CHRISTIAN LAIR

Éléments de théorie des patchworks (I)

Diagrammes, tome 29 (1993), exp. nº 1, p. CL1-CL29
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1993__29__A1_0>

DIAGRAMMES VOLUME 29, 1993

ELEMENTS DE THEORIE DES PATCHWORKS (I)

Christian LAIR

Introduction

Dans ce travail, nous présentons formellement la notion de patchwork (et celle, indissociable, d'homomorphisme entre patchworks) et la notion de modèle d'un patchwork dans une catégorie (et celle, indissociable, de transformation entre modèles d'un patchwork donné dans une catégorie donnée).

On pourra y voir un patchwork, au choix, comme :
— une présentation diagrammatique d'un type de structures qui peuvent être axiomatisées par une théorie (logique) du 2ème ordre,
— une spécification diagrammatique "orientée sous-diagrammes" (i. e. "orientée objets") d'un type abstrait de données,
— une esquisse (voir (I.T.S.C.) et / ou (E.T.S.A.) et / ou (C.Q.C.E.), par exemple) généralisée, en ce sens qu'on peut y distinguer des sous-diagrammes plus complexes que seulement des cônes projectifs ou des cônes inductifs.

Dès lors, on pourra y voir aussi un modèle d'un patchwork comme :
— un modèle de la théorie logique correspondante,
— une sémantique pour le type abstrait ainsi spécifié,
— un foncteur transformant les sous-diagrammes distingués en

A.M.S. SUB. CLASS. : 18 C 10, 18 D 35, 18 A 10

des sous-diagrammes astreints à vérifier des conditions plus générales que seulement des propriétés universelles.

Ce texte se veut le premier d'une série d'autres (que nous espérons pouvoir publier assez régulièrement) où nous continuerons à développer les éléments les plus significatifs de cette (naissante!) "théorie des patchworks" :

— esquisses et trames (voir (S.C.S.T.)) comme patchworks particuliers,

— divers et nombreux exemples,

— esquissabilité projective de la structure de patchwork, propriétés de la catégorie des patchworks et constructions de patchworks,

— notion de sémantique catégorique d'un système de patchworks, esquissabilité de la structure de sémantique catégorique et "complétions" de patchworks,

— propriétés de catégories de modèles,

...

Le contenu du présent travail - et au delà - a fait l'objet d'un certain nombre d'exposés : aux *Journées "Esquisses et Types de Structures"* (Université Paris 7, 2-4 Juillet 1992) et au *Groupe de Travail "Esquisses et Calcul Formel"* (Université Paris 7, Octobre 1992 et Mai 1993), notamment. Deux raisons (principales) m'incitent, cependant, à publier dès maintenant cette seule partie I (qui paraîtra, sans doute, d'autant plus brève et formaliste qu'elle est encore, nécessairement, très isolée des suivantes) :

— d'aucuns, qui m'y ont poussé, voulaient pouvoir disposer d'une référence bibliographique précise,

— d'autres préfèreraient certainement le contraire.

---

1. Patchworks et homomorphismes

Dans ce paragraphe, nous définissons successivement les "patchworks" (qui sont des graphes munis d'une structure supplémentaire) et les "homomorphismes" entre patchworks (d'autant plus naturellement que la structure de patchwork est projectivement esquissable, i. e. essentiellement algébrique).

Un "patchwork" est un graphe muni d'une composition partielle de ses flèches et auquel sont attachées des "figures" constituées de "triangles" et de "cônes" plus ou moins complexes, en ce sens que leurs sommets sont eux-mêmes des patchworks : ainsi, le patchwork (total) considéré a un "degré" (de complexité) qui est évidemment plus élevé que ceux des patchworks constituant ses figures.

Précisément, on définit les patchworks, par induction (voir la Note 1), de la manière suivante:

— on dit que $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{S}, \emptyset)$ est un *patchwork de degré* 0 si $\boldsymbol{S}$ est un graphe à composition (voir la Note 2), appelé le *support de* $\boldsymbol{P}$ et noté $\boldsymbol{S} = \mathrm{SUPP}(\boldsymbol{P})$,

— si $n \geq 0$ est un ordinal (voir la Note 3) et si $\boldsymbol{S}$ est un graphe à composition, on dit que le quintuplet $T = (\Gamma, \lambda, \beta, \rho, \Delta)$ est un *triangle de degré* $\leq n$ *au-dessus de* S si (on pourra se reporter au Tableau 1, ci-dessous) :

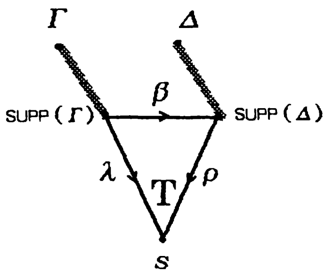


Tableau 1

• Γ est un patchwork de degré $\leq$ n (et de support SUPP (Γ)), appelé le *patchwork de gauche de* T et noté Γ = PGAUCHE (T) ,

• Δ est un patchwork de degré $\leq$ n (de support SUPP (Δ)), appelé le *patchwork de droite de* T et noté Δ = PDROITE (T) ,

• λ : SUPP (Γ) $\rightarrow$ $\boldsymbol{S}$ est un foncteur (voir la Note 2), appelé le *foncteur de gauche de* T et noté λ = FGAUCHE (T) ,

• β : SUPP (Γ) $\rightarrow$ SUPP (Δ) est un foncteur, appelé le *foncteur de base de* T et noté β = BASE (T) ,

• ρ : SUPP (Δ) $\rightarrow$ $\boldsymbol{S}$ est un foncteur, appelé le *foncteur de droite de* T et noté ρ = FDROITE (T) ,

• l'égalité suivante est satisfaite :

$$\rho \circ \beta = \lambda ,$$

— si n $\geq$ 0 est un ordinal, on dit que le quintuplet C = ($\boldsymbol{I}$, Σ , $(\pi_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I} \in \mathrm{OB}(\boldsymbol{I})}$, $(\Omega_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I} \in \mathrm{OB}(\boldsymbol{I})}$, $(\Gamma_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i} \in \mathrm{FL}(\boldsymbol{I})}$) est un *cône de degré* $\leq$ n si (on pourra se reporter au Tableau 2, ci-dessous) :

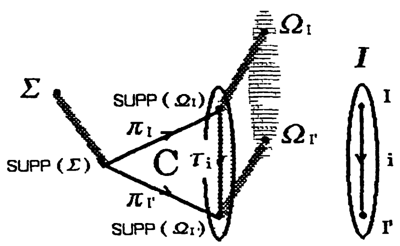


Tableau 2

• $\boldsymbol{I}$ est un graphe à composition identitaire (voir la Note 2), appelé l'*indexation de* C et noté $\boldsymbol{I}$ = INDEX (C) ,

• Σ est un patchwork de degré $\leq$ n (de support SUPP (Σ)), appelé le *sommet de* C et noté Σ = SOMMET (C) ,

• pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$, Ω_{I} est un patchwork de degré $\leq$ n (de support SUPP (Ω_{I})), appelé l'*opposant d'indice* I *de* C et noté Ω_{I} = OPP$_{\mathrm{I}}$ (C) (alors la famille $\Omega = (\Omega_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I} \in \mathrm{OB}(\boldsymbol{I})}$ est appelée la *famille des opposants de* C et est notée Ω = OPP (C)),

• pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$, $\pi_{\mathrm{I}} : \mathrm{SUPP}(\Sigma) \to \mathrm{SUPP}(\Omega_{\mathrm{I}})$ est un foncteur, qu'on appelle le *foncteur projection d'indice* I *de* C et que l'on note $\pi_{\mathrm{I}} = \mathrm{PROJ}_{\mathrm{I}}(\mathrm{C})$ (alors la famille $\pi = (\pi_{\mathrm{I}} : \mathrm{SUPP}(\Sigma) \to \mathrm{SUPP}(\Omega_{\mathrm{I}}))_{\mathrm{I} \in \mathrm{OB}(\boldsymbol{I})}$ est appelée *famille des projections de* C et est notée $\pi = \mathrm{PROJ}(\mathrm{C})$),

• pour toute flèche $\mathrm{i} : \mathrm{I} \to \mathrm{I'}$ du graphe à composition $\boldsymbol{I}$, $\tau_{\mathrm{i}} : \mathrm{SUPP}(\Omega_{\mathrm{I}}) \to \mathrm{SUPP}(\Omega_{\mathrm{I'}})$ est un foncteur, appelé le *foncteur transition d'indice* i *de* C et noté $\tau_{\mathrm{i}} = \mathrm{TRANSIT}_{\mathrm{i}}(\mathrm{C})$ (alors on appelle *diagramme des transitions de* C, et on note *également* $\tau = \mathrm{TRANSIT}(\mathrm{C}) = (\tau_{\mathrm{i}} : \mathrm{SUPP}(\Omega_{\mathrm{I}}) \to \mathrm{SUPP}(\Omega_{\mathrm{I'}}))_{\mathrm{i} \in \mathrm{FL}(\boldsymbol{I})})$ la famille de ces transitions),

• pour tout objet $\mathrm{I} \in \mathrm{OBID}(\boldsymbol{I}) = \mathrm{OB}(\boldsymbol{I})$ du graphe à composition (identitaire, par hypothèse) $\boldsymbol{I}$, on a l'égalité :

$$\tau_{\mathrm{ID}(\mathrm{I})} = \mathrm{ID}(\mathrm{SUPP}(\Omega_{\mathrm{I}})),$$

• pour toutes flèches $\mathrm{i} : \mathrm{I} \to \mathrm{I'}$ et $\mathrm{i'} : \mathrm{I'} \to \mathrm{I''}$ de $\boldsymbol{I}$, composables (voir la Note 2) dans $\boldsymbol{I}$, on a l'égalité :

$$\tau_{\mathrm{i'}.\mathrm{i}} = \tau_{\mathrm{i'}} \circ \tau_{\mathrm{i}},$$

• pour toute flèche $\mathrm{i} : \mathrm{I} \to \mathrm{I'}$ de $\boldsymbol{I}$, on a l'égalité :

$$\tau_{\mathrm{i}} \circ \pi_{\mathrm{I}} = \pi_{\mathrm{I'}},$$

— si $\mathrm{n} \geq 0$ est un ordinal et si $\boldsymbol{S}$ est un graphe à composition, on dit que le triplet $\mathrm{F} = (\mathrm{T}, \alpha, \mathrm{C})$ est une *figure de degré* $\leq \mathrm{n}$ *au-dessus de* $\boldsymbol{S}$ si (on pourra se reporter au Tableau 3, ci-dessous) :

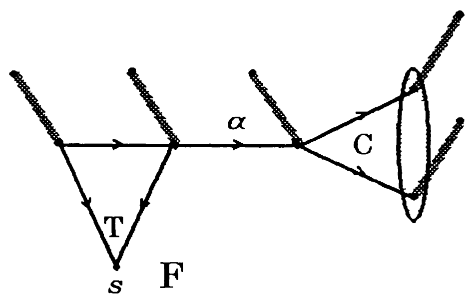


Tableau 3

• T est un triangle de degré $\leq$ n au-dessus de $\boldsymbol{S}$, appelé le *triangle de* F et noté T = TRIANGLE (F) ,

• C est un cône de degré $\leq$ n , appelé le *cône de* F et noté C = CONE (F) ,

• α : SUPP (PDROITE (T)) $\rightarrow$ SUPP (SOMMET (C)) est un foncteur, appelé l'*arête de* F et noté α = ARETE (F) ,

— si n $\geq$ 0 est un ordinal et si $\boldsymbol{S}$ est un graphe à composition, on dit que le triplet F = (T , α , C) est une *figure de degré* < n (voir la Note 3) *au-dessus de* $\boldsymbol{S}$ s'il existe un ordinal 0 $\leq$ n' < n pour lequel F est une figure de degré $\leq$ n' ,

— si n $\geq$ 0 est un ordinal, on dit que $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{S}, \mathcal{F})$ est un *patchwork de degré* $\leq$ n si (on pourra se reporter au Tableau 4, ci-dessous) :

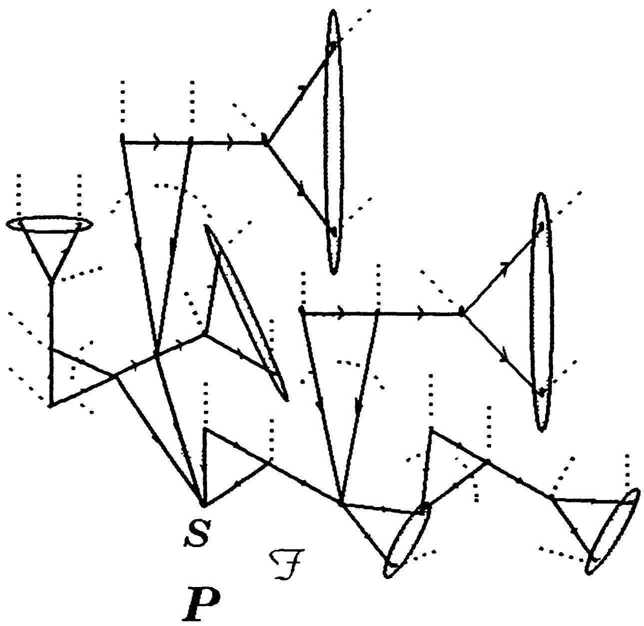


Tableau 4

• $\boldsymbol{S}$ est un graphe à composition, appelé le *support de* $\boldsymbol{P}$ et noté $\boldsymbol{S} = \mathrm{SUPP}\,(\boldsymbol{P})$,

• $\mathcal{F}$ est un ensemble (voir la Note 1) de figures de degrés $< \mathrm{n}$ au-dessus de $\boldsymbol{S}$, appelées les *figures attachées à* $\boldsymbol{P}$ (ou $\boldsymbol{S}$) et noté $\mathcal{F} = \mathrm{FIGAT}\,(\boldsymbol{P})$.

En particulier, si $\mathcal{U}$ est un univers (voir la Note 1), nous laissons au lecteur le soin de définir les patchworks *$\mathcal{U}$-petits* (i. e. les patchworks où "tout" est $\mathcal{U}$-petit).

Tout naturellement, les "homomorphismes" entre deux patchworks sont les foncteurs qui transforment les figures attachées au patchwork domaine en des figures également attachées au patchwork codomaine.

Formellement, si $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{S'}$ sont deux graphes à composition, si $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S'}$ est un foncteur et si $\mathrm{n} \geq 0$ est un ordinal, on constate tout d'abord, que :

— dès que $\mathrm{T} = (\Gamma, \lambda, \beta, \rho, \Delta)$ est un triangle de degré $\leq \mathrm{n}$ au-dessus de $\boldsymbol{S}$, alors (on pourra consulter le Tableau 5, ci-dessous) $\boldsymbol{f}(\mathrm{T}) = (\Gamma, \boldsymbol{f} \circ \lambda, \beta, \boldsymbol{f} \circ \rho, \Delta)$ est un triangle de degré $\leq \mathrm{n}$ au-dessus de $\boldsymbol{S'}$, qu'on appelle le *transformé de* T *par le foncteur* $\boldsymbol{f}$,

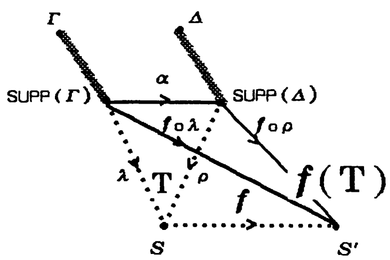


Tableau 5

— dès que $\mathrm{F} = (\mathrm{T}, \alpha, \mathrm{C})$ est une figure de degré $\leq \mathrm{n}$ au-dessus de $\boldsymbol{S}$, alors (on pourra consulter le Tableau 6, ci-dessous) $\boldsymbol{f}(\mathrm{F}) = (\boldsymbol{f}(\mathrm{T}), \alpha, \mathrm{C})$ est une figure de degré $\leq \mathrm{n}$ au-dessus de $\boldsymbol{S'}$, qu'on appelle la *transformée de* F *par le foncteur* $\boldsymbol{f}$.

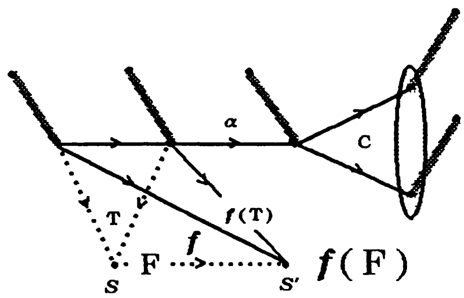


Tableau 6

De la sorte, si $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{P'}$ sont deux patchworks, on dit que $\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{P'})$ est un *homomorphisme de* $\boldsymbol{P}$ *vers* $\boldsymbol{P'}$ et on note $\boldsymbol{h} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P'}$ si :

— $\boldsymbol{f} : \mathrm{SUPP}(\boldsymbol{P}) \to \mathrm{SUPP}(\boldsymbol{P'})$ est un foncteur, appelé le *support de* $\boldsymbol{h}$ et noté $\boldsymbol{f} = \mathrm{SUPP}(\boldsymbol{h})$,

— dès que F est une figure attachée à $\boldsymbol{P}$, alors la figure $\boldsymbol{f}(\mathrm{F})$ est attachée à $\boldsymbol{P'}$ (et on dit encore que $\boldsymbol{f}(\mathrm{F})$ est la *transformée de* F *par* $\boldsymbol{h}$ et on note de même $\boldsymbol{f}(\mathrm{F}) = \boldsymbol{h}(\mathrm{F})$).

Nous laissons au lecteur le soin de définir l'homomorphisme, bien entendu noté $\boldsymbol{h'} \circ \boldsymbol{h} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P''}$, *composé* de deux homomorphismes consécutifs $\boldsymbol{h} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P'}$ et $\boldsymbol{h'} : \boldsymbol{P'} \to \boldsymbol{P''}$ entre patchworks (de sorte que le foncteur support du composé soit le composé des foncteurs supports).
De même, nous lui laissons le soin de définir l'homomorphisme, évidemment noté $\mathrm{ID}(\boldsymbol{P}) : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}$, *identité* en un patchwork $\boldsymbol{P}$ (de sorte que son support soit le foncteur identité).

En particulier, si $\mathcal{U}$ est un univers, on note $\mathcal{U}$-***Patch*** la catégorie (où "la composition est celle des supports") dont les objets sont les patchworks $\mathcal{U}$-petits et dont les flèches sont les homomorphismes entre ces patchworks.

2. Modèles et transformations

Dans ce paragraphe, nous définissons successivement les "modèles" d'un quelconque patchwork dans une quelconque catégorie (puisqu'il faut voir un patchwork comme une spécification diagrammatique d'un genre de structures), les "standards de transformations" puis les "transformations", conformes à un tel standard donné, entre modèles d'un patchwork donné dans une catégorie donnée (étant entendu que les transformations naturelles sont évidemment conformes à un standard ... canonique !).

Un "modèle" d'un patchwork dans une catégorie se doit d'en concrétiser sa géométrie (i. e. son graphe sous-jacent) et son algèbre (i. e. ses équations de composition) abstraites : c'est donc, au moins, un foncteur. Mais il doit aussi respecter une certaine logique de comportement (existence de "factorisations" et de "connexions") vis-à-vis d'autres modèles : ceux des patchworks partiels constituant les figures attachées au patchwork total initialement donné.

Ainsi, les modèles des patchworks dans une catégorie donnée $\boldsymbol{A}$ sont définis, par induction, comme suit :

— si $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{S}, \emptyset)$ est un patchwork de degré 0, on dit qu'un foncteur $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{A}$ *définit* (ou même *est*) un *modèle* (noté formellement $\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{A})$) *de* $\boldsymbol{P}$ *vers* $\boldsymbol{A}$ et de *support* $\boldsymbol{g}$ et on note $\boldsymbol{m} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{A}$ (ou même $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{A}$) et $\boldsymbol{g} = \mathrm{SUPP}(\boldsymbol{m})$,

— si $n \geq 0$ est un ordinal, si C est un cône de degré $\leq n$, si H, K sont deux objets de $\mathrm{INDEX}(C)$ et si $\boldsymbol{m'}_H : \mathrm{OPP}_H(C) \to \boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{m'}_K : \mathrm{OPP}_K(C) \to \boldsymbol{A}$ sont des modèles, on dit que le quintuplet $X = (p, (I\,q)_{1 \leq q \leq 2p+1}, (ir)_{1 \leq r \leq p}, (js)_{1 \leq s \leq p}, (\boldsymbol{m''}_q)_{1 \leq q \leq 2p+1})$ est une *C-connexion de* $\boldsymbol{m'}_H$ *vers* $\boldsymbol{m'}_K$, et que $\boldsymbol{m'}_H$ et $\boldsymbol{m'}_K$ sont *C-connectés,* si (on pourra se reporter au Tableau 7, ci-dessous) :

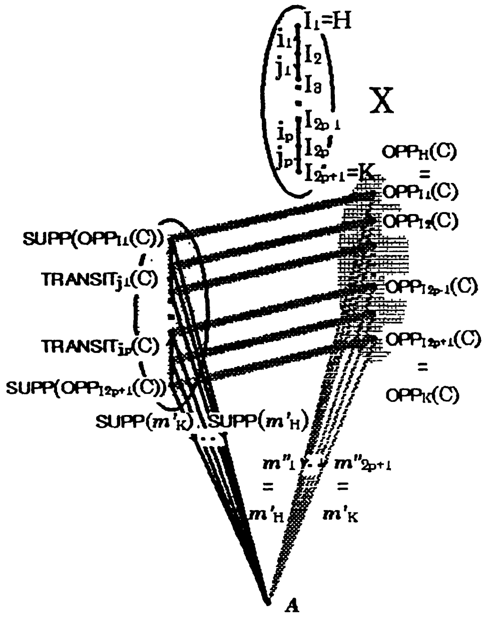


Tableau 7

- p est un entier,
- pour tout entier $1 \leq q \leq 2p+1$, Iq est un objet de INDEX (C),
- pour tout entier $1 \leq r \leq p$, $ir : I2r \rightarrow I2r\text{-}1$ est une flèche de INDEX (C),
- pour tout entier $1 \leq s \leq p$, $js : I2s \rightarrow I2s+1$ est une flèche de INDEX (C),
- pour tout entier $1 \leq q \leq 2p+1$, $\boldsymbol{m}''_q : \mathrm{OPP}_{Iq}(C) \rightarrow \boldsymbol{A}$ est un modèle,
- pour tout entier $1 \leq r \leq p$, on a l'égalité:

$$\mathrm{SUPP}(\boldsymbol{m}''_{2r-1}) \circ \mathrm{TRANSIT}_{ir}(C) = \mathrm{SUPP}(\boldsymbol{m}''_{2r}),$$

- pour tout entier $1 \leq s \leq p$, on a l'égalité :

$$\mathrm{SUPP}(\boldsymbol{m}''_{2s+1}) \circ \mathrm{TRANSIT}_{js}(C) = \mathrm{SUPP}(\boldsymbol{m}''_{2s}),$$

- les deux égalités suivantes sont satisfaites :

$$\boldsymbol{m}'_H = \boldsymbol{m}''_1 \text{ et } \boldsymbol{m}'_K = \boldsymbol{m}''_{2p+1},$$

— si $n \geq 0$ est un ordinal, si C est un cône de degré $\leq n$, si $\boldsymbol{m'}: \mathsf{SOMMET}\,(\mathrm{C}) \to \boldsymbol{A}$ est un modèle, on dit qu'il *satisfait* C si (voir la Note 4) :

- il existe un objet I de $\mathsf{INDEX}\,(\mathrm{C})$ et un modèle $\boldsymbol{m'}_{\mathrm{I}}: \mathsf{OPP}_{\mathrm{I}}(\mathrm{C}) \to \boldsymbol{A}$ pour lesquels on a (on pourra se reporter au Tableau 8, ci-après) :

$$\mathsf{SUPP}\,(\boldsymbol{m'}_{\mathrm{I}}) \circ \mathsf{PROJ}_{\mathrm{I}}\,(\mathrm{C}) = \mathsf{SUPP}\,(\boldsymbol{m'})$$

(alors, on dit que $\boldsymbol{m'}_{\mathrm{I}}$ est une C-*factorisation de* $\boldsymbol{m'}$),

- deux C-factorisations de $\boldsymbol{m'}$ sont C-connectées,

— si $\mathrm{n} \geq 0$ est un ordinal et si $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{S}, \mathcal{F})$ est un patchwork de degré $\leq \mathrm{n}$, on dit qu'un foncteur $\boldsymbol{g}: \mathsf{SUPP}\,(\boldsymbol{P}) \to \boldsymbol{A}$ *définit* (ou même *est*) un *modèle* (noté formellement $\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{A})$) *de* $\boldsymbol{P}$ *vers* $\boldsymbol{A}$ et de *support* $\boldsymbol{g}$ et on note $\boldsymbol{m}: \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{A}$ (ou même $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{A}$) et $\boldsymbol{g} = \mathsf{SUPP}\,(\boldsymbol{m})$ si (on pourra se reporter, de nouveau, au Tableau 8, ci-dessous) :

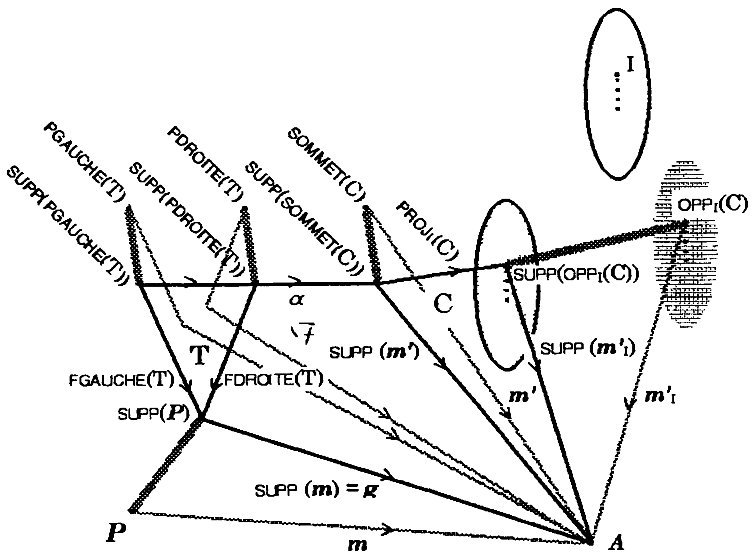


Tableau 8

- dès que $\mathrm{F} = (\mathrm{T}, \alpha, \mathrm{C}) \in \mathcal{F}$ est une figure de degré $< \mathrm{n}$, attachée à $\boldsymbol{P}$, alors $\boldsymbol{g} \circ \mathsf{FGAUCHE}\,(\mathrm{T}): \mathsf{PGAUCHE}\,(\mathrm{T}) \to \boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{g} \circ \mathsf{FDROITE}\,(\mathrm{T}): \mathsf{PDROITE}\,(\mathrm{T}) \to \boldsymbol{A}$ sont deux modèles,

• dès que $\mathrm{F} = (\mathrm{T}, \alpha, \mathrm{C}) \in \mathcal{F}$ est une figure de degré $< \mathrm{n}$, attachée à $\boldsymbol{P}$, et dès que $\boldsymbol{m'} : \text{SOMMET}(\mathrm{C}) \to \boldsymbol{A}$ est un modèle pour lequel on a l'égalité $\text{SUPP}(\boldsymbol{m'}) \circ \alpha = \boldsymbol{g} \circ \text{FDROITE}(\mathrm{T})$, alors $\boldsymbol{m'}$ satisfait C.

Dans ces conditions, si $\boldsymbol{P}$ est un patchwork et si $\boldsymbol{A}$ est une catégorie, on note $\text{ENSMOD}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A})$ l'ensemble des modèles de $\boldsymbol{P}$ vers $\boldsymbol{A}$.

Enfin, si $\boldsymbol{h} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P'}$ est un homomorphisme entre deux patchworks, si $\boldsymbol{A}$ est une catégorie et si $\boldsymbol{m'} : \boldsymbol{P'} \to \boldsymbol{A}$ est un modèle, nous laissons au lecteur le soin de définir le modèle *composé* $\boldsymbol{m'} \circ \boldsymbol{h} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{A}$ (de sorte que le foncteur support du composé soit le composé des foncteurs supports).

Ainsi, on dispose de l'application "composition par $\boldsymbol{h}$" :

$$\text{ENSMOD}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{A}) : \text{ENSMOD}(\boldsymbol{P'}, \boldsymbol{A}) \to \text{ENSMOD}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}).$$

Il n'est pas toujours judicieux de considérer qu'un homomorphisme entre deux modèles (seulement vus comme deux foncteurs particuliers), d'un patchwork donné dans une catégorie donnée, n'est rien d'autre qu'une transformation *naturelle*. Dès lors qu'on voit plus ces deux foncteurs comme des modèles d'une spécification diagrammatique qui peut être très complexe, il peut s'avérer préférable de *spécifier aussi la forme* des transformations - non nécessairement naturelles - souhaitées, et ce à l'aide d'un nouveau patchwork. Autrement dit, les "transformations" désirées, que nous introduisons ici, doivent être "conformes" à un certain "standard" constitué - pour l'essentiel - par une co-catégorie dont *l'objet des objets* est (à quelque nuance près) le patchwork initialement donné et dont *l'objet des flèches* est ce nouveau patchwork. Alors, on peut comparer (cette fois, naturellement!) de tels standards à l'aide de "protocoles" : ce sont eux qui fournissent les foncteurs "modèles sous-jacents".

Ainsi, si $\boldsymbol{A}$ est une catégorie, on dit que le sextuplet $\mathrm{D} = (\boldsymbol{P}, \theta, \boldsymbol{Ecat}, \mathrm{E}_{\mathrm{OB}}, \phi, \mathcal{U}, \mu)$ est un $\boldsymbol{A}$*-standard (catégorique)* *de transformations* si (on pourra se reporter au Tableau 9, ci-dessous) :

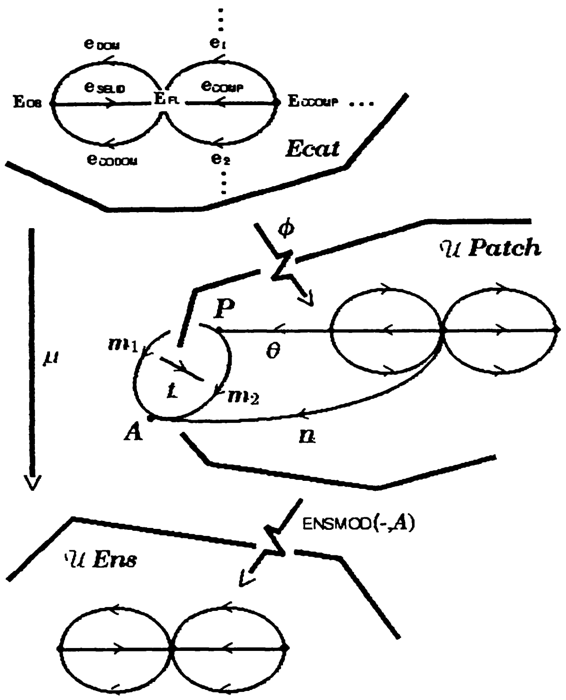


Tableau 9

— $\boldsymbol{P}$ est un patchwork, appelé le *patchwork de référence de* D et noté $\boldsymbol{P}$ = PATCH (D) ,

— ***Ecat*** est l'esquisse des catégories et E_{OB} en est "l'objet des objets" (voir la Note 5), (on peut appeler ***Ecat*** *l'esquisse de référence de* D et E_{OB} *l'objet de référence de* D et noter ***Ecat*** = ESQREF (D) et E_{OB} = OBREF (D) - voir la Note 6),

— $\mathcal{U}$ est un univers, appelé *l'univers de référence de* D et noté $\mathcal{U}$ = UNIV (D) , pour lequel $\boldsymbol{A}$ est $\mathcal{U}$-petite,

— ϕ : (SUPP (***Ecat***)) $^{op} \rightarrow$ $\mathcal{U}$-***Patch*** est un foncteur, appelé le *foncteur de co-représentation relatif à* D et noté ϕ = COREP (D) ,

— $\theta : \phi(E_{OB}) \rightarrow \boldsymbol{P}$ (voir la Note 5) est un homomorphisme entre patchworks, appelé *l'homomorphisme de co-affaiblissement relatif* *à* D et noté $\theta = \mathrm{COAFF}(\mathrm{D})$,

— $\mu : \boldsymbol{Ecat} \to \mathcal{U}\text{-}\boldsymbol{Ens}$ est un modèle de support le foncteur $\mathrm{ENSMOD}(\phi(-), \boldsymbol{A}) : \mathrm{SUPP}(\boldsymbol{Ecat}) \to \mathcal{U}\text{-}\boldsymbol{Ens}$, de sorte que μ est une catégorie (voir la Note 5), qu'on appelle la *catégorie faible relative à* D et qu'on note $\mu = \mathrm{FBLE}(\mathrm{D})$.

Dans ces conditions, si $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2 : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{A}$ sont deux modèles, on dit que $\underline{\boldsymbol{t}} = (\boldsymbol{m}_1, \underline{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{m}_2)$ est une *transformation, conforme au (A-)standard* D, *de* $\boldsymbol{m}_1$ vers $\boldsymbol{m}_2$ *et d'affaiblissement* $\underline{\boldsymbol{n}}$, et on note $\underline{\boldsymbol{t}} : \boldsymbol{m}_1 \to_{\mathrm{D}} \boldsymbol{m}_2$ (ou $\underline{\boldsymbol{t}} : \boldsymbol{m}_1 \to_{\mathrm{D}} \boldsymbol{m}_2 : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{A}$) et $\underline{\boldsymbol{n}} = \mathrm{AFF}_{\mathrm{D}}(\underline{\boldsymbol{t}})$, si (on pourra se reporter, de nouveau, au Tableau 9, ci-dessus) :

— $\underline{\boldsymbol{n}} : \phi(\mathrm{E}_{\mathrm{FL}}) \to \boldsymbol{A}$ (voir la Note 5) est un modèle,

— on a les deux égalités (voir la Note 5) :

$$\underline{\boldsymbol{n}} \circ \phi(\mathrm{e}_{\mathrm{DOM}}) = \boldsymbol{m}_1 \circ \theta \quad \text{et} \quad \underline{\boldsymbol{n}} \circ \phi(\mathrm{e}_{\mathrm{CODOM}}) = \boldsymbol{m}_2 \circ \theta .$$

Alors, on laisse au lecteur le soin de définir la transformation, conforme au standard D, notée $\boldsymbol{t}_2 \cdot_{\mathrm{D}} \boldsymbol{t}_1 : \boldsymbol{m}_1 \to_{\mathrm{D}} \boldsymbol{m}_3$, *composée* de deux transformations, conformes au standard D, consécutives $\underline{\boldsymbol{t}}_1 : \boldsymbol{m}_1 \to_{\mathrm{D}} \boldsymbol{m}_2$ et $\underline{\boldsymbol{t}}_2 : \boldsymbol{m}_2 \to_{\mathrm{D}} \boldsymbol{m}_3$ (et ce de sorte que l'affaiblissement de la composée soit la composée des affaiblissements, dans la catégorie μ).

On lui laisse également le soin de définir la transformation, conforme au standard D, notée $\mathrm{ID}_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{m}) : \boldsymbol{m} \to_{\mathrm{D}} \boldsymbol{m}$, *identité* en un modèle $\boldsymbol{m} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{A}$ (de sorte que son affaiblissement soit l'identité en *l'affaiblissement* $\boldsymbol{m} \circ \theta$ de $\boldsymbol{m}$, dans la catégorie μ).

Ainsi, on dispose de la catégorie (voir la Note 6) $\mathrm{MOD}_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A})$ dont les objets sont les modèles de $\boldsymbol{P}$ vers $\boldsymbol{A}$ et dont les flèches sont les transformations, conformes au standard D, entre ces modèles (et où "la composition est celle des affaiblissements") ; on l'appelle *la catégorie, conforme au (A-)standard* D, *des modèles de* $\boldsymbol{P}$ *vers* $\boldsymbol{A}$ (puisque, par construction, on a :

$$\mathrm{OB}(\mathrm{MOD}_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A})) = \mathrm{ENSMOD}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A})).$$

Si $\boldsymbol{A}$ est une catégorie et si D et D' sont deux $\boldsymbol{A}$-standards (catégoriques) de transformations, on dit que $\mathrm{d} = (\mathrm{D}, \boldsymbol{h}, \underline{\boldsymbol{v}}, \mathrm{D'})$

est un *A-protocole (fonctoriel) de comparaison, allant de* D *vers* D', si (on pourra se reporter au Tableau 10, ci-dessous) :

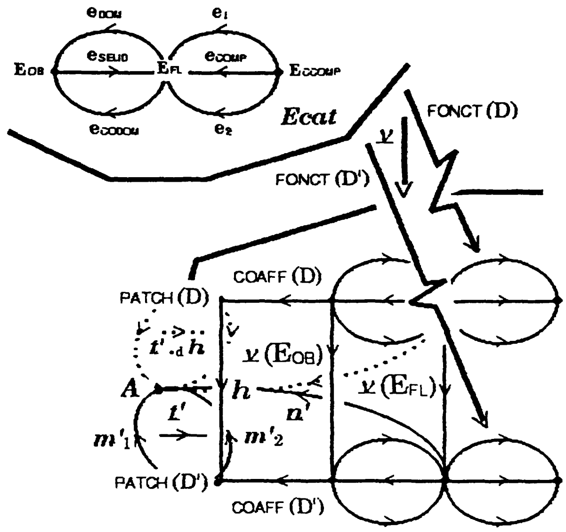


Tableau 10

— $\boldsymbol{h}$: PATCH (D) → PATCH (D') est un homomorphisme entre patchworks,

— on a UNIV (D) ∈ UNIV (D') et UNIV (D') ⊃ UNIV (D),

— $\underline{\nu}$: FONCT (D) → FONCT (D') est une transformation naturelle (en identifiant FONCT (D) : (SUPP (***Ecat***))^{op}→ UNIV (D)-***Patch*** à un foncteur à valeurs dans UNIV (D')-***Patch***),

— on a l'égalité :

$$\boldsymbol{h} \circ \mathrm{COAFF}(\mathrm{D}) = \mathrm{COAFF}(\mathrm{D'}) \circ \underline{\nu}(\mathrm{E_{OB}}).$$

Par conséquent, si $\underline{t}' = (m'_1, \underline{n}', m'_2) : m'_1 \to_{\mathrm{D'}} m'_2$ est une transformation, conforme au standard D', entre les deux modèles m'_1, m_2 : PATCH (D') → $\boldsymbol{A}$, on constate immédiatement que $\underline{t}' \bullet_{\mathrm{d}} \boldsymbol{h} = (m'_1 \circ \boldsymbol{h}, \underline{n}' \circ \underline{\nu}(\mathrm{E_{FL}}), m'_2 \circ \boldsymbol{h}) : m'_1 \circ \boldsymbol{h} \to_{\mathrm{D}} m'_2 \circ \boldsymbol{h}$ est une transformation, conforme au standard D, entre les deux modèles (composés par $\boldsymbol{h}$) $m'_1 \circ \boldsymbol{h}, m'_2 \circ \boldsymbol{h}$: PATCH (D) → $\boldsymbol{A}$ (on pourra se reporter, de nouveau, au Tableau 10, ci-dessus).

Clairement, on définit ainsi un foncteur (voir la Note 6) :

$$\mathrm{MOD}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{A}) : \mathrm{MOD}_{\mathrm{D'}}(\mathrm{PATCH}(\mathrm{D'}), \boldsymbol{A}) \to \mathrm{MOD}_{\mathrm{D}}(\mathrm{PATCH}(\mathrm{D}), \boldsymbol{A})\ ;$$

on l'appelle le *foncteur modèle sous-jacent par* $\boldsymbol{h}$, *conforme au (*$\boldsymbol{A}$*-)protocole* d .

Notes

Note 1. On raisonne dans un modèle de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel, avec axiome du choix et axiome des univers.
En particulier, si $\mathcal{U}$ est un univers, nous disons d'un ensemble qu'il est *$\mathcal{U}$-petit* s'il est élément de l'univers $\mathcal{U}$. De même, nous disons d'une structure (par exemple, d'une catégorie) qu'elle est *$\mathcal{U}$-petite* (resp. *localement $\mathcal{U}$-petite*) si tous (resp. "certains") des ensembles qui la constituent sont $\mathcal{U}$-petits.

Ainsi, nous ne raisonnons pas dans un modèle de la théorie des "ensembles et classes", à la Bernays-Gödel-Von Neumann. Autrement dit, nous ne procédons pas aux distinctions (habituelles) entre structures (par exemple, catégories) petites et structures qui ne le seraient pas (ou qui ne seraient que "localement" petites). Cependant, du point de vue que nous adoptons, on dispose d'une assez bonne interprétation de cette hiérarchie des "tailles" (du moins, pour l'usage qu'on en fait, usuellement) dès que l'on se donne deux univers $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ tels que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{U}$: les ensembles $\mathcal{U}$-petits y jouent le rôle de "tous" les ensembles et les ensembles $\mathcal{V}$-petits celui de "toutes" les classes et, de même, les structures (localement) $\mathcal{U}$-petites y jouent le rôles de toutes les structures (localement) petites et les structures $\mathcal{V}$-petites celui de "toutes" les structures "grosses" (i. e. sur des classes).

Note 2. On rappelle qu'un *graphe (partiellement) à composition* G est constitué par :
— un ensemble (re-voir la Note 1) d'*objets* $\mathrm{OB}(G)$,
— une partie $\mathrm{OBID}(G)$ de $\mathrm{OB}(G)$, dite ensemble des objets *identifiés*,
— un ensemble de *flèches* $\mathrm{FL}(G)$,

— une partie $\mathrm{FLCOMP}(G)$ de $\mathrm{FL}(G) \times \mathrm{FL}(G)$, dite ensemble des *couples composables de flèches,* ou encore des *couples de flèches composables,*
— une application *sélection des domaines* :

$$\mathrm{DOM}(G) : \mathrm{FL}(G) \to \mathrm{OB}(G),$$

— une application *sélection des codomaines* :

$$\mathrm{CODOM}(G) : \mathrm{FL}(G) \to \mathrm{OB}(G),$$

— une application *sélection des identités* :

$$\mathrm{SELID}(G) : \mathrm{OBID}(G) \to \mathrm{FL}(G),$$

— une application *composition* :

$$\mathrm{COMP}(G) : \mathrm{FLCOMP}(G) \to \mathrm{FL}(G),$$

et ce, de sorte que :
— pour tout objet identifié G, on a :

$$\mathrm{DOM}(\mathrm{SELID}(\mathrm{G})) = \mathrm{G} = \mathrm{CODOM}(\mathrm{SELID}(\mathrm{G})),$$

— pour tout couple (g', g) de flèches composables, on a :

$$\mathrm{DOM}(g') = \mathrm{CODOM}(g),$$

(il est donc nécessaire que deux flèches soient *consécutives* pour être composables mais ce n'est pas, en général, suffisant),
— pour tout couple (g', g) de flèches composables, on a :

$$\mathrm{DOM}(g' \cdot g) = \mathrm{DOM}(g)) \text{ et } \mathrm{CODOM}(g' \cdot g) = \mathrm{CODOM}(g'),$$

(en posant, évidemment, $\mathrm{COMP}(g', g) = g' \cdot g$),
— pour tout objet identifié G et toute flèche g tels que $\mathrm{DOM}(g) = \mathrm{G}$ (resp. $\mathrm{CODOM}(g) = \mathrm{G}$), le couple de flèches $(g, \mathrm{SELID}(\mathrm{G}))$ (resp. $(\mathrm{SELID}(\mathrm{G}), g))$ est composable et on a :

$$g \cdot \mathrm{SELID}(\mathrm{G}) = g$$

$$(\text{resp. } \mathrm{SELID}(\mathrm{G}) \cdot g = g).$$

En particulier, on dit qu'un tel graphe à composition G est *identitaire* si tout objet y est identifié, i. e. si $\mathrm{OBID}(G) = \mathrm{OB}(G)$.

Par exemple, on voit que :
— un graphe (au sens de (C.F.W.M.), notamment) s'identifie à un graphe à composition où l'ensemble des objets identifiés est minimal (i. e. vide), ainsi que celui des couples de flèches composables,
— un graphe *orienté* (au sens, standard, de (C.A.S.T.), par

exemple) s'identifie à un graphe à composition où l'ensemble des objets identifiés est maximal et, ceci acquis, où celui des couples de flèches composables est minimal,

— il est, dès lors, loisible d'appeler *graphe (partiellement) à identités* un graphe à composition où l'ensemble des objets identifiés est quelconque, mais où, ceci étant, l'ensemble des couples de flèches composables est minimal (de sorte que les graphes et les graphes orientés en sont des cas particuliers "extrèmes" et "opposés"),

— les graphes *multiplicatifs* de (C.A.S.T.) (encore appelés graphes compositifs en (C.Q.C.E.)) s'identifient aux graphes à composition ayant des ensembles d'objets identifiés maximaux (et des ensembles de couples de flèches composables quelconques), i. e. aux graphes à composition identitaires,

— les catégories s'identifient aux graphes à composition ayant des ensembles d'objets identifiés maximaux, des ensembles de couples de flèches composables maximaux, ainsi qu'une composition associative.

En tout état de cause, il est facile de définir ce qu'est un *foncteur* d'un graphe à composition vers un autre : il doit évidemment commuter aux opérations sélection des domaines et sélection des codomaines, aux objets identifiés et à l'opération sélection des identités, aux couples de flèches composables et à l'opération de composition. En particulier, on définit sans difficulté le foncteur *identité* en un graphe à composition, ou encore le foncteur *composé* de deux foncteurs consécutifs entre graphes à composition.

De même, il est aisé de définir ce qu'est une *transformation naturelle* entre deux foncteurs, d'un graphe à composition *vers une catégorie*, en procédant par simple analogie avec le cas - usuel - où le graphe à composition domaine est une catégorie (par contre, ce serait beaucoup plus délicat si c'était la catégorie co-domaine qu'on remplaçait par un graphe à composition).

Note 3. Pour simplifier, on peut se contenter de définir les patchworks de degrés finis (voire les patchworks de degré fini fixé), i. e. se limiter à une récurrence *ordinaire,* en considérant que l'ordinal $n \geq 0$ de la définition générale est seulement un entier.
De la sorte, il apparait que les figures attachées à un patchwork de degré fini l'entier $n \geq 0$ sont toutes de degrés $< n$, donc majorés par n. Cependant, dans la pratique, même si on ne s'autorise à attacher aux patchworks utilisables que des figures de degrés finis, cette clause de majoration peut être trop contraignante. Dans ce cas, il convient de "pousser" la récurrence (au moins) jusqu'à l'ordre $\aleph_0$ (compris). Ainsi, les figures attachées aux patchworks de degrés $\leq \aleph_0$ sont toutes de degrés finis (mais non nécessairement majorés) : on dira qu'il s'agit de patchworks *finitistes* (à défaut d'être nécessairement finis, ou de degrés finis, et préfèrant ne pas les qualifier de *finitaires*).
Finalement, pour définir les patchworks "généraux" qui peuvent se révéler utiles, on voit qu'on est naturellement conduit à amorcer une récurrence effectivement transfinie, qu'il n'est pas illégitime de pouvoir pousser "aussi loin" qu'on le désire (pour éviter des clauses de majoration trop restrictives).

Ceci admis, on peut évidemment présenter les patchworks par induction de diverses manières. L'une d'entre elle, qui paraîtrait plus "classique" que celle que nous avons adoptée, consisterait à définir, d'abord, les patchworks de degré *égal* à l'ordinal $n \geq 0$, à partir de ceux dont les degrés sont *égaux* à des ordinaux strictement plus petits. Contrairement à notre présentation (que nous avons choisie notamment pour cette raison) ceci nécessiterait deux constructions *différentes,* selon que l'ordinal n a un prédecesseur ou est limite (mais c'est sans doute en cela que cette autre présentation paraîtrait plus classique).
Cependant, partant de notre présentation, on définit facilement (et nous laissons ce soin au lecteur) les triangles, les cônes et les

patchworks de degrés strictement inférieurs à un ordinal $n \geq 0$ (au même titre que les figures de degrés $< n$, dont nous avons explicitement besoin dans notre induction), puis les triangles, les cônes, les figures et les patchworks de degré égal à un ordinal $n \geq 0$.

Note 4. Supposons que $\mathcal{U}$ est un univers et que $\boldsymbol{A}$ est une catégorie $\mathcal{U}$-petite (alors, pour tout graphe à composition $\mathcal{U}$-petit $\boldsymbol{G}$, on note $\mathrm{ENSFONCT}\,(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{A})$ l'ensemble - qui est $\mathcal{U}$-petit - des foncteurs de $\boldsymbol{G}$ vers $\boldsymbol{A}$).

Si $\boldsymbol{P}$ est un patchwork $\mathcal{U}$-petit et si F est une figure qui lui est attachée (pour laquelle on pose successivment : $\mathrm{C} = \mathrm{CONE}\,(\mathrm{F})$, $\boldsymbol{I} = \mathrm{INDEX}\,(\mathrm{C})$, $\Sigma = \mathrm{SOMMET}\,(\mathrm{C})$ et, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$, $\Omega_{\mathrm{I}} = \mathrm{OPP}_{\mathrm{I}}\,(\mathrm{C})$ et $\pi_{\mathrm{I}} = \mathrm{PROJ}_{\mathrm{I}}\,(\mathrm{C})$), alors on peut construire, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$, le produit fibré (dans $\mathcal{U}$-***Ens***) représenté par le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{X}_{\mathrm{I}} \arrow[dl, "\mathrm{p'}_{\mathrm{I}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{p}_{\mathrm{I}}"] & \\
\mathrm{ENSMOD}\,(\Omega_{\mathrm{I}}, \boldsymbol{A}) \arrow[d, "\mathrm{SUPP}\,(\ )"'] & & \mathrm{ENSMOD}\,(\Sigma, \boldsymbol{A}) \arrow[ddl, "\mathrm{SUPP}\,(\ )"] \\
\mathrm{ENSFONCT}\,(\mathrm{SUPP}\,(\Omega_{\mathrm{I}}), \boldsymbol{A}) \arrow[dr, "\pi_{\mathrm{I}} \circ (\cdot)"'] & & \\
 & \mathrm{ENSFONCT}\,(\mathrm{SUPP}\,(\Sigma), \boldsymbol{A}) &
\end{tikzcd}
$$

Ainsi, on dispose d'un cône inductif d'applications $\mathrm{p} = (\mathrm{p}_{\mathrm{I}} : \mathrm{X}_{\mathrm{I}} \to \mathrm{ENSMOD}\,(\Sigma, \boldsymbol{A}))_{\mathrm{I} \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}}$ et, comme $\mathcal{U}$ ***Ens*** est à colimites d'indexations $\mathcal{U}$-petites, il existe une unique application $\mathrm{COFACT}\,(\mathrm{p}) : \mathrm{COLIM}\,(\mathrm{X}_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I} \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}} \to \mathrm{ENSMOD}\,(\Sigma, \boldsymbol{A})$ rendant, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$, le diagramme ci-dessous commutatif :

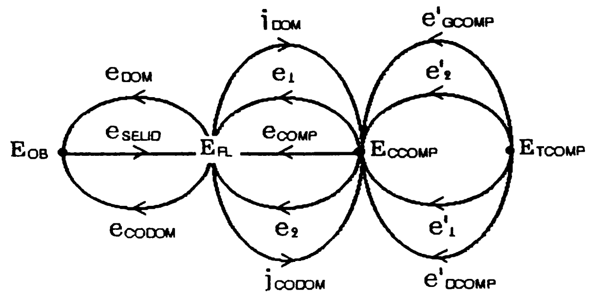
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{COLIM}\,(X_i)_{i \in I} \arrow[rr, "\mathrm{COFACT}\,(p)"] & & \mathrm{ENSMOD}\,(\Sigma, A) \\
& X_i \arrow[ul, "\mathrm{COPROJ}_i"] \arrow[ur, "p_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Alors, connaissant la construction des colimites $\mathcal{U}$-petites dans $\mathcal{U}$-*Ens*, on voit qu'un modèle $m' : \Sigma \to A$, i. e. un élément $m' \in \mathrm{ENSMOD}\,(\Sigma, A)$, satisfait C si, et seulement si, il possède un unique antécédent par $\mathrm{COFACT}\,(\kappa)$.

Note 5. On rappelle (voir (I.T.S.C.) et/ou (E.T.S.A.) et/ou (C.Q.C.E.)) qu'une *esquisse* E est constituée par :
— un graphe à composition $\mathrm{SUPP}\,(E)$, appelé le *support de* E,
— un ensemble (voir la Note 1) $\mathrm{PRDIST}\,(E)$ de cônes projectifs de $\mathrm{SUPP}\,(E)$, dits *distingués,*
— un ensemble $\mathrm{INDIST}\,(E)$ de cônes inductifs de $\mathrm{SUPP}\,(E)$, dits *distingués,*
(on montre facilement que toute esquisse s'identifie à un patchwork de degré ≤ 2, mais ceci est sans importance ici).
Dans ces conditions, si A est une catégorie, on dit que $\mu = (E, \phi, A)$ est un *modèle* de E vers A, et on note $\mu : E \to A$, si :
— $\phi : \mathrm{SUPP}\,(E) \to A$ est un foncteur (dont on dit, également, qu'il *définit* μ), qu'on appelle le *support* de μ et qu'on note $\phi = \mathrm{SUPP}\,(\mu)$,
— ϕ transforme tout cône projectif distingué de E en un cône limite projective dans la catégorie A,
— ϕ transforme tout cône inductif distingué de E en un cône limite inductive dans la catégorie A.

En particulier, l'esquisse ***Ecat*** (dite *esquisse des catégories,* bien que nombre d'autres mériteraient cet intitulé) est définie comme suit :

— son support est le graphe à composition engendré par le graphe à identités (re-voir la Note A) représenté ci-dessous et les équations qui suivent :



$$e_{DOM} \cdot e_{SELID} = ID(E_{OB}) = e_{CODOM} \cdot e_{SELID},$$

$$e_{DOM} \cdot e_1 = e = e_{CODOM} \cdot e_2 \; ,$$

$$e_{DOM} \cdot e_{COMP} = e_{DOM} \cdot e_2 ,$$

$$e_{CODOM} \cdot e_{COMP} = e_{CODOM} \cdot e_1 ,$$

$$e_1 \cdot j_{DOM} = ID(E_{FL}),$$

$$e_2 \cdot j_{DOM} = e_{SELID} \cdot e_{DOM} ,$$

$$e_1 \cdot j_{CODOM} = e_{SELID} \cdot e_{CODOM} ,$$

$$e_2 \cdot j_{CODOM} = ID(E_{FL}),$$

$$e_{COMP} \cdot j_{DOM} = ID(E_{FL}),$$

$$e_{COMP} \cdot j_{CODOM} = ID(E_{FL}),$$

$$e_2 \cdot e'_1 = e' = e_1 \cdot e'_2 ,$$

$$e_1 \cdot e'_{GCOMP} = e_{COMP} \cdot e'_1 ,$$

$$e_2 \cdot e'_{GCOMP} = e_2 \cdot e'_2 ,$$

$$e_1 \cdot e'_{DCOMP} = e_1 \cdot e'_1 ,$$

$$e_2 \cdot e'_{DCOMP} = e_{COMP} \cdot e'_2 ,$$

— les deux cônes projectifs représentés ci-dessous sont distingués :

$$\begin{tikzcd}
 & E_{CCOMP} \arrow[dl, "e_1"'] \arrow[dr, "e_2"] \arrow[dd, "e"] & \\
E_{FL} \arrow[dr, "e_{DOM}"'] & & E_{FL} \arrow[dl, "e_{CODOM}"] \\
 & E_{OB} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & E_{TCOMP} \arrow[dl, "e'_1"'] \arrow[dr, "e'_2"] \arrow[dd, "e'"] & \\
E_{CCOMP} \arrow[dr, "e_2"'] & & E_{CCOMP} \arrow[dl, "e_1"] \\
 & E_{FL} &
\end{tikzcd}$$

— aucun cône inductif n'est distingué.

Alors, si $\mathcal{U}$ est un univers, à tout modèle $\mu : \mathbf{Ecat} \to \mathcal{U}\text{-}\mathbf{Ens}$ est clairement associée une catégorie $\mathrm{CAT}(\mu)$ (évidemment $\mathcal{U}$-petite), pour laquelle on a (notamment) :

— $\mathrm{OB}(\mathrm{CAT}(\mu)) = \mu(E_{OB})$,

— $\mathrm{FL}(\mathrm{CAT}(\mu)) = \mu(E_{FL})$,

— pour tout (objet) $C \in \mathrm{OB}(\mathrm{CAT}(\mu))$, on a :

$$\mathrm{ID}(C) = \mu(e_{SELID})(C),$$

— pour tout(e) (flèche) $c \in \mathrm{FL}(\mathrm{CAT}(\mu))$, on a :

$\mathrm{DOM}(c) = \mu(e_{DOM})(c)$ et $\mathrm{CODOM}(c) = \mu(e_{CODOM})(c)$,

— pour toutes flèches (consécutives) $c : C \to C'$ et $c' : C' \to C''$, on a :

$c' \cdot c = \mu(e_{COMP})(< c', c >)$,

lorsqu'on désigne par $< c', c >$ l'unique élément de $\mu(E_{CCOMP})$ tel que $\mu(e_1)(< c', c >) = c'$ et $\mu(e_2)(< c', c >) = c$ (cet élément existe et est unique, puisque le diagramme commutatif ci-dessous est un profuit fibré dans la catégorie $\mathcal{U}$-**Ens** :

$$\begin{tikzcd}
 & {<c',c> \in \mu(E_{CCOMP})} \arrow[dl, "\mu(e_1)"'] \arrow[dr, "\mu(e_2)"] & \\
c' \in \mu(E_{FL}) \arrow[dr, "\mu(e_{DOM})"'] & & c \in \mu(E_{FL}) \arrow[dl, "\mu(e_{CODOM})"] \\
 & C \in \mu(E_{OB}) &
\end{tikzcd}$$

).

Usuellement, il n'y a aucun inconvénient à exciper de "la catégorie

μ " , i. e. à identifier le modèle $\mu : \boldsymbol{Ecat} \to \mathcal{U}\text{-}\boldsymbol{Ens}$ (ou même son foncteur support) à la ("vraie") catégorie $\mathrm{CAT}(\mu)$ qu'il définit.

Note 6. Dans la définition des $\boldsymbol{A}$-standards catégoriques, on peut évidemment substituer à l'esquisse (de catégories) pointée (par son objet des objets) $(\boldsymbol{Ecat}, \mathrm{E_{OB}})$ une (quelconque) autre esquisse pointée (par un - quelconque - de ses objets) $(\boldsymbol{E}, \mathrm{E})$. On obtient de la sorte des "$\boldsymbol{A}$-standards de structures" (autres que celles de catégories) dont l'ensemble $\mathrm{ENSMOD}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A})$ peut être muni (i. e. peut-être l'ensemble "des éléments de sorte E " sous-jacent). De même, on peut définir les "$\boldsymbol{A}$-protocoles de comparaison entre structures" (autres que des foncteurs entre catégories) dont l'application :

$$\mathrm{ENSMOD}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{A}) : \mathrm{ENSMOD}(\boldsymbol{P'}, \boldsymbol{A}) \to \mathrm{ENSMOD}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A})$$

peut être l'application sous-jacente ("de sorte E " , i. e. entre les ensembles d'éléments de sorte E sous-jacents).

Plus généralement, on pourrait même substituer à ces esquisses des ... patchworks (sans pour autant créer de cercle vicieux !).

Bibliographie

(C.A.S.T.) **C. Ehresmann**, Catégories et Structures, Dunod (1965).

(C.F.W.M.) **S. MacLane**, Categories for the Working Mathematician, Springer (1971).

(C.Q.C.E.) **C. Lair**, Catégories Qualifiables et Catégories Esquissables, Diagrammes 17, Paris (1987).

(E.T.S.A.) **C. Ehresmann**, Esquisses et Types des Structures Algébriques, Bull. Instit. Polit. Iasi, XIV (1968).

(I.T.S.C.) **C. Ehresmann**, Introduction to the Theory of Structured Categories, Techn. Report 10, Univ. of Kansas, Lawrence (1966).

(S.C.S.T.) **C. Lair**, Trames et Sémantiques Catégoriques des Systèmes de Trames, Diagrammes 18, Paris (1987).

Table

UNIVERSITE PARIS 7
U.F.R. de Mathématiques
Tours 45-55-5ème étage
2, place JUSSIEU
75251 PARIS CEDEX 05
FRANCE