, et la proposition (2) de 5.2, on est assuré que (B,A) est triviale, c'est-à-dire que $(B,A) = (B_1 \oplus B_2, A_1 \oplus A_2)$ dans les cas suivants :

- $|A_1| = |B_1| = \infty$ (instabilité de (B_1,A_1))
- $|A_2| = |B_2| = \infty$ (instabilité de (B_2,A_2))
- $|A_1| = |B_2| = \infty$
- $|A_2| = |B_1| = \infty$;

donc les seuls cas où (B,A) peut ne pas être triviale nécessitent que A_1 et A_2 soient finis ou bien que B_1 et B_2 soient finis ; étant donné que A et B jouent des rôles symétriques, on supposera dans la suite que A_1 et A_2 sont finis.

Cas de non trivialité.

Nous énonçons le résultat sous forme de proposition :

PROPOSITION 1 - Soit (B,A) une décomposition non triviale de $\mathbb{N}^2$, avec A_1 et A_2 finis ; soit

- $b_i = \inf \{b \in B_i | b > A_i\}$, $i = 1$ ou 2 ;
- Ω le réseau engendré par (b_1,b_2)
- $C = [0,b_1[\oplus [0,b_2[$;

alors il existe un unique $\omega_o = m_o b_1 + n_o b_2 \in \Omega$, avec $m_o \neq 0$ et $n_o \neq 0$, tel que $D = \mathbb{N}.\omega_o$ ait les propriétés suivantes :

i) D est stable pour la décomposition donnée ; $\omega_o \in A$;

ii) $L = \{\omega' = m'b_1 + n'b_2 \in \Omega | m' < m_o$ ou $n' < n_o\} \subset B$

iii) tout $v \in \mathbb{N}^2$ se décompose de façon unique en somme de cinq éléments particuliers :

$$v = c_A + c_B + l + d_A + d_B,$$

où $c_A, c_B \in C$, $l \in L$, et $d_A, d_B \in D$;
de plus, c_A, d_A et $\underline{a}(x) = c_A + d_A \in A$

$$c_B, d_B, l, c_B+l, d_B+l \text{ et } \underline{b}(x) = c_B+d_B+l \in B ;$$

pour $i = 1$ ou 2, désignons par $\mathcal{D}_i^f$ (resp. $\mathcal{D}_i^*$) l'ensemble des décompositions de $\mathbb{N}$ dont le $i^{\text{ème}}$ facteur est fini (resp. non réduit à $\{0\}$) ; l'énoncé précédent signifie encore qu'il y a une bijection naturelle entre l'ensemble des décompositions non triviales de $\mathbb{N}^2$ et l'ensemble :

$$\mathcal{E} = (\mathbb{N}^*)^2 \times \bigcup_i ((\mathcal{D}_i^f)^2 \times \mathcal{D}_i^*) ;$$

avec les notations du début de l'énoncé, cette bijection fait correspondre à (B,A) l'élément $((m_o,n_o),(B_1,A_1),(B_2,A_2),(B\cap D,A\cap D))$ de $\mathcal{E}$.

▼ La démonstration est établie en plusieurs étapes, mais pour chacune d'elles les principes directeurs sont les mêmes : "lecture bien ordonnée" dans $\mathbb{N}^2$ et "unicité de décomposition" (nous renvoyons ici à l'introduction du chapitre 3).

On sait que $N_1 = B_1 \cap [0,b_1[$ et $N_2 = B_2 \cap [0,b_2[$ sont des noyaux d'instabilité (cf. proposition 2 de <u>5.2</u>) ; soit

$$L_o = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | x < b_1 \text{ ou } y < b_2\},$$

et posons $A' = A_1 \oplus A_2$ et $B' = (N_1 \oplus B_2) \cup (B_1 \oplus N_2)$.

$\boxed{1}$ $L_o \cap A = A'$ $(= C \cap A)$ et $L_o \cap B = B'$.

En effet $P_1 = [0,b_1[\oplus (\{0\} \times \mathbb{N})$ est une sous-précatégorie de $\mathbb{N}^2$ sur laquelle (B,A) induit une décomposition qui satisfait clairement les conditions de la remarque (3) suivant la proposition (2) de <u>4.3</u> ; on en déduit que $P_1 \cap A = A_1 \oplus A_2$ et que $P_1 \cap B = N_1 \oplus B_2$; le même argument appliqué à $P_2 = (\mathbb{N} \times \{0\}) \oplus [0,b_2[$ prouve que $P_2 \cap A = A_1 \oplus A_2$ et que $P_2 \cap B = B_1 \oplus N_2$; les égalités annoncées en résultent aussitôt puisque $L_o = P_1 \cup P_2$; remarquons que L_o est une sous-précatégorie de $\mathbb{N}^2$ sur laquelle (B,A) induit une décomposition relativement triviale.

$\boxed{2}$ Définissons le <u>réseau fondamental</u> Ω attaché à (B,A) par :

$$\Omega = \mathbb{N}b_1 + \mathbb{N}b_2 \ ;$$

c'est une sous-précatégorie stable (sous-monoïde !) sur laquelle (B,A) induit encore une décomposition.

Considérons dans $\mathbb{N}^2$ le bon ordre lexicographique $\prec$: $(x_o=0,\ x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots)$; pour $X \subset \mathbb{N}^2$, on désigne par X_λ l'ensemble des $x \in X$ satisfaisant $x \prec x_\lambda$. Nous allons montrer par induction les deux points suivants :

(S1) $\underline{a}(\Omega_\lambda) \subset \Omega_\lambda$ et $\underline{b}(\Omega_\lambda) \subset \Omega_\lambda$;

(S2) $\omega \in \Omega_\lambda$ et $c \in C \Longrightarrow \begin{cases} \underline{a}(\omega+c) = \underline{a}(\omega) + \underline{a}(c) \\ \underline{b}(\omega+c) = \underline{b}(\omega) + \underline{b}(c) \ ; \end{cases}$

supposons que (S1) et (S2) soient vrais pour tout $\lambda < \mu'$.

- Si l'ordinal μ' est limite, alors $\Omega_{\mu'} = \bigcup_{\lambda<\mu'} \Omega_\lambda$ et les conditions (S1) et (S2) sont évidemment satisfaites à l'ordre μ'.

- Si l'ordinal μ' a un prédécesseur μ ; on distingue selon que $x_\mu \in A \cup B$ ou non ; commençons par le plus facile : si $x_\mu \notin A \cup B$, alors $x_\mu = \underline{a}(x_\mu) + \underline{b}(x_\mu)$ avec les inégalités strictes $\underline{a}(x_\mu) \prec x_\mu$ et $\underline{b}(x_\mu) \prec x_\mu$; posons $\underline{a}(x_\mu) = \omega_a + c$ et $\underline{b}(x_\mu) = \omega_b + c'$, où $\omega_a \in A \cap \Omega$, $\omega_b \in B \cap \Omega$, $c \in C \cap A$ et $c' \in C \cap B$, ce qui est loisible d'après l'hypothèse de récurrence (S2) ; on a déjà remarqué de (B,A) induit sur C une décomposition, à savoir $(N_1 \oplus N_2, A_1 \oplus A_2)$; ceci entraîne que $c+c' \in C$; comme $x_\mu - \omega_a - \omega_b \in \Omega$, on en conclut que $c+c' = 0$, soit $c = c' = 0$ et $\Omega_{\mu'}$ satisfait donc (S1) ; pour $c \in C$, l'hypothèse de récurrence appliquée à $\omega_a + \underline{a}(c)$ et à $\omega_b + \underline{b}(c)$ prouve que ces éléments sont respectivement dans A et dans B, d'où :

$$\underline{a}(x_\mu + c) = \omega_a + \underline{a}(c) \text{ et } \underline{b}(x_\mu + c) = \omega_b + \underline{b}(c) ,$$

et $\Omega_{\mu'}$ satisfait aussi (S2).

Venons-en au cas où $x_\mu \in A \cup B$; regardons seulement le cas où $x_\mu \in A$ (le cas où $x_\mu \in B$ se traite plus facilement encore ; nous soulignerons l'endroit précis où il y a simplification par rapport au cas $x_\mu \in A$) ; la condition (S1) est trivialement satisfaite pour $\Omega_{\mu'}$; quant à (S2), il suffit de prouver que, si $c \in A \cap C$, alors $x_\mu + c \in A$ encore. On procède par induction dans $A \cap C$; supposons que $x_\mu + \alpha \in A$, $\forall \alpha < \alpha_1$, avec $\alpha, \alpha_1 \in A \cap C$; si l'on avait $\underline{a}(x_\mu + \alpha_1) \prec x_\mu$ et $\underline{b}(x_\mu + \alpha_1) \prec x_\mu$, on aurait :

$$\underline{a}(x_\mu + \alpha_1) = \omega_a + \alpha_1' \quad \text{et} \quad \underline{b}(x_\mu + \alpha_1) = \omega_b + \beta_1',$$

avec $\omega_a \in \Omega \cap A$, $\omega_b \in \Omega \cap B$, $\alpha_1' \in A \cap C$ et $\beta_1' \in B \cap C$; puisque $\alpha_1' + \beta_1' \in C$, on en conclut que $x_\mu = \omega_a + \omega_b$ et $\alpha_1 = \alpha_1' + \beta_1'$, d'où $\beta_1' = 0$ et $\omega_b = 0$, d'où $\underline{a}(x_\mu + \alpha_1) = x_\mu + \alpha_1$, ce qui est une contradiction ; donc, ou bien $\underline{a}(x_\mu + \alpha_1) \prec x_\mu$ et $\underline{b}(x_\mu + \alpha_1) \in C \cap B$, ou bien $\underline{b}(x_\mu + \alpha_1) \succ x_\mu$ et $\underline{a}(x_\mu + \alpha_1) \in C \cap A$; dans le premier cas, il n'est pas possible d'avoir $\underline{a}(x_\mu + \alpha_1) \prec x_\mu + \alpha_1$, sinon on trouve $\underline{a}(x_\mu + \alpha_1) = x_\mu + \alpha$ avec $\alpha < \alpha_1$; mais alors $\alpha_1 = \alpha + \underline{b}(x_\mu + \alpha_1)$, et par unicité de décomposition, $\underline{b}(x_\mu + \alpha_1) = 0$ et $\alpha = \alpha_1$, ce qui contredit $\alpha \prec \alpha_1$; dans ce premier cas la preuve est achevée. Plaçons-nous dans le second cas :

$\underline{b}(x_\mu+\alpha_1) \succ x_\mu$ et $\underline{a}(x_\mu+\alpha_1) \in C \cap A$; supposons $\underline{a}(x_\mu+\alpha_1) \neq 0$; alors $\underline{b}(x_\mu+\alpha_1) = x_\mu + \tau$ avec $\tau \prec \alpha_1$ strictement; mais comme $x_\mu+\underline{a}(\tau) \in A$ par hypothèse de récurrence, on en conclut que $\underline{b}(x_\mu+\alpha_1) = \underline{b}(\tau)$ ce qui est absurde ; reste l'éventualité $x_\mu+\alpha_1 \in B$; nous allons voir qu'elle conduit à une contradiction ; soit $\alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12}$, avec $(\alpha_{11},\alpha_{12}) \in A_1 \times A_2$; il existe $\overline{\alpha}_{12} \in A_2$ tel que $\alpha_{12}+\overline{\alpha}_{12} \in B$; posons $z = x_\mu + \alpha_1 + \overline{\alpha}_{12}$; si $\alpha_{12} \neq 0$, $\alpha_{11} \prec \alpha_1$ strictement, et $x_\mu+\alpha_{11} \in A$ par hypothèse de récurrence ; alors $(\alpha_{12}+\overline{\alpha}_{12}, x_\mu+\alpha_{11})$ et $(x_\mu+\alpha_1,\overline{\alpha}_{12})$ sont éléments de $B \times A$, ce qui contredit l'unicité de décomposition de z ; donc $\alpha_{12} = 0$ et $\alpha_1 = \alpha_{11}$; il existe alors $\overline{\alpha}_{11} \in A_1$ tel que $\alpha_{11} + \overline{\alpha}_{11} \in B$; posons $z' = x_\mu + \alpha_1 + \overline{\alpha}_{11}$; $(x_\mu+\alpha_1,\overline{\alpha}_{11})$ et $(\alpha_1+\overline{\alpha}_{11},x_\mu)$ sont éléments de $B \times A$, ce qui contredit encore l'unicité de décomposition de z'. On ne peut pas raisonner globalement avec $\overline{\alpha}_{11} + \overline{\alpha}_{12}$, car la somme $\alpha_{11} + \alpha_{12} + \overline{\alpha}_{11} + \overline{\alpha}_{12}$ n'appartient pas forcément à C, et peut donc fort bien ne pas être dans B (c'est ici que réside la subtilité du cas "$x_\mu \in A$" !).

En résumé, on a prouvé que (B,A) induit une décomposition directe sur Ω ; tout $x \in \mathbb{N}^2$ s'écrit de façon unique sous la forme $\omega + c$, avec $(\omega,c) \in \Omega \times C$; la décomposition (B,A) est isomorphe au produit des décompositions induites par (B,A) sur Ω et sur C (ce fait ne peut pas être établi à l'aide de la proposition (2) de <u>4.3</u> et de la remarque (3) qui suit ; c'est ce qui nécessite la démonstration précédente, qu'on doit regarder comme une version affinée de la proposition (2) de <u>4.3</u>).

$\boxed{3}$ Il suffit maintenant ce caractériser $(\Omega\cap B,\Omega\cap A)$; comme Ω est canoniquement isomorphe à $\mathbb{N}^2$, on est ramené au problème initial, mais avec la condition supplémentaire $\Omega\cap A_1 = \Omega\cap A_2 = 0$; comme (B,A) a été supposée non triviale, $\Omega \cap A$ est différent de 0 ; soit ω_0 le plus petit élément non nul de $\Omega \cap A$; pour l'ordre lexicographique ; soit $\omega_0 = m_0 b_1 + n_0 b_2$ avec $m_0 \neq 0$ et $n_0 \neq 0$; nous allons montrer que la droite $D = \mathbb{N}.\omega_0$ est stable pour la décomposition (B,A) : c'est donc, à un isomorphisme près, une décomposition de $\mathbb{N}$ dont le second facteur n'est pas réduit à 0. Plus précisément, soit :

$$L_{\omega_0} = \{xb_1+yb_2 \mid x<m_0 \quad \text{ou} \quad y<m_0\} ,$$

on va prouver que :

$$\Omega \cap A = D \cap A \quad \text{et} \quad \Omega \cap B = \bigcup_{b \in B \cap D} (b+L_{\omega_0}).$$

Soit ω'_o le plus petit élément non nul de Ω - A selon l'ordre lex. inverse de $<$; alors $\omega'_o = \omega_o$; en effet, soit $\omega'_o = m'b_1 + n'b_2$; par définition de ω_o et ω'_o, on a $m' \geq m_o$ et $n' \leq n_o$; alors $(m'-m_o)b_1$ et $(n_o-n')b_2$ sont dans B ; on remarque que :

$$\omega_o + (m'-m_o)b_1 = n_ob_2 + m'b_1 = n_ob_2 - n'b_2 + m'b_1 + n'b_2$$
$$= (n_o-n')b_2 + \omega'_o \;;$$

mais l'unicité de décomposition entraîne $\omega_o = \omega'_o$; ceci prouve déjà que L_{ω_o} est bien contenu dans B.

Posons alors $L_{n.\omega_o} = \bigcup_{p<n} (p\omega_o+L_{\omega_o})$, cette réunion étant disjointe ; on établit le résultat par récurrence sur n ; supposons que l'on ait :

$$A \cap L_{n.\omega_o} = D \cap A \cap L_{n.\omega_o}$$

et
$$B \cap L_{n.\omega_o} = \bigcup_{b\in B\cap D\cap L_{n.\omega_o}} (b+L_{\omega_o}) \;;$$

montrons que ces égalités sont encore vraies à l'ordre n+1.
Supposons d'abord $n.\omega_o \notin A \cup B$; dans ce cas $\underline{a}(n.\omega_o)$ et $\underline{b}(n.\omega_o)$ sont éléments de $L_{n.\omega_o}$; mais alors $\underline{a}(n.\omega_o) = p.\omega_o$ avec $p < n$ et $\underline{b}(n.\omega_o) = (n-p).\omega_o$, avec $n-p < n$ aussi ; soit $\tau \in L_{\omega_o}$; l'hypothèse de récurrence entraîne que $(n-p)\omega_o + \tau \in B$; donc les éléments $n.\omega_o+\tau \in n.\omega_o+L_{\omega_o}$ ont une décomposition donnée par :

$$\underline{a}(n.\omega_o+\tau) = p.\omega_o \quad \text{et} \quad \underline{b}(n.\omega_o+\tau) = (n-p)\omega_o+\tau \;;$$

ce qui prouve que $A \cap (n.\omega_o+L_{\omega_o}) = B \cap (n.\omega_o+L_{\omega_o}) = \phi$, et les égalités de récurrence sont encore vraies à l'ordre n+1.
Supposons maintenant que $n.\omega_o \in A$; comme $(\tau,n.\omega_o) \in B \times A$ pour tout $\tau \in L_{\omega_o}$, on trouve $(n.\omega_o+L_{\omega_o}) \cap A = \{n.\omega_o\}$ et $(n.\omega_o+L_{\omega_o}) \cap B = \phi$ et les égalités de recurrence sont encore vraies à l'ordre n+1.
Supposons enfin que $n.\omega_o \in B$; soit $\tau \in L_{\omega_o}$, avec $\tau \neq 0$; si l'inégalité $\underline{a}(n.\omega_o+\tau) \prec n.\omega_o$ a lieu, alors $\underline{a}(n.\omega_o+\tau) = p.\omega_o$ avec $p < n$; si on avait $p \neq 0$, on aurait $0 < n-p < n$, $\underline{b}(n.\omega_o+\tau) = (n-p)\omega_o + \tau$ et $(n-p).\omega_o$ serait élément non nul

de B, ce qui est impossible puisque $n.\omega_o \in B$; donc $p = 0$ et $n.\omega_o+\tau \in B$. Reste à prouver que l'inégalité inverse, soit $\underline{a}(n.\omega_o+\tau) \succcurlyeq n.\omega_o$ est impossible ; d'abord, on aurait $\underline{a}(n.\omega_o+\tau) \succ n.\omega_o$ puisque $n.\omega_o \in B$; posons $\underline{a}(n.\omega_o+\tau) = n.\omega_o + \tau_1$, avec $\tau_1 \in L_{\omega_o}$ et $\tau_1 \neq 0$; on prouve par récurrence qu'un tel élément ne peut pas être dans A : supposons donc que pour $\tau' \prec \tau_1$, on ait $n.\omega_o+\tau' \notin A$; on a vu précédemment que dans ce cas c'est un élément de B ; puisque $\tau_1 \neq 0$, l'une au moins des différences $\tau_1 - b_1$ et $\tau_1 - b_2$ est définie dans $\mathbb{N}^2$; supposons que ce soit $\tau_1 - b_1$; alors $n.\omega_o + \tau_1 - b_1$ **est** dans B ; ceci prouve que $(n.\omega_o+\tau_1-b_1,\omega_o)$ et $(\omega_o-b_1,n.\omega_o+\tau_1)$ sont dans B x A et contredit le fait que l'élément $z = (n+1)\omega_o + \tau_1 - b_1$ a une décomposition unique selon (B,A). ▲

Dans [7], nous avions conjecturé que tout facteur direct de $\mathbb{N}^k$ était en fait une précatégorie ; nous pouvons montrer que ce n'est pas toujours le cas ; la proposition suivante indique justement les seuls cas où un tel facteur direct est une précatégorie.

PROPOSITION 2 - Soit (B,A) une décomposition non triviale de $\mathbb{N}^2$, avec A_1 et A_2 finis, les notations étant toujours celles de la proposition 1 ; pour que A soit une sous-précatégorie de $\mathbb{N}^2$ il faut et il suffit ou bien que $\omega_o \neq b_1+b_2$, ou bien, si $\omega_o = b_1+b_2$, que A_1 ou A_2 soit réduit à 0 ; pour que B soit une sous-précatégorie de $\mathbb{N}^2$, il faut et il suffit que $B \cap D = 0$.

▼ En effet, soit d'abord $\omega_o \neq b_1 + b_2$; pour que la somme de deux éléments de A soit encore dans A, il est nécessaire que leurs composantes situées dans C aient encore une somme dans C ; en effet, soit $x = m.\omega_o + \alpha$ et $y = n.\omega_o + \alpha'$ des éléments de A et supposons que $x+y = p.\omega_o+\overline{\alpha} \in A$; soit Ω_o le réseau engendré par les composantes m_ob_1 et n_ob_2 de ω_o ; la somme $\alpha + \alpha'$ est dans 2.C, et la différence $\alpha + \alpha' - \overline{\alpha}$ ou son opposée est donc dans $2.C \cap \Omega_o = 0$; donc $\overline{\alpha} = \alpha + \alpha'$ et $p = m + n$, de sorte que A est isomorphe au produit des précatégories $A \cap C$ et $A \cap D$, et c'est bien une précatégorie.

Soit maintenant $\omega_o = b_1 + b_2$ et supposons, par exemple, $A_2 = 0$; si $x = m.\omega_o + \alpha$, $y = n.\omega_o + \alpha'$ et $x + y = p.\omega_o + \overline{\alpha}$, on voit aussitôt que $mb_2 + nb_2 = pb_2$, soit $p = m + n$; alors $\overline{\alpha} = \alpha + \alpha'$ de sorte que A est une précatégorie isomorphe au produit $A_1 \times (D \cap A)$. A l'inverse, supposons A_1 et $A_2 \neq 0$, toujours avec $\omega_o = b_1 + b_2$; on sait que b_1 est un multiple entier d'un élément $a_1 \in A_1$, soit $b_1 = p.a_1$, avec $p \geq 2$ et $q.a_1 \in A_1$, $\forall q < p$ (cf. la structure des décompositions de $\mathbb{N}$) ; soient alors q_1 et q'_1 deux entiers tels que $q_1 + q'_1 = p$, avec q_1 et $q'_1 \neq 0$; soient de même q_2, q'_2 et a_2 tels que $q_2.a_2$, $q'_2.a_2 \in A_2$ et $(q_2+q'_2)a_2 = b_2 \in B_2$, avec q_2 et $q'_2 \neq 0$; dans ce cas, les éléments suivants :

$$q_1.a_1,\ q_2.a_2,\ q'_1.a_1+q'_2.a_2,\ q_1.a_1+q_2.a_2,\ (q_1.a_1+q_2.a_2)+q'_1.a_1+q'_2.a_2 = b_1+b_2 = \omega_o$$

sont tous dans A, tandis que les éléments :

$$q_1.a_1+(q'_1.a_1+q'_2.a_2) = b_1+q'_2.a_2 \quad \text{et} \quad q_2.a_2+(q'_1.a_1+q'_2.a_2) = b_2+q'_1.a_1$$

ne sont évidemment pas dans A, ce qui prouve que A n'est certainement pas une précatégorie.

Venons-en au cas de B ; si $B \cap D = 0$, alors $B = L_{\omega_o} \oplus (C \cap B)$; soient $x = b + \beta$ et $y = b' + \beta'$, avec b et $b' \in L_{\omega_o}$ et $\beta, \beta' \in C \cap B$, deux éléments de B ; alors $\beta + \beta'$ est encore élément de C (structure des décompositions de $\mathbb{N}$!), et donc si $x+y \in B$, on en conclut que $b+b' \in L_{\omega_o}$ encore ; alors B est bien isomorphe au produit des précatégories L_{ω_o} et $C \cap B$. Au contraire si $B \cap D \neq 0$, prenons un élément $n.\omega_o \in B \cap D$, avec $n \neq 0$; on sait que, dans ce cas, $n.\omega_o = m_1 b_1 + n_2 b_2$, avec $m_1 > m_o$ et $n_2 > n_o$; tous les multiples de b_1 ou b_2 sont dans B ; alors $m_o b_1$, $(m_1-m_o)b_1$, $n_2 b_2$, $m_o b_1 + (m_1-m_o)b_1 = m_1 b_1$ et $m_o b_1 + (m_1-m_o)b_1+n_2 b_2 = n.\omega_o$ sont tous éléments de B, tandis que $m_o b_1+n_2 b_2$ ne l'est pas, car $\underline{a}(m_o b_1+n_2 b_2) = m_o b_1 + n_o b_2 = \omega_o \neq 0$; donc B ne satisfait pas l'axiome de forte associativité et n'est donc pas une précatégorie.

Considérons le rectangle fermé $\overline{C} = [0,b_1] \oplus [0,b_2]$; le seul élément de $\overline{C} - (A_1 \oplus A_2)$ susceptible d'être dans A est b_1+b_2 ; si A est une précatégorie contenant b_1+b_2, alors A_1 ou A_2 est réduit à 0 (donc b_1 ou $b_2 = 1$) ; il faut penser celà en termes "topologiques" : posons $\alpha_o = \sup (A \cap \mathring{C})$ en convenant que $\sup (\phi) = 0$; la condition nécessaire et suffisante pour que A soit une précatégorie est que la distance $\delta(\alpha_o,\omega_o)$ soit assez grande, très exactement : $\delta(\alpha_o,\omega_o) > \sup (b_1,b_2)$ (en effet, si $\alpha_o \neq 0$, un calcul simple prouve que $\delta(\alpha_o,b_1+b_2) < \sup (b_1,b_2)$). Résumons ces remarques **sous forme de**

<u>PROPOSITION 3</u> - Pour qu'une décomposition (B,A) de $\mathbb{N}^2$ soit une décomposition en deux sous-précatégories (objet de $\mathbb{D}_{FA}$) il faut et il suffit :

ou bien qu'elle soit triviale,

ou bien qu'elle soit non triviale, et dans ce cas, si A_1 et A_2 sont les facteurs finis des projections, la décomposition d'un élément x en cinq éléments particuliers indiquée dans la proposition 1

$$x = c_A + c_B + 1 + d_A + d_B ,$$

doit satisfaire les deux conditions : $d_B = 0$ et si $d_A \neq 0$, alors $\delta(d_A,\alpha_o) > \sup(b_1,b_2)$.

▼ En effet, $B \cap D = 0$ est équivalent à $d_B = 0$ et $\delta(d_A,\alpha_o)$ est plus grand ou égal à $\delta(\alpha_o,\omega_o)$ dès que $d_A \neq 0$. ▲

5.5. ω-STABILITÉ DES DÉCOMPOSITIONS ADDITIVES.

PROPOSITION 1 - Les décompositions de $\mathbb{N}$ sont ω-stables.

▼ Soit (B,A) une décomposition de $\mathbb{N}$; soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base généralisée associée (cf. proposition 1 de 5.2) ; à un élément x de la forme $\sum_{i\in I} b_{s+2i}$ (qui est dans A ou B, selon la parité de s), on fait correspondre les deux nombres suivants :

$$l(x) = |I| \text{ et } k(x) = s + 2\sup(I) ;$$

si $x = a_1 + a_2$, avec $a_1,a_2 \in A$ et $x \in B$, ou bien si $x = \beta_1 + \beta_2$, avec $\beta_1,\beta_2 \in B$ et $x \in A$, alors x est de la forme indiquée ci-dessus et les nombres $l(x)$ et $k(x)$ sont bien définis ; de plus, supposons $x \in A$ de la forme ci-dessus et soit $x' \in A$ quelconque, alors $y = \underline{b}(x+x')$ est tel que $l(y)$ et $k(y)$ sont encore définis et satisfont : $l(y) \leq l(x)$ et si $l(y) = l(x)$, alors $k(y) > k(x)$; même remarque en échangeant les rôles de A et de B.

Soit alors $\hat{x} = (x_n,x_{n-1},\dots,x_1)$ un chemin dans $A \cup B$; en faisant opérer p fois le mot $\mu = r_1r_2\dots r_{n-1}$, on obtient un chemin noté :

$$\mu^p\hat{x} = (b_{n,p},b_{n-1,p},\dots,b_{2,p},a_p) ,$$

dans lequel $a_p \in A$ et $b_{k,p} \in B$, $\forall k \geq 2$ et $\forall p \geq 1$; le deuxième élément du chemin

$r_{n-1}\mu\hat{x}$ (en partant de la gauche) est égal à $\underline{a}(b_{n,1}+b_{n-1,1})$; notons le $\overline{a}_1$; d'après les remarques préliminaires, les entiers $l(\overline{a}_1)$ et $k(\overline{a}_1)$ sont définis ; d'autre part, à cause de la commutativité, on retrouve $\overline{a}_1$ à l'avant dernière place dans le chemin $r_2r_3\ldots r_{n-1}\mu\hat{x}$, de sorte que $b_{2,2} = \underline{b}(\overline{a}_1+a_1)$; là encore, les entiers $l(b_{2,2})$ et $k(b_{2,2})$ sont définis et on a $l(b_{2,2}) \leq l(\overline{a}_1)$ et si $l(b_{2,2}) = l(\overline{a}_1)$, alors $k(b_{2,2}) > k(\overline{a}_1)$; on définit de même $\overline{a}_2 = \underline{a}(b_{n,2}+b_{n-1,2})$ et on trouve que $b_{2,3} = \underline{b}(\overline{a}_2+a_2)$, tandis que $b_{3,3} = b_{2,2}$; par récurrence, on établit alors que $b_{n-1,n-1} = b_{n-2,n-2} = \ldots = b_{2,2}$, d'où, en définissant $\overline{a}_{n-1} = \underline{a}(b_{n-1,n-1}+b_{n,n-1})$, l'inégalité suivante :

$$l(\overline{a}_{n-1}) \leq l(b_{n-1,n-1}) = l(b_{2,2}) \leq l(\overline{a}_1) ;$$

posant d'une façon générale $\overline{a}_k = \underline{a}(b_{n,k}+b_{n-1,k})$ et itérant le processus amorcé plus haut, on prouve par récurrence les inégalités suivantes :

$$l(\overline{a}_{p(n-2)+1}) \leq l(\overline{a}_{(p-1)(n-2)+1}) \leq\ldots\leq l(\overline{a}_{2(n-2)+1}) \leq l(\overline{a}_{n-1}) \leq l(\overline{a}_1) ;$$

posons $u_p = \overline{a}_{p(n-2)+1}$; les nombres $k(u_p)$ sont définis et forment un ensemble borné (par exemple par $x_n+x_{n-1}+\ldots+x_1$) ; donc il existe un entier p à partir duquel l'inégalité $k(u_{q+1}) > k(u_q)$ ne sera plus possible ; c'est-à-dire qu'à partir de cet entier p, on aura une inégalité stricte : $l(u_{q+1}) < l(u_q)$; alors il existe $p' \geq p$ tel que $u_{p'}=0$ et ceci prouve que le chemin $\hat{x}$ est bien (n-1)-réductible ; l'ω-stabilité de (B,A) résulte alors de la proposition de <u>4.2</u>. ▲

<u>PROPOSITION 2</u> - Les décompositions de $\mathbb{N}^2$ sont ω-stables.

▼ Compte-tenu de la proposition 1 de <u>5.4</u> et de la proposition précédente, il suffit de raisonner sur les décompositions "facteurs" (i.e. sur $\mathbb{N} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{N}$) et éventuellement sur $D = \mathbb{N}.\omega_0$, comme on l'a fait ci-dessus. ▲

<u>Remarque</u>.

Le caractère de finitude de cette propriété d'ω-stabilité est bien évident ; l'intérêt des propositions précédentes est de montrer qu'il n'y a pas d'autres cycles irréductibles que ceux de longueur ≤ 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARR M. - Exact categories and categories of sheaves L.N. n° 236 (1971).

[2] BENABOU J. - Contre exemple à propos des précatégories bien ordonnées (reproduit ici sans démonstration) (non publié).

[3] BRUIJN N.G. - On number systems, Nieuw Archief voor wiskunde (3), IV, 15-17.

[4] COPPEY L. - Décompositions algébriques de structures en produits, E.M. 14 (1971).

[5] COPPEY L. - Catégories avec décompositions, E.M. 24 (1976).

[6] COPPEY L. - Décompositions additives de $\mathbb{N}$, E.M. 26 (1976).

[7] COPPEY L. - Décompositions directes des précatégories, Séminaire de Maths. de l'Université de Bremen, RFA (1976).

[8] COPPEY L. - Stabilité de décompositions dans les précatégories, E.M. 28 (1977).

[9] COPPEY L. et DAVAR PANAH R. - Décompositions et catégories de relations, C.T.G.D., Vol. XVI, n°2 (1975).

[10] EHRESMANN C. - Cours d'algèbre, C.D.U., Paris (1968).

[11] EHRESMANN C. - Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, C.T.G.D., Vol. IX, n°2 (1967).

[12] EHRESMANN C. - Introduction to the theory of structured catégories. University of Kansas (1966).

[13] FOLTZ F. et LAIR C. - Constructions et tests standard, E.M. 30 (1978).

[14] FOLTZ F. et LAIR C. - Produits tensoriels de structures algébriques (à paraître).

[15] JOHNSTONE P.T. - Thèse (1974).

[16] LAIR C. - Fermeture standard des catégories algébriques II, C.T.G.D., Vol. XVIII, n°1 (1977).

[17] LAIR C. - Esquissabilité et triplabilité des foncteurs algébriques, E.M. 31 (1978).

[18] LINTON F.E.J. - An outline of functorial semantics L.N. n° 80 (1969).

[19] MANES E. - A triple theoric construction of compact algebras, L.N. n° 80 (1969).

[20] NIVEN I. - A characterization of complementig sets of pairs of integers, University of Oregon, pp. 193-203.

L.N. = Lecture Notes (Springer)

E.M. = Esquisses Mathématiques

C.T.G.D. = Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle