Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Jean-Paul Bezivin

Interpolation et idéaux de fonctions analytiques bornées

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, nº 1 (1975-1976), exp. nº 3, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_1_A2_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
3e année, 1975/76, n° 3, 9 p.
10 novembre 1975

INTERPOLATION ET IDÉAUX DE FONCTIONS ANALYTIQUES BORNÉES

par Jean-Paul BEZIVIN.

1. Notations.

On note K un corps ultramétrique, complet et algébriquement clos.

$D = D(0 , 1)$ sera le disque unité "ouvert" de K, c'est-à-dire

$$D = \{x \in K ; \quad |x| < 1\} .$$

B sera l'algèbre de Banach des fonctions analytiques bornées sur D, munie de la norme de la convergence uniforme sur D. On sait que dire que $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est dans B équivaut à dire que $\sup_n |a_n| < +\infty$, et qu'alors on a $\|f\| = \sup_n |a_n|$.

Enfin, on notera $b(\underset{\sim}{N})$ l'ensemble des suites bornées à coefficients dans K, muni de la norme $\sup_n |a_n| = \|a\|$, et $c(\underset{\sim}{N})$ le sous-espace de $b(\underset{\sim}{N})$ des suites convergentes.

2. Interpolation.

Soient $x_1 , \ldots , x_n$, une suite d'éléments de D, et $b_1 , \ldots , b_n$, une suite d'élements de K ; on suppose la suite x_k injective.

On veut trouver une condition nécessaire et suffisante, pour qu'il existe $f \in B$, vérifiant $f(x_j) = b_j$, $\forall j \in \underset{\sim}{N}$.

PROPOSITION 1. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in B$, vérifiant $f(x_j) = b_j$, $\forall j$, est que la suite $b_n^{(n)}$ suivante soit bornée :

$$b_n^{(n)} = \sum_1^n \frac{b_k}{\sigma_{k,n}} \quad \underline{\text{où}} \quad \sigma_{k,n} = \prod_{j\neq k, j=1}^{j=n} (x_k - x_j) .$$

Preuve. - On examine tout d'abord le même problème avec la condition supplémentaire $\|f\| < 1$. La condition générale s'en suivra aisément.

Condition nécessaire : Supposons donné f vérifiant $f(x_j) = b_j$, $\forall j \in \underset{\sim}{N}$. Posons $f = f_1$, et $b_j^{(1)} = b_j$, $\forall j$, et définissons une suite f_n d'éléments de B, et une suite double d'éléments de K, $b_j^{(\ell)}$, par les formules suivantes :

$$b_j^{(\ell+1)} = \frac{b_j^{(\ell)} - b_\rho^{(\ell)}}{x_j - x_\rho} , \quad \forall j \geq \ell + 1 ,$$

$$f_\ell(x) = b_\ell^{(\ell)} + (x - x_\ell) f_{\ell+1}(x) .$$

On a alors les propriétés suivantes :

$$\forall\, n \in \underset{\sim}{N}\,,\quad \forall\, j \geqslant n\,,\quad f_n(x_j) = b_j^{(j_n)}\,,$$

et une relation sur les normes des f_n :

$$\|f_{n+1}\| \leqslant \|f_n\| \quad \text{pour tout } n\,.$$

Ces deux relations impliquent :

$$\forall\, j \geqslant n\,,\quad |b_j^{(n)}| \leqslant \|f_n\| \leqslant \|f\| < 1\,,$$

en particulier, $|b_n^{(n)}| \leqslant \|f\| < 1$, d'où

$$\sup_n |b_n^{(n)}| \leqslant \|f\| < 1\,.$$

Il est facile de voir que les $b_n^{(n)}$ que l'on vient de définir ainsi sont égaux aux $b_n^{(n)}$ de l'énoncé ; on a , par exemple,

$$b_2^{(2)} = \frac{b_2 - b_1}{x_2 - x_1} = \frac{b_2}{x_2 - x_1} + \frac{b_1}{x_1 - x_2}\,.$$

On en déduit donc qu'une condition nécessaire est que $\sup_n |\sum_1^n \frac{b_k}{\sigma_{k,n}}| < 1$; on va montrer que cette condition est suffisante.

<u>Condition suffisante</u> : On suppose donc $h = \sup_n |b_n^{(n)}| < 1$. Examinons tout d'abord le cas fini ; on se fixe un entier N , et on cherche la fonction la plus simple qui vérifie $f(x_j) = b_j$, $j \leqslant N$. En reprenant la suite de fonctions utilisée pour démontrer la nécessité de la condition de la proposition, on peut poser :

$$f_N(x) = b_N^{(N)}\,,$$

définir ensuite f_{N-1} par

$$f_{N-1}(x) = b_{N-1}^{(N-1)} + (x - x_N)\, f_N(x)\,,$$

et par récurrence

$$f_{N-\rho}(x) = b_{N-\rho}^{(N-\rho)} + (x - x_{N-\rho})\, f_{N-\rho+1}(x)\,.$$

Il est facile de voir que, $\forall\, \rho$, on aura :

$$f_{N-\rho}(x_j) = b_j^{N-\rho} \quad \text{si} \quad N \geqslant j \geqslant N - \rho$$

et d'autre part que

$$\|f_{N-\rho}\| \leqslant \sup(|b_{N-\rho}^{(N-\rho)}|\,, \ldots\,, |b_N^{(N)}|) \quad \text{pour} \quad \rho = N - 1\,,$$

on aura donc une fonction f_1 qui va vérifier

$$f_1(x_j) = b_j^{(1)} = b_j \quad \text{si} \quad 1 \leqslant j \leqslant N\,,$$

$$\|f_1\| \leq \sup_{k \leq N} |b_k^{(k)}| \leq h < 1 .$$

La fonction f_1 précédente dépend de N, notons-là g_N. Il est clair que si la suite g_N (ou une sous-suite extraite) convergeait vers $g \in B$, g serait une solution de notre problème.

Malheureusement, ce n'est pas le cas en général. Ecrivons

$$g_N(x) = \sum_0^\infty a_k^{(N)} x^k .$$

Si g_N convergeait, la suite $a_k^{(N)}$, pour k fixé, serait aussi convergente, donc on aurait $(a_k^{(N)}) = \Lambda_k \in c(\underset{\sim}{N})$. Une solution g serait alors $g(x) = \sum_0^\infty a_k x^k$, où l'on a posé $a_k = \lim_{N\to\infty} a_k^{(N)}$.

Supposons provisoirement que la forme linéaire Φ, qui à $(c_n) \in C(\underset{\sim}{N})$ associe sa limite, se prolonge en $\tilde{\Phi}$ linéaire continue d'un sous-espace fermé E de $b(\underset{\sim}{N})$ contenant $c(\underset{\sim}{N})$ et tous les Λ_k, $k \geq 0$, vérifiant $\|\tilde{\Phi}\| \leq 1 + \varepsilon$, ε étant choisi tel que $(1 + \varepsilon)h < 1$. On peut alors terminer la démonstration : Posons $a_k = \tilde{\Phi}(\Lambda_k)$, et notons $f(x) = \sum_0^\infty a_k x^k$.

On a tout d'abord

$$|a_k| \leq \|\tilde{\Phi}\| \, \|\Lambda_k\| \leq (1 + \varepsilon)h < 1 ,$$

donc $f \in B$, et $\|f\| < 1$.

Soit $T_j = (g_N(x_j))$; si $N > j$, $g_N(x_j) = b_j$; donc $T_j \in c(\underset{\sim}{N})$ et $\tilde{\Phi}(T_j) = b_j$.

Mais, d'autre part,

$$g_N(x_j) = \sum_0^\infty a_k^{(N)} a_j^k .$$

On en déduit $T_j = \sum_0^\infty \Lambda_k x_j^k$. Donc

$$\tilde{\Phi}(T_j) = \sum_0^\infty \tilde{\Phi}(\Lambda_k) x_j^k = \sum_0^\infty a_k x_j^k = f(x_j) ,$$

et par suite

$$f(x_j) = b_j , \quad \forall j \in \underset{\sim}{N} .$$

Il est clair qu'alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in B$ vérifiant $f(x_j) = b_j$, $\forall j \in \underset{\sim}{N}$ est que $\sup |b_n^{(n)}| < +\infty$.

Il reste à montrer l'existence du prolongement $\tilde{\Phi}$.

On utilise une proposition démontrée par M. VAN DER PUT dans [2].

<u>Définition</u>. - Soit E un espace de Banach sur K. On dit que E <u>est de type dénombrable</u>, s'il existe un sous-espace vectoriel $F \subset E$, de dimension finie ou dénombrable, qui soit dense dans E.

PROPOSITION 2 (HAHN-BANACH). - Soit E un espace de Banach sur K, de type dénombrable. Soit G un sous-espace fermé de E, et Φ une forme linéaire continue sur G. Pour tout ε strictement positif, il existe $\tilde{\Phi}$, forme linéaire continue sur E, prolongeant Φ et telle que $\|\tilde{\Phi}\| \leqslant \|\Phi\| + \varepsilon$.

Il suffit alors de remarquer que $c(\underset{\sim}{N})$ est de type dénombrable.

Remarque. - Les coefficients $b_k^{(k)}$ sont les coefficients de Newton de la fonction f, et il y a des cas où la série de Newton $\sum_{k\geq 1} b_k^{(k)} (x - x_1) \dots (x - x_k)$ converge dans B. C'est par exemple le cas si $\prod |x_k| = 0$; par contre quand $\prod |x_k| > 0$, le produit infini $\prod |x - x_n|$ est convergent et non nul si $x \neq x_\rho$, $\forall \rho \in \underset{\sim}{N}$. Dans ce cas, la série ne converge pas dans B.

3. Applications.

On va donner quelques applications, déjà connues, de la proposition 1 (cf. [1]).

COROLLAIRE 1. Soit x_k, $k \geqslant 2$, une suite d'éléments de D, distincts et non nuls. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in B$, vérifiant $f(x_j) = 0$, $\forall j \geqslant 2$, et $f \neq 0$, est que $\prod_{n\geqslant 2} |x_n| > 0$.

Preuve. - Il est clair qu'il faut et il suffit qu'il existe $f \in B$, vérifiant $f(0) = 1$, $f(x_j) = 0$, $\forall j \geqslant 2$. On applique alors la proposition 1, qui nous dit que $1/\prod_2^n |x_k|$ doit être borné.

Cette condition nous indique que si $\prod |x_k| > 0$ (avec $x_k \neq 0$, $\forall k$), il y a plusieurs fonctions satisfaisant à $f(x_j) = b_j$, en général ; par contre, si $\prod |x_k| = 0$, la solution est unique.

COROLLAIRE 2. - On dit que la suite injective (x_n), $x_n \in D$, est d'interpolation si l'application τ de B dans $b(\underset{\sim}{N})$, définie par $\tau(f) = (f(x_n))$, est surjective [1].

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que (x_n) soit d'interpolation est que

$$\inf_j \prod_{k\neq j} |x_j - x_k| = \delta > 0 .$$

Preuve. - La condition est visiblement suffisante, puisque l'on a, si elle est vérifiée, et si $(b_n) \in b(\underset{\sim}{N})$,

$$|b_k^{(k)}| \leqslant \frac{\|b\|}{\delta}, \quad \forall k \in \underset{\sim}{N},$$

et la proposition 1 permet alors de conclure.

Pour montrer qu'elle est nécessaire, remarquons que, d'après la proposition 1, dire que τ est surjective, c'est dire que, $\forall (b_n) \in b(\underset{\sim}{N})$, la suite $b_n^{(n)}$ est bornée.

Soit T_n la forme linéaire continue sur $b(\underset{\sim}{N})$, définie par

$$T_n(b) = b_n^{(n)} = \sum_1^n \frac{b_k}{\sigma_{k,n}} .$$

On sait donc que, $\forall\ (b_n) \in b(\underset{\sim}{N})$, $T_n(b)$ est bornée. Il résulte alors du théorème de Banach-Steinhauss que $A = \sup_n \|T_n\| < +\infty$.

D'autre part, si $n > k$, $T_n(\delta_k) = 1/\sigma_{k,n}$, où $\delta_k = (0\ ,\ 0\ \dots\ 1\ ,\ 0\ \dots\ 0\ \dots)$.

Donc, $\forall\ k$, $n > k$, on a $|\sigma_{k,n}| \geqslant 1/A$, ce qui termine la démonstration.

4. Généralisation.

On peut généraliser le problème, défini dans le paragraphe 1, et on trouve des résultats analogues.

Soit x_k une suite injective d'éléments de D, et P_k une suite de polynômes à coefficients dans K.

$$P_k(x) = b_{k,0} + b_{k,1}(x - x_k) + \dots + b_{k,s_k-1}(x - x_k)^{s_k-1} .$$

On se pose alors le problème de trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in B$ vérifiant

$$f(x) \equiv P_k(x)\ [(x - x_k)^{s_k}]\ ,\quad \forall\ k \in \underset{\sim}{N} .$$

Il est clair que l'on peut utiliser sans difficultés les mêmes méthodes que pour le cas $s_k = 1$, $\forall\ k \in \underset{\sim}{N}$, et écrire :

$$\tilde{f}(x) = \sum d_{s_1,\dots,s_\rho,r}(x - x_1)^{s_1} \dots (x - x_\rho)^{s_\rho}\,(x - x_{\rho+1})^r ,$$

où les $d_{s_1,\dots,s_\rho,r}$ sont les coefficients de Newton de f, relatifs à la suite $(x_k\ ,\ s_k)$.

On en déduit qu'une condition nécessaire et suffisante est que les $d_{s_1,\dots,s_\rho,r}$ soient bornés.

Il est clair que $d_{s_1,\dots,s_\rho,r}$ dépend linéairement des coefficients $b_{j,\alpha}$. Plus précisément, posons

$$f_{j,r}(x) = (x - x_1)^{-s_1} \dots (x - x_\rho)^{-s_\rho}\,(x - x_{\rho+1})^{-r} ,$$

produit où l'on a enlevé le terme en $(x - x_j)^{-s_j}$. Définissons des coefficients $\beta_n^{j,r}$ par

$$f_{j,r}(x) = \sum_0^\infty \beta_n^{j,r}(x - x_j)^n .$$

On a alors le lemme suivant.

LEMME. – <u>Le coefficient de</u> $b_{j,\alpha}$ <u>dans</u> $d_{s_1,\dots,s_\rho,r}$ <u>est</u> $\beta^{j,r}_{s_j-\alpha-1}$.

On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION. – <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe</u> $f \in B$, <u>vérifiant</u> $f \equiv P_k[(x - x_k)^{s_k}]$, $\forall\, k \in \underset{\sim}{N}$ <u>est que les sommes</u> $\sum b_{j,\alpha}\ \beta^{j,r}_{s_j-\alpha-1}$ <u>soient bornées, où</u> $j \leq \rho + 1$, $\alpha \leq s_j - 1$, <u>si</u> $j \leq \rho$ <u>et</u> $\alpha \leq r$ <u>si</u> $j = \rho + 1$.

On peut en déduire, comme pour le cas $s_k = 1$, deux corollaires :

COROLLAIRE 1. – <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe</u> $f \in B$ <u>telle que</u> $f \not\equiv 0$ <u>et</u> $f \equiv 0\ [(x - x_k)^{s_k}]$, $\forall\, k \in \underset{\sim}{N}$, <u>avec</u> $x_k \neq 0$, $\forall\, k$, <u>est que</u> $\prod |x_k|^{s_k} > 0$.

On déduit de ce corollaire les cas d'unicité de la solution du problème

$$f \equiv P_k\ [(x - x_k)^{s_k}] .$$

COROLLAIRE 2. – <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout choix des</u> P_k <u>vérifiant</u> $\sup \|P_k\| < +\infty$, <u>il existe</u> $f \in B$, $f \equiv P_k\ [(x - x_k)^{s_k}]$, <u>est que</u>

$$\inf_j \prod_{j \neq k} |x_k - x_j|^{s_k} = \delta > 0 .$$

<u>Preuve</u>. – On raisonne comme dans le cas $s_k = 1$, ce qui nous donne comme première condition nécessaire et suffisante $\sup |\beta^{(j),r}_{\alpha}| < +\infty$. Si

$$\alpha = s_j - 1 , \quad |\beta^{j,r}_0| = \frac{1}{\prod_{k \neq j} |x_j - x_k|^{s_k}} \quad \text{pour } j \leq n .$$

Ceci nous donne la nécessité de la condition du corollaire. Montrons qu'elle est suffisante : $f_{j,r}(x)$ est analytique dans

$$|x - x_j| \leq \sigma < \inf_{q \neq j} |x_j - x_q| = |x_j - x_{q_0}| ,$$

les inégalités de Cauchy entraînent alors

$$|\beta^{j,r}_k| \leq \frac{|f_j(x_j)|}{|x_j - x_{q_0}|^k} \quad \text{si} \quad k \leq s_j ,$$

on en déduit donc

$$|\beta^{(j)}_{s_j-\alpha-1}| \leq \frac{1}{|x_j - x_{q_0}|^{s_j}}\ |f_j(x_j)| .$$

Mais on a $|f_j(x_j)| \leq 1/\delta$ par l'hypothèse relative à j , et $|x_j - x_{q_0}|^{s_j} \geq \delta$, c'est l'hypothèse relative à q_0 . Donc

$$|\beta^{(j)}_{s_j-\alpha-1}| \leq 1/\delta^2 ,$$

ce qui termine la démonstration.

5. Idéaux de B .

La condition d'interpolation sert à exhiber des idéaux maximaux de B qui ne soient pas les noyaux de morphismes du type $f \to f(\alpha)$, où $\alpha \in D$.

On a en effet la proposition suivante [1].

PROPOSITION. - <u>Soit (x_k) une suite d'interpolation, et soit $I \subset B$ l'idéal des fonctions de B s'annulant sur (x_k). Alors il y a une bijection entre les idéaux maximaux de B contenant I et les ultrafiltres sur $\underset{\sim}{N}$ par l'application</u>

$$\mathcal{U} \to \{f \in B ;\ \lim_{\mathcal{U}} |f(x_k)| = 0\} .$$

On va donner ci-dessous un exemple d'idéal premier, fermé, non maximal, stable par dérivation, ce qui répondra à une question posée dans [1].

<u>Notations</u>. - Soit x_k, $x_k \in D$, une suite vérifiant :

1° $|x_{k+1}| > |x_k|$, $\forall\, k$, $|x_0| > 0$,

2° $\prod |x_k| > 0$.

Soit $q_k \in \underset{\sim}{N}$ une suite telle que $q_k \to +\infty$ et $\prod |x_k|^{q_k} > 0$, soit $\sigma \in |K|$ vérifiant $0 < \sigma < |x_0|$, et $c_k \in \underset{\sim}{N}$ telle que $\prod |x_k|^{c_k q_k} = 0$.

On notera, avec ces données, a_n une suite d'éléments de D vérifiant :

(i) $\forall\, n$, $\exists\, k$, $|a_n - x_k| = \sigma$,

(ii) $\mathrm{card}[\{n ;\ |a_n - x_k| = \sigma\}] = c_k\, q_k$.

(iii) Si n, m vérifient $|a_n - x_k| = |a_m - x_k| = \sigma$, alors $|a_n - a_m| = \sigma$ si $n \neq m$.

PROPOSITION. - <u>Avec les notations ci-dessus, soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\underset{\sim}{N}$ vérifiant,</u> $\forall\, A \in \mathcal{U}$, $\prod_{n \in A} |a_n| = 0$, <u>et soit $\mathcal{P}$ l'idéal</u> $\mathcal{P} = \{f ;\ \lim_{\mathcal{U}} |f(a_n)| = 0\}$. <u>L'idéal $\mathcal{P}$ est un idéal premier, fermé, non maximal, stable par dérivation.</u>

<u>Preuve</u>. - On montre tout d'abord que $\mathcal{P} \neq \{0\}$. Le corollaire 1 du chapitre 4 nous dit qu'il existe $f \in B$ vérifiant $f(x) \equiv 0\ [(x - x_k)^{q_k}]$, $\forall\, k \in \underset{\sim}{N}$, car $\prod |x_k|^{q_k} > 0$ et $f(0) = 1$.

Montrons que $f \in \mathcal{P}$: $\forall\, k$, on a $f(x) = (x - x_k)^{q_k}\, \theta_k(x)$ avec $\|\theta_k\| = \|f\|$; donc, si $|a_n - x_k| = \sigma$, on en déduit

$$|f(a_n)| \leq \sigma^{q_k} \|f\| ;$$

Comme $\sigma < 1$ et $q_k \to \infty$, il en résulte que $f \in \mathcal{P}$ (car $\mathcal{U}$ contient les complémentaires des parties finies).

On montre ensuite que $\mathcal{P}$ est stable par dérivation.

Soit $g \in \mathcal{P}$; notons $(y_j)_{j \in \underset{\sim}{N}}$ les zéros non nuls de g. Soit

$$C \subset \underset{\sim}{N}, \quad n \in C \Longleftrightarrow \{\exists\, j \in \underset{\sim}{N} \;;\; |y_j - a_n| < \sigma\}$$

et

$$J \subset \underset{\sim}{N}, \quad j \in J \Longleftrightarrow \{\exists\, n \in \underset{\sim}{N} \;;\; |y_j - a_n| < \sigma\} .$$

Si $j \in J$, soient n, m tels que $|a_n - y_j| < \sigma$ et $|a_m - y_j| < \sigma$. On en déduit alors $|a_n - a_m| < \sigma$, d'où $n = m$, d'après les hypothèses faites sur la suite a_n. Comme de plus $|a_n| > \sigma$, $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$, on en conclut que

$$\prod_{n \in C} |a_n| = \prod_{j \in J} |y_j| > 0 .$$

D'après la définition de $\mathcal{U}$, $C \notin \mathcal{U}$. Soit $\varepsilon > 0$, puisque $g \in \mathcal{P}$,

$$\exists\, A \in \mathcal{U}, \quad |g(a_n)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, n \in A .$$

Comme $C \notin \mathcal{U}$, on peut toujours supposer $A \subset \complement C$.

Si $n \in A$, $g(x)$ n'a pas de zéros dans $D(a_n, \sigma)$, d'où

$$|g'(a_n)| \leq \frac{|g(a_n)|}{\sigma} \leq \varepsilon/\sigma ,$$

et $g' \in \mathcal{P}$.

Montrons enfin que $\mathcal{P}$ n'est pas maximal. Soit E_k, défini par

$$E_k = \{n \;;\; |a_n - x_k| = \sigma\} .$$

La famille E_k est une partition de $\underset{\sim}{N}$, et $E_k \neq \emptyset$, $\forall\, k$. Il s'ensuit aisément que

$$\mathcal{F} = \{A \subset \underset{\sim}{N} \;;\; A \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow \bigcup_{k \in A} E_k \in \mathcal{U}\}$$

est un ultrafiltre sur $\underset{\sim}{N}$; d'autre part, du fait que

$$\prod |x_k| > 0 \quad \text{et que} \quad |x_{k+1}| > |x_k| \quad \text{pour tout } k ,$$

il résulte que x_k est d'interpolation.

L'idéal $\mathcal{M} = \{f \;;\; \lim_{\mathcal{F}} |f(x_k)| = 0\}$ est donc maximal. Montrons que $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$. Soit $g \in \mathcal{P}$, $\forall\, \varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{U}$, $|g(a_n)| \leq \varepsilon$, $\forall\, n \in A$. Comme ci-dessus, on peut supposer que si y est un zéro de g, $|y - a_n| \geq \sigma$.

Si $n \in A$ dans $D(a_n, \sigma^-)$, g n'a donc plus de zéros ; on en conclut

$$|g|_{a_n}(r) = |g(a_n)| \quad \text{si } r < \sigma ,$$

et par continuité de $|g|_{a_n}$

$$|g|_{a_n}(\sigma) = |g(a_n)|$$

(Rappelons que $|g|_a(r) = \sup_{|x-a|\leq r} |g(x)|$).

Mais si $n \in E_k$, $|x_k - a_n| = \sigma$, d'où

$$|g(x_k)| \leq |g|_{a_n}(\sigma) = |g(a_n)| \leq \varepsilon .$$

Soit $B = \{k ; \exists\, n \in A , n \in E_k\}$. On a :

$$\forall\, k \in B , \quad |g(x_k)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad A \subset \bigcup_{k\in B} E_k ;$$

donc $B \in \mathfrak{F}$, et $\lim_{\mathfrak{F}} |g(x_k)| = 0$.

Il suffit alors pour conclure, de montrer que $\mathfrak{M}$ n'est pas stable par dérivation; comme $\prod |x_k|^2 > 0$, il existe $f \in B$, vérifiant $f(x) = x - x_k$ $[(x - x_k)^2]$. On a donc $f(x_k) = 0$, $\forall$ k , d'où $f \in \mathfrak{M}$, et $f'(x_k) = 1$, $\forall$ k , d'où $f' \notin \mathfrak{M}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] VAN DER PUT (Marius). - The non-archimedian Corona problem, "Table ronde d'analyse non archimédienne [1972, Paris]", Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974, p. 287-317.

[2] VAN DER PUT (Marius). - Espaces de Banach non archimédien, Bull. Soc. math. France, t. 97, 1969, p. 309-320.

(Texte reçu le 24 novembre 1975).

Jean-Paul BEZIVIN
Mathématiques, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05