GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JEAN-PAUL BEZIVIN

Homomorphismes d'espaces de Banach de fonctions continues

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 2 (1974-1975), exp. n° 19, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A16_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
2e année, 1974/75, n° 19, 6 p.

12 mai 1975

HOMOMORPHISMES D'ESPACES DE BANACH DE FONCTIONS CONTINUES

par Jean-Paul BEZIVIN

0. Préliminaires et définitions.

Dans cet exposé, on adapte sans difficultés un article de W. G. BADE et P. C. CURTIS, sur le même sujet, dans le cas où le corps de base est $\underset{\sim}{C}$ [1].

Nous prendrons comme corps de base un corps K, ultramétrique et complet.

X désignera un espace topologique compact, dont tout point a une base de voisinages formée d'ouvert-fermés de X.

$A = \mathcal{C}(X)$ sera l'espace des fonctions continues sur X à valeurs dans K, muni de la norme de la convergence uniforme.

B désignera une algèbre de Banach sur K, unitaire et commutative.

Tout homomorphisme de A dans B sera supposé envoyer l'unité de A sur l'unité de B.

1. Etude du comportement des homomorphismes de A dans B sur les idenpotents de A.

Dans tout ce qui suit, ν désignera un homomorphisme de A dans B.

LEMME 1. - Soient g_n et h_n deux suites d'éléments de $\mathcal{C}(X)$ vérifiant :

(a) $\|g_n\| \in [a , b]$, $\forall n$, où $+\infty > b > a > 0$,

(b) $h_n g_n = g_n$, $\forall n \in \underset{\sim}{N}$,

(c) $h_n h_m = 0$, si $n \neq m$,

alors, $\exists M > 0$, $\forall n$, $\|\nu(g_n)\| \leqslant M\|g_n\| \, \|h_n\|$.

Preuve. - On raisonne par l'absurde. Soit $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$, et soit $q_{i,j}$ une suite double extraite de g_n vérifiant, $\forall i$, $\forall j \in \underset{\sim}{N}$,

$$\|\nu(q_{i,j})\| \geqslant |\lambda|^{i+j} \|p_{i,j}\| ,$$

où $p_{i,j}$ est l'élément de la suite h_n associé à $q_{i,j}$.

Soit $\mu \in K$, $0 < |\mu| < 1$, et posons :

$$f_i = \sum_{\ell=1}^{p=\infty} \mu^{\ell} q_{i,\ell} .$$

On a alors $f_i q_{i,j} = \mu^j q_{i,j}$. Soit encore $\eta \in K$, $|\eta| > 1$.

Soit J_i une suite d'entiers, vérifiant $|\eta| > \|\nu(f_i)\|$, et $\theta_i \in K$ telle que

$$\frac{1}{2} \leqslant |\theta_m| \, \|p_{m,jm}\| \leqslant 1 , \quad \forall m \in \underset{\sim}{N}$$

posons enfin :

$$y = \sum_{m \geq 1} \frac{\theta_m}{\eta^m} p_{m,jm} .$$

On a

$$yf_i = \frac{\mu^{j_i} \theta_i}{\eta^i} q_{i,j_i} .$$

On en déduit :

$$\|\nu(y)\| \geq |\mu|^{j_i} |\frac{\lambda}{\eta}|^{i+j_i} ,$$

et comme $|\mu| < 1$,

$$\|\nu(y)\| \geq |\frac{\mu\lambda}{\eta}|^{i+j_i} ;$$

si l'on choisit μ , λ , et η de façon que $|\frac{\mu\lambda}{\eta}| > 1$, on obtient la contradiction désirée.

COROLLAIRE 1. - <u>Soit</u> p_n <u>une suite d'idempotents de</u> A , <u>vérifiant</u> $p_n p_m = 0$ <u>si</u> $n \neq m$. <u>Alors il existe</u> $M > 0$ <u>tel que</u> $\|\nu(p_n)\| \leq M$, $\forall n \geq 1$.

Il suffit de faire $g_n = h_n = p_n$.

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> $\mathfrak{J}$ <u>l'ensemble des idempotents de</u> A . <u>Il existe</u> $M > 0$ <u>tel que</u> $\|\nu(p)\| \leq M$, $\forall p \in \mathfrak{J}$.

<u>Preuve</u>. - On raisonne par l'absurde. Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble des $p \in \mathfrak{J}$, tels que $\sup_{q \leq p} \|\nu(q)\| = +\infty$, où on note $q \leq p$ la relation $pq = q$.

Notre hypothèse est donc $1 \in \mathfrak{B}$. D'autre part, si $p \in \mathfrak{B}$ et $q \leq p$, alors q ou $p - q$ est dans $\mathfrak{B}$. En effet, sinon il existerait $M > 0$, tel que :

$$\|\nu(r)\| \leq M \text{ si } r \leq q \text{ ou } r \leq p - q .$$

Si alors $s \leq p$, on a

$$s = sq + s(p - q) ,$$

et il vient $\|\nu(s)\| \leq M$, ce qui contredit $p \in \mathfrak{B}$.

Soit alors $r_1 \in \mathfrak{B}$, soit $q_1 \in \mathfrak{J}$, $q_1 \leq r_1$ et $\|\nu(q_1)\| \geq 1 + \|\nu(r_1)\|$, alors

$$\|\nu(r_1 - q_1)\| = \|\nu(q_1)\| \geq 1 + \|\nu(r_1)\| ;$$

on appelle r_2 l'élément de $\{q_1 , r_1 - q_1\}$ qui est dans $\mathfrak{B}$, et on construit, par récurrence, une suite r_k vérifiant $r_{k+1} \leq r_k$, $\forall k$, $r_k \in \mathfrak{J}$, $\forall k \in \underset{\sim}{N}$, $\|\nu(r_{k+1})\| \geq k + \|\nu(r_k)\|$.

On pose alors $p_n = r_{n+1} - r_n$; il est clair que la suite $\{p_n\}$ contredit la conclusion du corollaire 1.

COROLLAIRE 2. - <u>L'homomorphisme</u> ν <u>de</u> A <u>dans</u> B <u>est continu sur une sous-algèbre dense de</u> A .

Preuve. - Soit $C \subset A$ la sous-algèbre de A engendrée par les idempotents sur K.

Soit $f \in C$, alors $f = \sum \lambda_i \varphi_i$, $\varphi_i \in \mathfrak{I}$, donc

$$\nu(f) = \sum \lambda_i \nu(\varphi_i) ,$$

et

$$\|\nu(f)\| \leqslant \sup_i |\lambda_i| \, \|\nu(\varphi_i)\| \leqslant M \sup_i |\lambda_i| = M\|f\| ,$$

d'où l'assertion.

2. Sous-algèbres maximales où ν est continu.

DÉFINITION. - On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des ouverts E de X, tels qu'il existe $M(E) > 0$, telle que $\|\nu(g)\| \leqslant M(E) \|g\| \|h\|$ si $gh = g$ et si support(g) et support(h) sont inclus dans E.

LEMME 2. - Soit E_n une suite quelconque d'ouverts de X disjoints deux à deux ; alors $E_n \in \mathcal{E}$ pour tout n assez grand.

En effet, si le lemme est faux, on construit immédiatement une suite (g_n, h_n) qui contredit les conclusions du lemme 1.

LEMME 3. - Soient E_1 et E_2 appartenant à $\mathcal{E}$. Si G est ouvert et fermé, $G \subset E_2$, alors $E_1 \cup G \in \mathcal{E}$.

En effet, G étant ouvert et fermé, la fonction caractéristique de G, χ_G est dans A, ainsi que $\chi_{\complement G}$. Il suffit d'écrire alors

$$g = g\chi_G + g\chi_{\complement G} \quad \text{si} \quad \mathrm{Supp}(g) \subset E_1 \cup G$$

et on a

$$\mathrm{Supp}(g\chi_G) \subset E_2 , \quad \mathrm{Supp}(g\chi_{\complement G}) \subset E_1 ,$$

ce qui permet d'utiliser les hypothèses.

LEMME 4. - Si E_1 et E_2 sont dans $\mathcal{E}$, et si G est ouvert tel que

$$\overline{G} \subset E_1 \cup E_2 ,$$

alors $G \in \mathcal{E}$.

En effet, soit $F = \complement E_1 \cap \overline{G}$. F est fermé, et inclus dans E_2. Il existe donc U ouvert et fermé, tel que $F \subset U \subset F_2$, alors $E_1 \cup U \in \mathcal{E}$, et $G \subset F_1 \cup U$.

LEMME 5. - Si E_1 et E_2 sont dans $\mathcal{E}$, alors $F_1 \cup F_2$ est dans $\mathcal{E}$.

On raisonne par l'absurde. $E_1 \cup E_2 \notin \mathcal{E}$, alors, $\forall$ F fermé,

$$(F \subset E_1 \cup E_2) \Longrightarrow (E_1 \cup E_2 - F \notin \mathcal{E}) ,$$

car sinon, soit U ouvert et fermé, $F \subset U \subset E_1 \cup E_2$,

$$(E_1 \cup E_2 - F) \cup U = E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E} .$$

Comme $E_1 \cup E_2 \notin \mathcal{E}$, $\exists\, g_1$, h_1, Supp(g) et Supp(h) $\subset E_1 \cup E_2$ vérifiant $\|\nu(g_1)\| \geq \|g_1\| \, \|h_1\|$ (et $g_1 h_1 = g_1$).

Si $F_1 = \mathrm{Supp}(h_1)$, $E_1 \cup E_2 - F_1 \notin \mathcal{E}$, d'où g_2, h_2 à Support dans $E_1 \cup E_2 - F_1$ et vérifiant $g_2 h_2 = g_2$, et $\|\nu(g_2)\| \geq 2 \|g_2\| \, \|h_2\|$.

En poursuivant, on obtient une suite (g_n , h_n) vérifiant les hypothèses du lemme 1, et de plus $\|\nu(g_n)\| \geq n \|g_n\| \, \|h_n\|$, d'où contradiction.

PROPOSITION 2. – $\mathcal{E}$ <u>est stable par union quelconque</u>.

En effet, soit $E_0 = \bigcup E_\alpha$, $E_\alpha \in \mathcal{E}$, $\forall \alpha$; si $E_0 \notin \mathcal{E}$ et si F est fermé, $E_0 - F \notin \mathcal{E}$, car sinon F serait, par compacité, recouvert par un nombre fini de E_α, dont l'union serait dans $\mathcal{E}$ d'après le lemme 5, donc $(E_0 - F) \bigcup_{i=1}^{i=n} E_{\alpha_i}$ aussi, or c'est égal à E_0.

La démonstration se poursuit comme dans le lemme 5.

THÉORÈME 1. – <u>Il existe un nombre fini de points</u> $x_1, \dots, x_n$ <u>de</u> X, <u>et une constante</u> M, <u>telle que l'on ait</u> $\|\nu(g)\| \leq M \|g\| \, \|h\|$ <u>pourvu que les support de</u> g <u>et</u> h <u>soient inclus dans</u> $\complement\{x_1 , \dots , x_n\}$ <u>et que</u> $gh = g$.

D'après la proposition, il existe un ouvert maximal, E_0, dans la famille $\mathcal{E}$. Si $\complement E_0$ est infini, on peut trouver une suite $\{u_1 , \dots, u_n , \dots\}$ de points dans $\complement E_0$, et des ouverts disjoints E_k tels que $u_k \in E_k$. D'après le lemme, $E_k \in \mathcal{E}$ pour k assez grand, donc $E_k \subset E_0$, ce qui est absurde. Le reste du théorème est évident.

3. Etude de quelques cas particuliers.

Résumons tout d'abord ce que l'on vient de voir.

On note $F = (x_1 , \dots , x_n)$ l'ensemble des points de $\complement E_0$, ce sera l'<u>ensemble des singularités de</u> ν.

On note

$\mathfrak{M}(F)$ l'idéal des fonctions de A nulles sur F,

$\mathfrak{J}(F)$ l'idéal des fonctions de A nulles au voisinage de F,

$\mathcal{R}(F)$ la sous-algèbre des fonctions constantes sur un voisinage de F, $\mathcal{R}(F)$ est dense dans A.

PROPOSITION 3. – ν <u>est continue sur la sous-algèbre</u> $\mathcal{R}(F)$.

En effet, si $f \in \mathcal{R}(F)$, il existe des idempotents $e_1 , \dots , e_n$, tels que

$f - \sum f(x_i)\, e_i \in \mathfrak{J}(F)$. Mais, sur $\mathfrak{J}(F)$,

$$\|\nu(g)\| \leq M \|g\| \qquad \text{(théorème 1)}$$

donc

$$\nu(f) = \nu(f - \sum f(x_i)\, e_i) + \sum f(x_i)\, \nu(e_i) ,$$

et $\|\nu(f)\| \leq M \|f\|$.

Comme ν est continue sur $\mathcal{R}(F)$, elle se prolonge, d'une manière unique, en un homomorphisme μ de $A \longrightarrow B$, continu ; on pose $\lambda = \nu - \mu$. μ sera <u>la partie régulière</u> de ν , λ <u>sa partie singulière</u>.

PROPOSITION 4. - <u>Soit</u> $Sp_K(B)$ <u>l'intersection de tous les idéaux maximaux de codimension</u> 1 <u>de</u> B . <u>Alors</u>

$$\lambda(f) \in Sp_K(B) , \quad \forall f \in A .$$

<u>Preuve</u>. - Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de codimension 1 , Φ l'homomorphisme de B dans K associé.

Posons $\Phi_\nu(f) = \Phi(\nu(f))$, $\Phi_\mu(f) = \Phi(\mu(f))$, Φ_ν et Φ_μ sont deux homomorphismes de A dans K , surjectifs. Ils sont donc continus. D'autre part, ils coïncident sur la sous-algèbre dense $\mathcal{R}(F)$, donc ils sont égaux. Il en résulte $\lambda(f) \in \mathfrak{M}$, et la conclusion.

PROPOSITION 5. - <u>On a</u> $\mu(g)\, \lambda(f) = 0$, $\forall g , f \in \mathfrak{M}(F)$, <u>et</u> λ <u>est un homomorphisme de</u> $\mathfrak{M}(F)$ <u>dans</u> B .

μ étant continue et $\mathfrak{J}(F)$ dense dans $\mathfrak{M}(F)$, il suffit de le montrer pour $g \in \mathfrak{J}(F)$, $f \in \mathfrak{M}(F)$.

Dans ce cas, $fg \in \mathfrak{J}(F)$, sur lequel ν et μ coïncident, donc

$$\nu(fg) = \mu(fg)$$

$$\mu(g)\, \lambda(f) = \mu(g)[\nu(f) - \mu(f)] = \nu(fg) - \mu(fg) = 0 .$$

Si $f , g \in \mathfrak{M}(F)$,

$$\lambda(fg) = [\nu(fg) - \mu(fg)] = [\mu(f)+\lambda(f)][\mu(g)+\lambda(g)] - \mu(f)\, \mu(g) = \lambda(f)\, \lambda(g) .$$

On suppose, dans cette partie, que $|K| = \{z \in \underset{\sim}{R}^+ ; \ \exists\, x \in K , \ |x| = z\}$ est dénombrable.

LEMME 6. - <u>Il existe une fonction</u> f , <u>de</u> K <u>dans</u> K , <u>possédant les propriétés suivantes</u> :

(a) f <u>est une bijection bicontinue de</u> K <u>sur</u> K , <u>et</u> $f(0) = 0$,

(b) $\lim_{x \to 0, x \neq 0} f(x)/x^k = 0$, $\forall k \in \underset{\sim}{N}$.

La démonstration n'a que peu d'intérêt.

PROPOSITION 6. - <u>Tout homomorphisme de</u> A <u>dans une algèbre de Banach</u> B , <u>dont le spectre</u> $Sp_K(B)$ <u>est nilpotent, est continu.</u>

On sait que $\nu = \lambda + \mu$, μ étant continu ; il suffit donc de montrer que λ est nulle. Si l'on montre que λ est nulle sur $\mathfrak{M}(F)$, on aura gagné. En effet, si $f \in A$, on a

$$f = f - \sum_1^n f(x_i)\, e_i + \sum_1^n f(x_i)\, e_i$$

avec $F = \{x_1 , \ldots , x_n\}$, $e_1 , \ldots , e_n$ des idempotents tels que $x_i \in \text{Support}(e_i)$ et $e_i\, e_j = 0$ si $i \neq j$. Comme λ est nulle sur $\mathcal{R}(F)$, alors

$$\lambda(f) = \lambda(f - \sum_1^n f(x_i)\, e_i) ,$$

et

$$f - \sum_1^n f(x_i)\, e_i \in \mathfrak{M}(F) .$$

Soit donc $g \in \mathfrak{M}(F)$. Si f est la fonction du lemme 6, et si f_k est la fonction continue de K dans K , définie par $f_k(x) = f(x)/x^k$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, alors $f(g)$ et $f_k(g) \in \mathfrak{M}(F)$.

D'autre part, $\lambda(g)$ est nilpotent ; il existe $n \in \underset{\sim}{N}$, $\lambda(g)^n = 0$.

Comme $f(g) = g^n\, f_n(g)$, et puisque λ est un homomorphisme sur $\mathfrak{M}(F)$, il vient

$$\lambda(f(g)) = \lambda(g)^n\, \lambda(f_n(g)) = 0 .$$

En outre, soit f^{-1} la fonction réciproque de f , $f^{-1}(g) \in \mathfrak{M}(F)$, donc :

$$\lambda(g) = \lambda(f[f^{-1}(g)]) = 0 ,$$

ce qui montre que λ est identiquement nulle, donc que ν est continue.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BADE (W. G.) and CURTIS (P. C.). - Homomorphisms of Banach algebras, Amer. J. Math., t. 82, 1960, p. 589-608.

(Texte reçu le 2 juin 1975)

Jean-Paul BEZIVIN
Université de Paris-VI
Mathématiques, Tour 46
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05