Philippe Robba

Indice d'un opérateur différentiel

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 1 (1973-1974), exp. nº 2, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1973-1974__1__A2_0>

Groupe de travail d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, A. ESCASSUT, P. ROBBA)
1973/74, n° 2, 14 p.
26 novembre et 3 décembre 1973

INDICE D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL

par Philippe ROBBA

0. Présentation.

Dans cet exposé, on conserve les notations de l'exposé précédent [2] que l'on ne rappellera pas.

Au paragraphe 1, on indique comment la propriété de factorisation de l'opérateur différentiel L, associée aux solutions bornées du noyau de L ([2], théorème 5.8)), se généralise lorsqu'on considère les fonctions du noyau de L ayant une croissance donnée au bord (théorème 1.4).

Nous montrons qu'une équation différentielle linéaire non homogène, dont le deuxième membre est analytique dans le disque générique, a toujours une solution analytique dans le disque générique, et nous indiquons une majoration pour la croissance de ces solutions (théorème 4.2).

Dans certains cas, nous obtenons des résultats semblables dans d'autres disques. Ceci arrive, en gros, soit quand toutes les solutions non triviales de $Lu = 0$ sont analytiques dans ces disques, soit quand aucune de ces solutions n'est analytique dans ces disques. Mais la propriété de surjectivité de L doit être remplacée par une propriété de finitude de la dimension du conoyau de L (théorèmes 2.3 et 3.1). Un résultat plus général est une conséquence de la conjecture 5.12 de [2] (théorème 5.2).

La propriété pour L d'avoir seulement la solution triviale pour l'équation homogène, dans le disque générique, s'avère stable pour de petites déformations, et l'indice correspondant de cet opérateur demeure aussi constant pour ces déformations (théorème 6.1).

Enfin au paragraphe 7, nous étudions l'équation $Lu = v$, non plus dans l'espace des fonctions analytiques dans un disque, mais dans l'espace des éléments analytiques sur un ensemble analytique. Ce que nous gagnons sur le support, nous le perdons sur la croissance au bord des fonctions puisque les éléments analytiques sont bornés. Ainsi qu'il résulte de la proposition 2.6, on ne peut établir une propriété d'indice que pour les opérateurs L tels que $Lu = 0$ n'admet que 0 comme solution analytique dans le disque générique. On obtient une estimation de l'indice, et on démontre une propriété de prolongement analytique pour les solutions de l'équation différentielle.

Nous supposerons dans cet exposé que le corps de reste $\overline{K}$ de K est de caractéristique $p \neq 0$. Certains résultats (en particulier la proposition 2.6 et ses conséquences) ne sont vrais que dans ce cas. Signalons cependant que le cas, où cette caractéristique est nulle, peut être traité de façon similaire. En fait, dans ce dernier cas, la théorie est plus complète (par exemple l'analogue du théorème 5.2 s'obtient sans faire appel à la conjecture 5.12 de [2]) et plus simple (par exemple la croissance des solutions est toujours égale à celle du deuxième membre). Le lecteur intéressé trouvera tous les détails dans [3], où l'on trouvera également les démonstrations complètes de résultats exposés ici. Les résultats du paragraphe 7 sont exposés dans [4].

1. Le théorème de factorisation.

1.1. Soit $\pi = (\pi_n)$ une suite de nombres réels positifs avec

(1.1.1) $\quad \pi_0 = 1 \;,\; \pi_n \leq \pi_{n+1} \quad$ et $\quad \dfrac{\pi_{n+1}}{\pi_n} \leq \dfrac{\pi_{n+2}}{\pi_{n+1}}$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$.

Soit W_a^π l'espace de Banach des germes de fonctions analytiques au point a, $u = \sum_{n=0}^\infty b_n(x - a)^n$, tels que

(1.1.2) $$\sup_n |b_n|\, \pi_n < +\infty \;,$$

muni de la norme $u \longmapsto \|u\|_\pi = \sup_n \pi_n |b_n|$.

1.2. Exemple : Soient $0 < \rho \leq 1$, $\alpha \geq 0$, et soit $\pi^{\rho,\alpha} = (\rho^n/(n + 1)^\alpha)$. L'espace associé $W_a^{\pi^{\rho,\alpha}}$ que l'on notera $W_a^{\rho,\alpha}$ (ou encore W_a^α si $\rho = 1$) est l'espace des fonctions analytiques dans $D(a , \rho^-)$ avec une croissance logarithmique d'ordre α (cf. [2] lemme 1.6).

1.3. Observons que la suite $\rho_n = \pi_{n+1}/\pi_n$ étant croissante, et majorée par 1, converge vers une limite $\rho \leq 1$. On peut montrer que les fonctions de W_a^π sont analytiques dans le disque $D(a , \rho^-)$. Si alors on prend $\alpha \in D(a , \rho^-)$, W_a^π et W_α^π étant des sous-espaces du même espace $\mathfrak{A}_a^\rho = \mathfrak{A}_\alpha^\rho$, cela a un sens de les comparer.

LEMME. - <u>Soit</u> π <u>satisfaisant</u> (1.1.1). <u>Soit</u> r <u>tel que</u> $\pi_{n+1}/\pi_n > r > 0$ <u>pour tout</u> n (resp. $\lim_{n\to\infty} \pi_{n+1}/\pi_n \geq r$) . <u>Si</u> a <u>et</u> α <u>satisfont</u> $|a - \alpha| < r$, <u>alors</u> W_a^π <u>et</u> W_α^π <u>sont équivalents avec la même norme</u> (resp. <u>avec une norme équivalente</u>).

Nous avons donné ce lemme surtout pour aider à comprendre la nature des espaces W_a^π . Ce lemme sert dans certaines démonstrations que nous ne ferons pas ici.

1.4. Si $L \in \mathfrak{D}$, L définit un élément de $\mathfrak{L}(W_t^\pi , W_t^\pi)$, on peut donc munir L de la norme d'opérateur $\|L\|_\pi$. On a $\|\sum (c_m D^m)/m!\|_\pi = \sup_m |c_m|/\pi_n$.

Le théorème 5.8 de [2] se généralise de la façon suivante.

THÉORÈME. - <u>Soit</u> $L \in \mathfrak{D}$. <u>Soit</u> R <u>le générateur unitaire de l'idéal</u> $\overline{\mathfrak{D}L}$ (<u>fermeture pour la topologie définie par</u> $\| \;\|_\pi$). <u>On a</u>

$$\mathrm{Ker}_t\, R = \mathrm{Ker}_t\, L \cap W_t^\pi$$

(Démonstration identique à celle du théorème 5.8 de [2]).

1.5. Ce théorème ne permet pas hélas de généraliser les résultats de [2], paragraphe 6.

2. Indice de l'opérateur L. Cas d'un disque, noyau trivial pour L.

2.1. On dira que L a un 0-noyau au point générique t si

$$\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{A}_t = \{0\} .$$

2.2. Soient U et V deux espaces vectoriels sur Ω, soit $A \in L(U, V)$. On dit que A a un indice si

$$\dim \mathrm{Ker}\, A < +\infty \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{coKer}\, A < +\infty .$$

L'indice de A sera noté

$$\chi(A) = \dim \mathrm{Ker}\, A - \dim \mathrm{coKer}\, A .$$

$\chi(A)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe

$$0 \to U \to V \to 0 \to 0 \ldots$$

2.3. Dans ce paragraphe nous voulons établir le théorème suivant.

THÉORÈME. - Soit L un opérateur différentiel à coefficients dans $K[x]$ et avec un 0-noyau au point t.

(i) Pour tout $a \in D(0, 1^+)$, L, en tant qu'élément de $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_a, \mathfrak{A}_a)$, est injectif, et a un indice $\chi_a(L)$.

(ii) Il existe $\rho < 1$, dépendant de a, tel que, pour $\rho \leq \rho' \leq 1$

$$(\text{resp. } \lim_{n\to\infty} \pi_{n+1}/\pi_n \geq \rho) ,$$

L, en tant qu'élément de $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_a^{\rho'}, \mathfrak{A}_a^{\rho'})$ (resp. (W_a^{π}, W_a^{π})), est injectif, et a le même indice $\chi_a(L)$. De plus, si $u \in \mathfrak{A}_a^{\rho}$ et $Lu \in \mathfrak{A}_a^{\rho'}$ (resp. W_a^{π}), alors $u \in \mathfrak{A}_a^{\rho'}$ (resp. W_a^{π}). En particulier, ces résultats sont vrais dans $W_a^{\rho',\alpha}$.

(iii) Pour toutes les classes résiduelles, sauf un nombre fini, $\chi_a(L) = 0$, c'est-à-dire L est surjectif dans $\mathfrak{A}_a$. Ceci a lieu, en particulier, dans le disque générique.

2.4. Propriétés de l'indice.

2.4.1. Si V est métrique complet (Fréchet), si $A \in \mathcal{L}(V, V)$ (c'est-à-dire est continu), et si A a un indice, alors $\mathrm{Im}\, A$ est fermé.

(Ceci résulte du théorème de Banach.)

2.4.2. Si deux des trois opérateurs A, B, AB de $L(V, V)$ ont des indices, le troisième a aussi un indice, et

$$\chi(AB) = \chi(A) + \chi(B) .$$

2.4.3. Soit V un Fréchet. $A \in \mathcal{L}(V, V)$ est injectif, et a un indice si, et seulement si, il possède un inverse à gauche A' continu avec un indice.

2.4.4. Soient V un Banach, $A \in \mathcal{L}(V , V)$, injectif avec un indice, et A' un inverse à gauche. Si $B \in \mathcal{L}(V , V)$, $\|B - A\| < 1/\|A'\|$, alors B a un indice, et $\chi(B) = \chi(A)$; de plus, B a un inverse à gauche, B', avec $\|B'\| \leq \|A'\|$.

2.4.5. Soient V un Fréchet, et U un sous-espace dense. Soit $A \in \mathcal{L}(V , V)$ tel que $A(U) \subset U$, et supposons que A a un indice en tant qu'élément de $\mathcal{L}(V,V)$ et de $L(U , U)$. Alors

$$\chi_U(A) \leq \chi_V(A) .$$

[On a évidemment $\mathrm{Ker}_U(A) \subset \mathrm{Ker}_V(A)$. De plus, soit $k = \dim \mathrm{coKer}_V(A)$, il existe k formes linéaires continues sur V, linéairement indépendantes, qui annulent $\mathrm{Im}_V(A)$. Mais comme U est dense dans V, ces formes sont linéairement indépendantes sur U, et annulent $\mathrm{Im}_U(A)$. Donc, $\dim \mathrm{coKer}_U A \geq \dim \mathrm{coKer}_V A$.]

2.4.6. Propriété de régularité. - Soient V, U et A comme en 2.4.5. Soit, de plus, $\chi_U(A) = \chi_V(A)$. Alors, si $u \in V$ et $Au \in U$, on a $u \in U$.

[Il résulte en effet de la démonstration de 2.4.5 que l'on a alors $\mathrm{Ker}_U A = \mathrm{Ker}_V A$ et $\mathrm{Im}_U A = \mathrm{Im}_V A \cap U$.]

2.5. On peut appliquer la propriété 2.4.6 à la situation suivante. Soit U_n une suite décroissante de Fréchet, avec U_n dense dans U_{n-1}. Soit $U = \lim\mathrm{proj}\, U_n$. Soit $A \in \mathcal{L}(U , U)$ tel que $A \in \mathcal{L}(U_n , U_n)$ pour tout n, et a un indice $\chi_{U_n}(A) = \chi$ indépendant de n. Alors A a un indice dans U qui est χ.

Nous sommes intéressés par le cas $U = \mathfrak{A}_a^\rho$. On a bien $\mathfrak{A}_a^\rho = \lim\mathrm{proj}\, W_a^{r_n,0}$, où $r_n \uparrow \rho$. Mais $W_a^{r,0}$ n'est pas dense dans $W_a^{r',0}$ pour $r > r'$. On doit donc considérer l'espace $\mathring{W}_a^{r,0}$, adhérence dans $W_a^{r,0}$ du sous-espace des fonctions polynômes. On a encore

$$\mathfrak{A}_a^\rho = \lim\mathrm{proj}_{r<\rho}\, \mathring{W}_a^{r,0} .$$

2.6. PROPOSITION. - Soit L à coefficients dans $K[x]$. Si $\mathrm{Ker}_a L \cap W_a^{\rho,0} \neq \{0\}$, L n'a pas d'indice dans $W_a^{\rho,0}$.

(C'est ici que l'on utilise l'hypothèse que le corps de restes $\overline{K}$ est de caractéristique $p \neq 0$.)

Démonstration. - On commence par construire une suite de fonctions u_k, qui sont linéairement indépendants modulo $W_a^{\rho,0}$, mais dont les dérivées u_k' appartiennent à $W_a^{\rho,0}$.

Soit $u \in W_a^{\rho,0}$ tel que $Lu = 0$, $u \neq 0$. Les fonctions $u_k u$ sont linéairement indépendantes modulo $W_a^{\rho,0}$ et, sauf pour un nombre fini, modulo $\mathrm{Ker}_a L \cap W_a^{\rho,0}$.

Mais $Lu_k u = u_k Lu + \Sigma_k = \Sigma_k$, où $\Sigma_k \in W_a^{\rho,0}$, car il n'y apparaît que les dérivées de u_k et pas u_k lui-même.

Sauf un nombre fini, les fonctions Σ_k sont donc linéairement indépendantes modulo $L(W_a^{\rho,0})$, donc $\dim \operatorname{coKer} L = +\infty$.

2.7. LEMME. - Si $p \in K[x]$ a z zéros dans $D(a\,,1^-)$ qui sont situés dans $D(a\,,r^-)$, $r < 1$, et si π satisfait (1.1.1) et $\pi_{n+1}/\pi_n \geq r$ pour tout n , alors la multiplication par p a un inverse à gauche σ dans $\mathcal{L}(W_a^\pi\,,W_a^\pi)$ avec $\|\sigma\|_{W_a^\pi} \leq 1/(|p|r^z)$. L'indice de p est $\chi(p) = -z$.

La valeur de l'indice traduit le fait que u est de la forme pv si u s'annule aux mêmes points que p dans $D(a\,,r^-)$, avec le même ordre.

2.8. Observons que l'on a enfin pour $L = \sum(c_m\,D^m)/m!$, avec $c_m \in K[x]$:

$$\|L\|_{W_a^\pi} \leq \sup_m |c_m|/\pi_m = \|L\|_\pi$$

(l'égalité étant réalisée si a est le point générique t).

2.9. Démonstration du théorème 2.3.

(i) Comme L a un 0-noyau au point t , il existe $r < 1$ tel que

$$\operatorname{Ker}_t L \cap W_t^{r,0} = \{0\} .$$

D'après le théorème 1.4, il existe donc $Q \in \mathcal{D}$ (et l'on peut prendre Q dans $\mathcal{D}_0$ comme on a vu dans [2], lemme 6.3) tel que

$$\|QL - 1\|_{r,0} < 1 . \tag{2.9.1}$$

On peut trouver $p \in K[x]$ tel que $|p| = 1$ et $P = pQ$ a ses coefficients dans $K[x]$. L'inégalité (2.9.1) devient

$$\|PL - p\|_{r,0} < 1 . \tag{2.9.2}$$

Choisissons s , $r \leq s < 1$, tel que tous les zéros de p situés dans $D(a\,,1^-)$ appartiennent à $D(a\,,r^-)$ et tel que

$$\|PL - p\|_{r,0} < s^z , \tag{2.9.3}$$

où z est le nombre de zéros de p dans $D(a\,,1^-)$.

Soit ρ , $s \leq \rho < 1$, d'après le lemme 2.7, p a un inverse à gauche σ dans $\mathcal{L}(W_a^{\rho,0}\,,W_a^{\rho,0})$ qui applique $\mathring{W}_a^{\rho,0}$ dans lui-même. On a alors

$$\|PL-p\|_{\mathring{W}_a^{\rho,0}} \leq \|PL-p\|_{W_a^{\rho,0}} \leq \|PL-p\|_{\rho,0} \leq \|PL-p\|_{r,0} < 1/s^z < 1/\|\sigma\|_{\mathring{W}_a^{\rho,0}} , \tag{2.9.4}$$

ce qui d'après 2.4.4 implique que PL , élément de $\mathcal{L}(\mathring{W}_a^{\rho,0}\,,\mathring{W}_a^{\rho,0})$ est injectif et a un indice qui est

$$\chi(PL) = \chi(p) = -z . \tag{2.9.5}$$

Cet indice ne dépend pas de ρ pour $s \leq \rho < 1$. Donc, d'après 2.5, pour tout ρ , $s < \rho \leq 1$, PL , élément de $\mathcal{L}(\mathcal{A}_a^\rho\,,\mathcal{A}_a^\rho)$, a un indice qui est $-z$.

Comme P a un noyau de dimension finie, on en déduit que L , en tant qu'élément de $\mathcal{L}(\mathfrak{a}_a^\rho , \mathfrak{a}_a^\rho)$, a un indice, et est injectif comme PL .

(ii) Soit $s < \rho \leq \rho' < 1$. On a vu que

$$\chi_a^\rho(PL) = \chi_a^{\rho'}(PL) = - z$$

(où $\chi_a^\rho(A)$ désigne l'indice de A élément de $\mathcal{L}(\mathfrak{a}_a^\rho , \mathfrak{a}_a^\rho)$). De plus, d'après 2.4.5,

$$\chi_a^{\rho'}(P) \leq \chi_a^\rho(P) \quad \text{et} \quad \chi_a^{\rho'}(L) \leq \chi_a^\rho(L) .$$

On en déduit

$$\chi_a^\rho(L) = \chi_a^{\rho'}(L) = \chi_a^{!}(L) = \chi_a(L) .$$

Cette constance de l'indice nous donne, d'après 2.4.6, la propriété de régularité.

Une argmentation semblable, un peu plus technique, nous permet de traiter le cas de W_a^π .

(iii) Supposons maintenant que p n'a pas de zéros dans $D(a , 1^-)$. Ceci arrive dans toutes les classes résiduelles sauf un nombre fini, et en particulier dans le disque générique. On a alors dans $W_a^{1,0}$

$$\chi(P) + \chi(L) = \chi(PL) = - z = 0 .$$

D'après la proposition 2.6, on a

$$\chi(P) \leq 0 , \quad \chi(L) \leq 0$$

et donc $\chi(L) = \chi_a(L) = 0$.

3. Indice de l'opérateur L . Cas d'un disque, $\mathrm{Ker}_a\, L \subset \mathfrak{a}_a$.

3.1. THÉORÈME. - Soit L un opérateur différentiel de degré n à coefficients polynomiaux. Si $Lu = 0$ a n solutions linéairement indépendantes dans $\mathfrak{a}_a$, le conoyau de L dans $\mathfrak{a}_a$ est de dimension finie. Si, de plus, L n'a pas de singularités dans $D(a , 1^-)$ (par exemple dans le disque générique), L est surjectif. De plus, si $u \in \mathfrak{a}_a$, et Lu a une croissance logarithmique d'ordre α , u a une croissance logarithmique d'ordre $\alpha + n^2 - n + 1$.

Démonstration. - On construit explicitement une solution de l'équation $Lu = v$ par la méthode de variation des constantes. Cette méthode donne la solution à condition que v s'annule avec un certain ordre sur les zéros du coefficient $c_n(x)$ de D^n dans L . Ceci montre que le conoyau est de dimension finie et que L est surjectif si $c_n(x)$ ne s'annule pas dans $D(a , 1^-)$.

La croissance des solutions s'obtient à partir de la croissance des solutions de l'équation homogène, connue grâce au théorème 2.2 de [2].

3.2. Nous pensons que l'estimation de la croissance de n n'est pas la meilleure possible. On obtiendra une meilleure estimation dans le cas du disque générique (théorème 4.2).

4. Indice de l'opérateur L. Cas du disque générique, L arbitraire.

4.1. Dans le disque générique, on obtient une propriété d'indice valable pour tous les opérateurs différentiels. Remarquons qu'il n'est plus nécessaire de prendre les coefficients de L dans $\mathbb{K}[x]$. On peut supposer qu'ils appartiennent à E.

4.2. THÉORÈME. - Soit $L \in \mathfrak{D}$. L, en tant qu'élément de $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_t, \mathfrak{A}_t)$, est surjectif. Il existe un entier s, inférieur ou égal à la dimension de

$$\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{A}_t ,$$

tel que si $u \in \mathfrak{A}_t$ et Lu a une croissance logarithmique d'ordre α, alors u a une croissance logarithmique d'ordre $\alpha + s$. Il existe $\rho < 1$, tel que si u est analytique dans $D(t, \rho^-)$, et Lu est analytique dans $D(t, r^-)$, avec $\rho \leq r \leq 1$, alors u est analytique dans $D(t, r^-)$.

Démonstration.

(i) Supposons d'abord que $\mathrm{Ker}_t\, L \subset W_t^{1,0}$. On procède comme pour le théorème 3.1 ; ρ est quelconque avec $0 < \rho < 1$. On a alors $s = 1$.

(ii) Supposons alors que $\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{A}_t = \{0\}$. On procède comme pour la démonstration du théorème 2.3. Si $\sigma < 1$ désigne le plus grand rayon de convergence des éléments de $\mathrm{Ker}_t\, L$, on choisit ρ avec $\sigma < \rho < 1$. On a, dans ce cas, $s = 0$.

(iii) Considérons alors le cas général. En vertu du théorème de factorisation 1.4 appliqué à l'espace $W_t^{1,0}$, on obtient la décomposition de L :

$$L = PR_s\, R_{s-1} \ldots R_1 .$$

avec $\mathrm{Ker}_t\, P \cap W_t^{1,0} = \{0\} = \mathrm{Ker}_t\, P \cap \mathfrak{A}_t$, $\mathrm{Ker}_t\, R_k \subset W^{1,0}$, $1 \leq k \leq s$.

En combinant les résultats de (i) avec ceux de (ii), on obtient alors le théorème. Le fait que $s \leq \dim \mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{A}_t$ vient du fait que $\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{A}_t = \mathrm{Ker}_t\, R_s \ldots R_1$.

5. Indice de l'opérateur L. Cas d'un disque quelconque, L arbitraire.

5.1. La démonstration précédente ne s'applique pas dans le cas d'un disque quelconque pour deux raisons

(i) La factorisation de L a lieu dans $\mathfrak{D}$ et non pas $\mathfrak{D}_0$.

(ii) De plus, la factorisation est liée à des propriétés de croissance du noyau de L dans le disque générique et non pas ailleurs.

Néanmoins, la conjecture 5.12 de [2] permet d'obtenir un résultat similaire au théorème 4.2. Nous rappelons cette conjecture (ou plutôt une conséquence immédiate).

Si $L \in \mathfrak{D}_0$, on a $L = QP$ avec $\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{A}_t = \mathrm{Ker}_t\, P$, et les coefficients de P et Q sont des éléments analytiques dans presque toutes les classes résiduelles (c'est-à-dire toutes sauf un nombre fini).

5.2. THÉORÈME. - Supposons la conjecture démontrée. Soit L un opérateur différentiel à coefficients dans $K[x]$. Dans presque toutes les classes résiduelles, L, en tant qu'élément de $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_a , \mathfrak{A}_a)$, a un indice. Il existe un entier s, indépendant de a tel que, si $u \in \mathfrak{A}_a$ et $Lu \in W_a^{\alpha}$, alors $u \in W_a^{\alpha+s}$. Il existe $\rho<1$ tel que, si u est analytique dans $D(a , \rho^-)$, et Lu est analytique dans $D(a , r^-)$ avec $\rho \leq r \leq 1$, alors u est analytique dans $D(a , r^-)$. Pour presque toutes les classes résiduelles, L est surjectif dans $\mathfrak{A}_a$.

Démonstration. - Grâce à la conjecture, on peut combiner les résultats du théorème 2.3 avec ceux du théorème 3.1. On utilise aussi la proposition 3.1 de [2] en remarquant que les éventuelles singularités de P dans $D(a , 1^-)$ sont artificielles (cf. remarques dans la démonstration de la proposition 6.8 de [2]).

5.3. Si L a une singularité dans $D(a , 1^-)$ et si l'on n'est pas dans les conditions d'application soit du théorème 2.3, soit du théorème 3.1, il peut arriver que L n'ait pas d'indice comme le montre l'exemple suivant.

Exemple [DWORK]. - Soit $c \in K$; considérons l'opérateur différentiel $L = xD-c$. Si c est un entier, L n'a pas un 0-noyau au point t ; il résulte donc du théorème 6.1 ci-après que, si c est adhérent à $\underset{\sim}{N}$, L n'a pas un 0-noyau au point t. D'un autre côté, si $d(c , \underset{\sim}{N}) > 0$, un calcul explicite montre que L a un 0-noyau au point t. Posons

$$\lambda = \lim\inf_{m\to\infty} \sqrt[m]{|m - c|} .$$

On peut alors montrer, en résolvant explicitement l'équation $Lu = v$, que

(i) L a un indice dans $\mathfrak{A}_0^r$, $r > 0$, si, et seulement si, $\lambda \geq 1$;

(ii) L a un indice dans $\mathcal{S}_0$, espace des germes de fonctions analytiques en 0, si, et seulement si, $\lambda > 0$.

La condition $\lambda < 1$ signifie que, dans son développement p-adique, c a beaucoup de zéros. C'est un nombre de Liouville p-adique. On trouvera dans [3] des exemples de nombres c vérifiant ces conditions. Notons que, dans le cas complexe, l'opérateur L a toujours un indice dans l'espace $\mathcal{S}_0$.

6. Stabilité de la propriété d'avoir un 0-noyau, de l'indice.

6.1. THÉORÈME. - Soit $L \in \mathfrak{D}$, avec un 0-noyau au point t. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $R \in \mathfrak{D}$ et $\|L - R\|_{1,0} < \varepsilon$ impliquent que R a un 0-noyau au point t. Si, de plus, L et R ont leurs coefficients dans $K[x]$, pour $a \in D(0 , 1^+)$, L et R, en tant qu'éléments de $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_a , \mathfrak{A}_a)$ ont des indices (d'après le théorème 2.3), et l'on a

$$\chi_a(L) = \chi_a(R) .$$

Démonstration. - Comme $\mathrm{Ker}_t\, L \cap W_t^{1,0} = \{0\}$, nous savons, d'après le théorème

1.4, qu'il existe $Q \in \mathcal{Q}_0$ tel que

$$\|QL - 1\|_{1,0} < 1 .$$

Posons $\varepsilon = 1/\|Q\|_{1,0}$ et $A = (QL)^{-1}$, en tant qu'endomorphisme de $W_t^{1,0}$. On a $\|A\|_{1,0} \leq 1$; donc L a, dans $W_t^{1,0}$, un inverse à gauche AQ de norme

$$\|AQ\|_{1,0} \leq \|A\|_{1,0} \|Q\|_{1,0} \leq 1/\varepsilon .$$

Donc, si $\|R - L\|_{1,0} \leq \varepsilon$, il résulte de 2.4.4 que R est aussi injectif dans $W_t^{1,0}$, ce qui, d'après le théorème 5.10 de [2] implique que R a un 0-noyau au point t .

Supposons maintenant que L et R appartiennent à $\mathcal{Q}_0$, et soit $p \in K[x]$, $|p| = 1$, tel que pQ n'ait pas de pôles dans $D(a , 1^-)$. Nous aurons alors

$$\|pQL - p\|_{W_a^{1,0}} \leq \|pQL - p\|_{1,0} \leq \|QL - 1\|_{1,0} < 1 .$$

Il résulte alors de 2.4.4 et du lemme 2.7 que pQL a, dans $W_a^{1,0}$, un inverse à gauche B de norme ≤ 1 . Donc, dans $W_a^{1,0}$, L a un inverse à gauche BpQ avec

$$\|BpQ\|_{W_a^{1,0}} \leq \|B\|_{W_a^{1,0}} \|pQ\|_{W_a^{1,0}} \leq \|pQ\|_{1,0} \leq \|Q\|_{1,0} = 1/\varepsilon .$$

Comme $\|R - L\|_{W_a^{1,0}} \leq \|R - L\|_{1,0} < \varepsilon$, R et L ont, d'après 2.4.4, le même indice dans $W_a^{1,0}$. Mais cet indice est le même que l'indice dans $\mathcal{A}_a$ (théorème 2.3). Ceci achève la démonstration.

7. Indice de l'opérateur L . Cas d'un ensemble analytique, $\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathcal{A}_t = \{0\}$.

7.1. Soit A un ouvert de Ω . Un élément analytique u sur A est la limite uniforme sur A d'une suite de fractions rationnelles sans singularités dans A . On note $H(A)$ l'ensemble des éléments analytiques sur A .

Si B est un ouvert contenu dans A , il existe une application canonique de $H(A)$ dans $H(B)$. Si, pour tout ouvert $B \subset A$, cette application est injective, on dit que A est analytique (cf. [1] pour une caractérisation des ensembles analytiques ; publicité gratuite !).

Si A est borné et si sa distance $d(A , \complement A)$ à son complémentaire est > 0 , $H(A)$, muni de la norme de la convergence uniforme, est un espace de Banach.

7.2. Le complémentaire d'un disque sera considéré comme un disque de centre l'infini. Ceci étant, on appelle trou de A un disque maximal du complémentaire de A . Soit $\mathcal{T}$ la famille des trous de A . Pour $T \in \mathcal{T}$, on note $H^0(\complement T)$ le sous-espace de $H(\complement T)$ formé des éléments analytiques nuls à l'infini.

THÉORÈME de Mittag-Leffler. - Soit A un ensemble analytique. $H(A)$ est la somme directe ultramétrique des sous-espaces $H^0(\complement T)$. Autrement dit, quel que soit $u \in H(A)$, il existe, pour chaque $T \in \mathcal{T}$, un unique $u_T \in H^0(\complement T)$ tel que

$$u = \sum_{T\in\mathcal{T}} u_T .$$

7.3. THÉORÈME. - Soit L un opérateur différentiel à coefficients dans $K[x]$ et avec un 0-noyau au point t. Il existe $\rho < 1$ et $p \in K[x]$ tels que, si $A \subset D(0, 1^+)$ est un ensemble analytique vérifiant $d(A, CA) > \rho$, L, en tant qu'élément de $\mathcal{L}(H(A), H(A))$, est injectif et a un indice $\chi_A(L)$. De plus, cet indice dépend seulement des zéros de p situés dans A, et l'on a

$$0 \geq \chi_A(L) \geq - z_A , \tag{7.3.1}$$

où z_A est le nombre de zéros de p situés dans A. En particulier, si p n'a pas de zéros dans A, $\chi_A(L) = 0$, L est surjectif.

7.4. Observons que, d'après la proposition 2.6, on ne peut pas obtenir une propriété d'indice lorsque L n'a pas un 0-noyau au point t.

7.5. Indiquons deux propriétés supplémentaires de l'indice.

7.5.1. Si $S \in L(U, U)$ et $T \in L(V, V)$ ont des indices, $S \oplus T$, élément de $L(U \oplus V, U \oplus V)$ a un indice, et

$$\chi(S \oplus T) = \chi(S) + \chi(T) .$$

7.5.2. Si le diagramme suivant est commutatif, les suites horizontales étant exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "R"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "S"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "T"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r] & V \arrow[r] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et si les opérateurs R, S et T ont des indices, on a

$$\chi(R) - \chi(S) + \chi(T) = 0 .$$

C'est la formule bien connue reliant les caractéristiques d'Euler-Poincaré d'une suite exacte de complexes.

7.6. On notera $\|L\|_A$ la norme de l'opérateur L de $\mathcal{L}(H(A), H(A))$ et $\chi_A(L)$ son indice, s'il existe.

LEMME. - Soit A un ouvert de Ω avec $A \subset D(0, 1^+)$ et $d = d(A, CA) > 0$. Soit $L = \sum(c_m D^m)/m!$ un opérateur différentiel avec $c_m \in K[x]$. On a

$$\|L\|_A \leq \max_m |c_m|/d^m = \|L\|_{d,0} .$$

7.7. Le lemme 2.7 doit être complété de la façon suivante.

LEMME. - Soit A comme dans le lemme 7.6, soit Δ le disque $D(a, d^-)$ avec $a \in D(0, 1^+)$, et soit $p \in K[x]$. Notons z (resp. z_A, resp. z') le nombre de zéros de p situés dans $D(0, 1^+)$ (resp. A, resp. Δ). En tant qu'élément de $\mathcal{L}(H(A), H(A))$ (resp. $W_a^{d,0}$), p est injectif et a l'indice

$$\chi_A(p) = - z_A \quad (\text{resp. } \chi_a(p) = - z') \ ;$$

il a un inverse à gauche σ avec

$$\|\sigma\|_A \leq 1/|p|d^z \quad (\text{resp. } \|\sigma\|_{W_a^{d,0}} \leq 1/|p|d^z) \ .$$

7.8. Démonstration du théorème 7.3. – La première partie du théorème 7.3 se démontre comme le théorème 2.3. Comme on l'a vu dans cette démonstration (cf. §2.6), on peut trouver $P \in \mathcal{D}_0$, $p \in K[x]$ et $s < 1$ tels que

$$(7.8.1) \qquad \|PL - p\|_{s,0} < s^z \ ,$$

où z désigne le nombre de zéros de s dans $D(0 , 1^+)$.

Si $d = d(A , \complement A) > s$, on déduit alors du lemme 7.7, de 2.4.4 et de (7.8.1), que, en tant qu'élément de $\mathcal{L}(H(A) , H(A))$, PL est injectif et a un indice

$$\chi_A(PL) = \chi_A(p) = - z_A \ .$$

Donc L est injectif et a un indice.

Soit alors $\Delta = D(a , d^-)$ avec $a \in A$. On voit de même que PL a un indice, en tant qu'élément de $\mathcal{L}(W_a^{d,0} , W_a^{d,0})$, donc P aussi a un indice et, en vertu de la proposition 2.6, P est donc injectif dans $W_a^{d,0}$. Comme $\Delta \subset A$, on a

$$H(A) \subset H(\Delta) \subset W_a^{\alpha,0} \ ,$$

et donc P est aussi injectif dans $H(A)$. On a donc $\chi_A(P) \leq 0$ et, par conséquent,

$$\chi_A(L) = - z_A - \chi_A(P) \geq - z_A \ ,$$

ce qui prouve (7.3.1).

Choisissons alors ρ , avec $s < \rho < 1$. Nous allons montrer que l'indice $\chi_A(L)$ dépend uniquement des zéros de p situés dans A , pourvu que $d(A , \complement A) > \rho$.

Soit Z l'ensemble des zéros de p situés dans $D(0 , 1^+)$. Définissons une relation d'équivalence dans Z : $a \sim b$ si, et seulement si, $|a - b| < \rho$. Soient $(Z_i)_{i\in I}$ les classes d'équivalence de Z . A chaque Z_i , on associe $\Delta_i = D(a_i , \rho^-)$, où a_i appartient à Z_i . Choisissons λ , $s \leq \lambda < \rho$, assez voisin de ρ , pour que, pour tout $i \in I$, Z_i soit contenu dans $D_i = D(a_i , \lambda^-)$. Posons $C_i = \Delta_i - D_i$ pour $i \in I$.

Comme $d(A , \complement A) > \rho$, si $a_i \in Z_i$ appartient à A , alors Z_i est contenu dans A . Appelons J le sous-ensemble de I formé des indices i tels que $Z_i \subset A$. Posons $B = A - \bigcup_{i\in J} D_i$. Remarquons que les trous de B sont les trous de A et les D_i , $i \in J$.

Considérons les suites exactes

$$0 \longrightarrow H(A) \longrightarrow H(B) \longrightarrow H(B)/H(A) \longrightarrow 0 \ ,$$

$$0 \longrightarrow H(\Delta_i) \longrightarrow H(C_i) \longrightarrow H(C_i)/H(\Delta_i) \longrightarrow 0 \ , \quad i \in I \ .$$

A L , agissant sur $H(A)$, $H(B)$, $H(\Delta_i)$ et $H(C_i)$, correspondent $\tilde{L}$ agissant sur $H(B)/H(A)$, et $\tilde{L}_i$ agissant sur $H(L_i)/H(\Delta_i)$. En vertu de 5.7.2, on a

$$(7.8.2)\qquad \begin{cases} \chi_B(L) = \chi_A(L) + \chi(\tilde{L}) \\ \chi_{C_i}(L) = \chi_{\Delta_i}(L) + \chi(\tilde{L}_i) , \quad i \in I \end{cases}$$

Comme $d(B , CB) > s$ et $d(C_i , CC_i) > s$, pour tout $i \in I$, et comme d'autre part p n'a pas de zéros dans B ni dans C_i , $\forall\, i \in I$, on sait déjà que

$$(7.8.3)\qquad \chi_B(L) = 0 , \quad \chi_{C_i}(L) = 0 , \quad i \in I .$$

Il résulte du théorème 7.2 que $H(C_i)/H(\Delta_i)$ est isomorphe à $H^0(CD_i)$ et

$$H(B)/H(A) \simeq \bigoplus_{i\in J} H^0(CD_i) \simeq \bigoplus_{i\in J} H(C_i)/H(\Delta_i) .$$

De plus, pour $u_i \in H^0(CD_i) \simeq H(C_i)/H(\Delta_i)$, $\tilde{L}_i\, u_i = (Lu_i)_{D_i}$, et pour $u \in H(B)/H(A)$, $u = \sum_{i\in J} u_i$, $u_i \in H^0(CD_i)$, nous avons

$$\tilde{L}u = \sum_{i\in J} (Lu)_{D_i} = \sum_{i\in J} (Lu_i)_{D_i}$$

et donc $\tilde{L} = \bigoplus_{i\in J} \tilde{L}_i$. Il résulte alors de 7.5.1 que

$$(7.8.4)\qquad \chi(\tilde{L}) = \sum_{i\in J} \chi(\tilde{L}_i) .$$

On déduit alors de (7.8.2), (7.8.3) et (7.8.4) que

$$\chi_A(L) = - \chi(\tilde{L}) = - \sum_{i\in J} \chi(\tilde{L}_i) = \sum_{i\in J} \chi_{\Delta_i}(L) .$$

Ceci prouve que $\chi_A(L)$ ne dépend que de J , c'est-à-dire des zéros de p situés dans A .

7.9. COROLLAIRE. - Soit L comme dans le théorème 7.3, et soient ρ et p définis dans ce théorème. Soit u analytique dans le disque $D(a , r^-)$ avec $|a| < 1$ et $\rho < r \leq 1$. Supposons que A , $D(a , r^-) \subset A \subset D(0 , 1^+)$, est un ensemble analytique tel que $d(A , A) > \rho$ et que les zéros de p situés dans A , appartiennent à $D(a , r^-)$. Si Lu se prolonge analytiquement dans A , alors u se prolonge aussi analytiquement dans A .

Démonstration. - Choisissons λ , $\rho < \lambda < r$, assez voisin de r pour que le disque $\Delta = D(a , \lambda^+)$ contienne tous les zéros de p appartenant à $D(a , r^-)$. Comme les fonctions polynômes sont denses dans $H(\Delta) = \mathring{W}_a^{\lambda,0}$, $H(A)$ est dense dans $H(\Delta)$.

Comme Δ et A contiennent les mêmes zéros de p , il résulte du théorème 7.3 que $\chi_A(L) = \chi_\Delta(L)$.

Le corollaire résulte alors de la propriété de régularité 2.4.6.

7.10. Exemples. - On suppose que $K = \hat{\Omega}_p$.

7.10.1. Soit $L = D - 1$. La solution de $Lu = 0$ au voisinage de t est $\exp(x - t)$, son rayon de convergence est $p^{-1/(p-1)} < 1$. L a donc un 0-noyau au point t .

Comme, pour tout m , $D^m = P_m L + 1$, on aura

$$\|P_m L + 1\|_{\rho,0} = |m!|/\rho^m < 1 ,$$

pour $\rho > p^{-1/(p-1)}$, à condition de prendre m de la forme p^k avec k suffisamment grand. On voit donc qu'on peut prendre $p = 1$ et ρ arbitraire avec $\lambda = p^{-1/(p-1)} < \rho < 1$.

Par conséquent, si A est analytique, $A \subset D(0 , 1^+)$ et $d(A , \complement A) > \lambda$, et si v est un élément analytique sur A , l'équation $u' - u = v$ possède une solution, et une seule, u qui soit un élément analytique sur A .

Si u a un rayon de convergence $> \lambda$ et si $u' - u$ se prolonge analytiquement sur un ensemble analytique A tel que $d(A , \complement A) > \lambda$, alors u se prolonge aussi analytiquement sur A .

7.10.2. Plus généralement, soit $L = D - c(x)$, avec $c(x) \in K[x]$. Comme $Lu = 0$ a pour solution analytique au voisinage de t , $u(x) = \exp(C(x) - C(t))$, où $C(x)$ désigne une primitive de $c(x)$, si $|c| > \lambda = p^{-1/(p-1)}$, L a un 0-noyau au point t . Supposons que

$$c(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad \text{avec} \quad |c| = \sup_k |a_k| = |a_n| > \lambda .$$

Soit $D^m = P_m L + b_m(x)$. On démontre par récurrence que

$$b_m(x) = c(x)^m + \text{polynôme de degré inférieur à } nm ,$$

$$|b_m| = |c|^m .$$

Le polynôme $b_m(x)$ a donc nm zéros dans $D(0 , 1^+)$.

Si l'on choisit ρ avec $(1/|c|^{1/(n+1)})\, p^{-1/(n+1)(p-1)} < \rho < 1$, on aura

$$\left\|\frac{P_m}{a_n^m} L + \frac{b_m(x)}{a_n^m}\right\|_{\rho,0} = \frac{|m!|}{|c|^m \rho^m} < \rho^{nm}$$

à condition de choisir m de la forme p^k avec k suffisamment grand. On aura alors $p(x) = b_m(x)/a_n^m$.

On voit, sur cet exemple, que si l'on veut diminuer la valeur de ρ il faut augmenter le degré de p .

7.11. Problème. - S'il est naturel de supposer que le diamètre de A est assez grand pour s'assurer que L est injectif dans $H(A)$ et espérer avoir une propriété d'indice, la signification de la condition $d(A , \complement A) > \rho$ échappe à l'auteur. Est-il encore vrai que L a un indice dans $H(A)$ si l'on remplace la condition $d(A , \complement A) > \rho$ par "il existe un disque de rayon ρ contenu dans A " ? Dans ces conditions la fin du théorème 7.3 ne serait évidemment plus valable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). - Prolongement analytique en analyse p-adique, Séminaire de Théorie des nombres, Bordeaux, 1968/69 (multigraphié).

[2] ROBBA (P.). - Croissance des solutions d'une équation différentielle homogène, Groupe de travail d'Analyse ultramétrique, 1973/74, n° 1, 15 p.

[3] ROBBA (P.). - On the index of p-adic differential operator, I, Annals of Math. (à paraître).

[4] ROBBA (P.). - On the index of p-adic differential operator, II (à paraître).

(Texte reçu le 14 mai 1974)

Philippe ROBBA
Université de Paris VI
Mathématiques, Tour 46
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05