

# GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

DANIEL BARSKY

## Nombres de Bell et analyse $p$ -adique

*Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, tome 3, n° 1 (1975-1976), exp. n° 11, p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=GAU\\_1975-1976\\_\\_3\\_1\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_1_A7_0)

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

NOMBRES DE BELL ET ANALYSE  $p$ -ADIQUE

par Daniel BARSKY

Résumé. - On montre que la fonction génératrice des nombres de Bell est, pour tout nombre premier  $p$ , un élément analytique, au sens de KRASNER, sur un quasi-connexe de  $\mathbb{C}_{\sim p}$ . Ce résultat est équivalent, d'après le théorème de Mittag-Leoffler  $p$ -adique, à des congruences entre nombres de Bell. On retrouve ainsi des résultats de CARLITZ, et on généralise des résultats de RADOUX. La méthode utilisée est une interprétation  $p$ -adique de la méthode de KUMMER, et elle se généralise aisément.

Introduction. - Le  $n$ -ième nombre de Bell,  $P_n$ , est le nombre de partitions d'un ensemble à  $n$  éléments ou, autrement dit,  $P_n$  est le nombre de relations d'équivalence distinctes sur un ensemble à  $n$  éléments. De la définition précédente, on déduit facilement que les nombres de Bell vérifient la relation de récurrence [7] :

$$P_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k.$$

Les nombres de Bell ont donc pour fonction génératrice exponentielle [7] :

$$\tilde{F}(X) = \sum_{n \geq 0} P_n \frac{X^n}{n!} = \exp(e^X - 1),$$

on a posé  $P_0 = 1$ .

Nous allons montrer que la fonction génératrice des nombres de Bell,

$$F(X) = \sum_{n \geq 0} P_n X^n,$$

est, pour tout nombre premier  $p$ , un élément analytique  $p$ -adique [1] sur le quasi-connexe

$$\mathbb{C}_p = \mathbb{C}_{\sim p} = \bigcup_{i=1}^p B(\zeta_i, 1^-)$$

de  $\mathbb{C}_p$ , où  $\zeta_i$  est une racine du polynôme  $X^p + X^{p-1} - 1$ . Ceci nous permettra de préciser, grâce au théorème de Mittag-Leoffler  $p$ -adique [1] ou [14], des congruences démontrées par RADOUX [13], et de retrouver celles démontrées par CARLITZ [6] par une autre voie. On montrera que, si  $k(p) = (p^p - 1)/(p - 1)$ , on a, pour  $p$  premier impair,

$$P_{n+k(p)p}^{h-1} \equiv P_n \pmod{p^h}, \quad h \geq 1,$$

et pour  $p = 2$ ,

$$P_{n+k(2)} \equiv P_n \pmod{2}, \quad P_{n+k(2)2^h} \equiv P_n \pmod{2^h}, \quad h \geq 1.$$

Autrement dit, sur une classe modulo  $k(p)$ , la suite  $n \rightarrow P_n$  est la restriction à  $\mathbb{N}$  d'une fonction lipschitzienne de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{C}_{\sim p}$ . On verra s'introduire de façon très naturelle le polynôme  $X^p + X^{p-1} - 1$  dont le rôle avait été remarqué par RADOUX [13]. On obtient ainsi une interprétation en termes de singularités d'éléments analytiques  $p$ -adiques de la méthode de KUMMER [10].

La méthode décrite ici se généralise aisément ; en particulier, elle s'applique aux nombres de Bernoulli [4] pour lesquels elle permet de retrouver la théorie de KUBOTA et LEOPOLDT [8] et les congruences classiques entre nombres de Bernoulli ; elle permet aussi de retrouver des résultats de KATZ [9] sur les nombres de Hurwitz [5].

Notations. - Soit  $p$  un nombre premier,  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{\sim p}, \mathbb{Q}_{\sim p}, \mathbb{C}_{\sim p}$  ont leur signification habituelle [1]. La valeur absolue sur  $\mathbb{Z}_{\sim p}, \mathbb{Q}_{\sim p}, \mathbb{C}_{\sim p}$ , notée  $|\cdot|$ , est normalisée par  $|p| = p^{-1}$ ,  $\mathbb{O}_p$  est l'anneau des entiers de  $\mathbb{C}_{\sim p}$ . Les lettres  $\varepsilon$  et  $\rho$  désignent des nombres réels positifs. Si  $a \in \mathbb{C}_{\sim p}$ , on note

$$B(a, \rho^+) = \{X \in \mathbb{C}_{\sim p} ; |X - a| \leq \rho\}$$

(respectivement  $B(a, \rho^-) = \{X \in \mathbb{C}_{\sim p} ; |X - a| < \rho\}$ ), la boule fermée (resp. ouverte) de centre  $a$  et de rayon  $\rho$ . Si  $q = p^f$  ( $f \in \mathbb{N} - \{0\}$ ), on note  $\mathbb{F}_q$  le corps à  $q$  éléments, et  $\overline{\mathbb{F}_p}$  la clôture algébrique de  $\mathbb{F}_p$ , donc de  $\mathbb{F}_q$ . Si  $a \in \mathbb{O}_p$ , on note  $\bar{a}$  l'image de  $a$  dans le corps résiduel de  $\mathbb{C}_{\sim p}$  [1]. On note

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{n!}.$$

Rappelons que, si  $B \subset \mathbb{C}_{\sim p}$ , un élément analytique sur  $B$  est la limite uniforme sur  $B$  d'une suite de fractions rationnelles de  $\mathbb{C}_{\sim p}(X)$  sans pôles dans  $B$  [1]. Si  $F$  est une fonction définie sur  $B$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}_{\sim p}$ , on note

$$\|F\|_B = \sup_{X \in B} |F(X)|.$$

Enfin  $H(B)$  (resp.  $H_0(B)$ ) désigne l'espace de Banach des éléments analytiques sur  $B$  (resp. nuls à l'infini si  $B$  est non borné) muni de la norme  $\|\cdot\|_B$  [1].

### 1. Transformation de Laplace formelle.

Nous allons définir une transformation sur  $\mathbb{C}_{\sim p}[[X]]$  qui peut être considérée comme l'analogue formel de la transformation de Laplace classique. Rappelons que, si

$$f(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \quad \text{et} \quad g(X) = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$$

appartiennent à  $\mathbb{C}_{\sim p}[[X]]$ , le produit de Hadamard  $f \circ g$  de  $f$  et  $g$  défini par

$$f \circ g(X) = \sum_{n \geq 0} a_n b_n X^n.$$

Soit alors  $g(X) = \sum_{n \geq 0} n! X^n$ . On posera, si

$$F(X) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{C}_{\sim p}[[X]],$$

$$\mathcal{L}F = g \circ F = \sum_{n \geq 0} a_n X^n.$$

On remarque  $\mathfrak{L}e^{kX} = (1 - kX)^{-1}$ ,  $\mathfrak{L}(XF) = X \frac{d}{dX} (X(\mathfrak{L}F))$ . L'application  $\mathfrak{L}$  est continue pour la topologie  $X$ -adique sur  $\underset{\sim}{\mathbb{C}}_p[[X]]$  et linéaire.

## 2. Fonction génératrice des nombres de Bell.

On a vu dans l'introduction que, si  $P_n$  est le  $n$ -ième nombre de Bell ( $P_0 = 1$ ), alors  $\sum_{n \geq 0} P_n \frac{X^n}{n!} = \exp(e^X - 1)$ . Or  $\exp(e^X - 1) = \sum_{n \geq 0} (e^X - 1)^n / n!$ , la série du second membre converge  $X$ -adiquement. Remarquons que

$$\mathfrak{L}(\exp(e^X - 1)) = \sum_{n \geq 0} P_n X^n = F(X)$$

est la série génératrice des nombres de Bell. Donc

$$F(X) = \mathfrak{L}\left(\sum_{n \geq 0} \frac{(e^X - 1)^n}{n!}\right) = \sum_{n \geq 0} \mathfrak{L} \frac{(e^X - 1)^n}{n!}$$

car le second membre converge  $X$ -adiquement et, d'après une remarque précédente,

$$F(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{1 - kX} \binom{n}{k},$$

finalement il vient

$$F(X) = \sum_{n \geq 0} P_n X^n = \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{(1 - X) \dots (1 - nX)}.$$

## 3. Etude de la fonction génératrice des nombres de Bell.

Soit  $p$  un nombre premier. Nous allons étudier les propriétés analytiques de  $F$  dans  $\underset{\sim}{\mathbb{C}}_p$ . Il est clair, puisque  $P_n \in \mathbb{N}$ , que la série  $\sum_{n \geq 0} P_n X^n$  converge simplement sur la boule  $B(0, 1^-)$  de  $\underset{\sim}{\mathbb{C}}_p$  et qu'il en est de même de

$$\sum_{n \geq 0} X^n / ((1 - X) \dots (1 - nX)),$$

car, si  $|X| < 1$ ,  $|X^n / ((1 - X) \dots (1 - nX))| = |X^n|$ . Or on a l'égalité suivante modulo  $p^h \mathfrak{O}_p[[X]]$ :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{(1 - X) \dots (1 - nX)} = \sum_{n=0}^{p^h-1} \frac{X^n}{(1 - X) \dots (1 - nX)} \sum_{k \geq 0} \frac{X^{kp^h}}{((1 - X) \dots (1 - (p^h - 1)X))^k}$$

$$F(X) = \sum_{n=0}^{p^h-1} \frac{X^n}{(1 - X) \dots (1 - nX)} \left(1 - \frac{X^{p^h}}{(1 - X) \dots (1 - (p^h - 1)X)}\right)^{-1} \text{ modulo } (p^h \mathfrak{O}_p[[X]]),$$

et par conséquent on a

$$F(X) = \frac{\sum_{n=0}^{p^h-1} X^n (1 - (n+1)X) \dots (1 - (p^h - 1)X)}{(1 - X) \dots (1 - (p^h - 1)X) - X^{p^h}} \text{ modulo } p^h \mathfrak{O}_p[[X]].$$

Appelons  $F_{h,p}(X)$  le second membre de l'égalité précédente,  $F_{h,p}$  est une fraction rationnelle de  $\underset{\sim}{\mathbb{C}}_p(X)$  sans pôles dans  $B(0, 1^-)$  comme le montre le polygone de Newton [1] du dénominateur,  $D_{h,p}(X)$ , de  $F_{h,p}(X)$ . On a donc

$$\|F - F_{h,p}\|_{B(0, 1^-)} \leq p^{-h}.$$

PROPOSITION 1. - Pour tout nombre premier  $p$ , la fonction génératrice des nombres de Bell,  $F(X) = \sum_{n \geq 0} P_n X^n$ , est un élément analytique  $p$ -adique, au sens de KRASNER, sur  $B(0, 1^-) \subset \mathbb{C}_p$ .

C'est immédiat d'après l'inégalité  $\|F - F_{h,p}\|_{(B(0, 1^-))} \leq p^{-h}$  et la définition d'un élément analytique [1].

COROLLAIRE. - La suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  est, pour tout nombre premier  $p$ , presque périodique au sens de ROBBA [14], c'est-à-dire que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $T \in \mathbb{N} - \{0\}$  tels que, pour  $n \geq n_0$ ,  $|P_n - P_{n+T}| \leq \varepsilon$ ; autrement dit si  $\varepsilon \leq p^{-h}$ ,  $P_n \equiv P_{n+T} \pmod{p^h}$ .

Nous allons étudier maintenant un peu plus finement  $F_{h,p}(X)$  et sa convergence vers  $F(X)$ , et nous en déduirons des congruences précises pour les  $P_n$ . Nous allons localiser les zéros de  $D_{h,p}(X) = (1-X)\dots(1-(p^h-1)X) - X^{p^h}$  dans  $\mathbb{C}_p$ .

LEMME 1.

$$D_{h,p}(X) = (D_{1,p}(X))^{p^{h-1}} \pmod{p\mathbb{Z}[X]}, \quad \text{et} \quad D_{1,p}(X) = 1 - X^{p-1} - X^p \pmod{p\mathbb{Z}[X]}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} D_{h,p}(X) &= ((1-X)\dots(1-(p-1)X))^{p^{h-1}} - X^{p^h} \pmod{p\mathbb{Z}[X]} \\ &= ((1-X)\dots(1-(p-1)X) - X^p)^{p^{h-1}} \pmod{p\mathbb{Z}[X]} \\ &= (D_{1,p}(X))^{p^{h-1}} \pmod{p\mathbb{Z}[X]}. \end{aligned}$$

Il est clair que  $D_{1,p}(X) = 1 - X^{p-1} - X^p \pmod{p\mathbb{Z}[X]}$ . Posons

$$D_p(X) = 1 - X^{p-1} - X^p.$$

Le polynôme  $D_p(X)$  est irréductible sur  $\mathbb{F}_p$  car  $|D_p(n)| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\eta_i$  est une racine de  $D_p(X)$  dans  $\overline{\mathbb{F}_p}$ , l'extension  $\mathbb{F}_p[\eta_i]$  est galoisienne sur  $\mathbb{F}_p$  car les autres racines de  $D_p(X)$  dans  $\overline{\mathbb{F}_p}$  sont  $\eta_i + \overline{1}, \dots, \eta_i + \overline{p-1}$ . Un générateur du groupe de Galois de  $\mathbb{F}_p[\eta_i]$  sur  $\mathbb{F}_p$  est le Frobenius

$$\sigma : t \rightarrow t^p.$$

Comme la norme de  $\eta_i$  sur  $\mathbb{F}_p$  est  $\overline{1}$ , on en déduit que, si

$$k(p) = 1 + p + \dots + p^{p-1} = (p^p - 1)/(p - 1),$$

on a  $\eta_i^{k(p)} = 1$  (cf. aussi [13]). Donc, dans  $\mathbb{C}_p$ , les racines  $\xi_{i,1}$  ( $1 \leq i \leq p$ ) de  $D_{1,p}(X)$  vérifient  $|\xi_{i,p}^{k(p)} - 1| \leq p^{-1}$ . Soit  $\zeta_i$  le représentant de Teichmüller de  $\xi_{i,1}$  (c'est-à-dire que  $\zeta_i$  est une racine primitive de l'unité d'ordre premier à  $p$  contenue dans  $\mathbb{C}_p$ , telle que  $|\zeta_i - \xi_{i,1}| < 1$ ). On a

$$|\xi_{i,1} - \zeta_i| \leq p^{-1},$$

car l'extension  $\mathbb{Q}_p[\xi_{i,1}]$  est non ramifiée sur  $\mathbb{Q}_p$  [1]. Nous noterons

$\xi_{i,h}$  ( $1 \leq i \leq p^h$ ) les racines de  $D_{h,p}(X)$  dans  $\tilde{C}_p$ . Le lemme de Hensel [1], appliqué à  $D_{h,p}(X)$ , montre que ses racines se groupent en  $p$ -classes contenant chacune exactement  $p^{h-1}$  racines et deux racines d'une même classe vérifient  $|\xi_{i,h} - \xi_{j,h}| < 1$ , à chaque classe correspond une racine  $\xi_{i,1}$  de  $D_{1,p}(X)$  telle que  $|\xi_{i,1} - \xi_{i',h}| < 1$  pour toute  $\xi_{i',h}$  dans la classe. D'après le lemme 1 et la formule  $ef = n$ , reliant la ramification, le degré résiduel et le degré d'une extension finie de  $\tilde{Q}_p$ , on a  $|\xi_{i,h} - \zeta_j| \leq p^{-r(h-1)}$ , où  $\zeta_j$  est le représentant de Teichmüller de  $\xi_{i,h}$  et  $r(h-1) = p^{-h+1}$ . On posera désormais  $\rho_h = p^{-r(h)}$ .

PROPOSITION 2. -  $F_{h,p}(X)$  est un élément analytique nul à l'infini sur le quasi-connexe

$$\omega_{h,p} = \tilde{C}_p - \bigcup_{i=1}^p B(\zeta_i, \rho_{h-1}^+), \text{ où } \rho_h = p^{-r(h)}, \text{ } r(h) = p^{-h},$$

et  $\zeta_i$  est le représentant de Teichmüller d'une racine de  $D_p(X) = 1 - X^{p-1} - X^p$ .

Pour tout nombre premier  $p$ ,  $F(X)$  est la restriction à  $B(0, 1^-) \subset \tilde{C}_p$  d'un élément analytique nul à l'infini sur le quasi-connexe  $\tilde{C}_p - \bigcup_{i=1}^p B(\zeta_i, 1^-)$ .

La première partie de la proposition est évidente puisque  $F_{h,p}(X)$  est une fraction rationnelle sans pôles dans  $\omega_{h,p}$ , et le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. On a, pour  $h \geq 2$ ,  $\|F_{h,p} - F_{h-1,p}\|_{B(0, 1^-)} \leq p^{-h+1}$ . Comme, pour tout  $X \in B(0, 1^-)$ ,  $|D_{h,p}(X)| = |D_{h-1,p}(X)| = 1$ , on en déduit que, si  $N_{h,p}(X)$  est le numérateur de  $F_{h,p}(X)$ ,

$$\|N_{h,p} D_{h-1,p} - N_{h-1,p} D_{h,p}\|_{B(0, 1^-)} \leq p^{-h+1}$$

et donc, d'après les inégalités de Cauchy [1],

$$N_{h-1,p}(X) D_{h,p}(X) - N_{h,p}(X) D_{h-1,p}(X) \in p^{-h+1} \tilde{Z}[X].$$

Il est immédiat, alors, que la suite  $h \rightarrow F_{h,p}(X)$  est une suite de Cauchy, uniformément pour  $X \in \tilde{C}_p - \bigcup_{i=1}^p B(\zeta_i, 1^-)$ . Donc  $F(X)$  peut être prolongée de manière unique [14] en un élément analytique nul à l'infini, sur le quasi-connexe  $\tilde{C}_p - \bigcup_{i=1}^p B(\zeta_i, 1^-)$ , que l'on notera encore  $F(X)$ .

COROLLAIRE. - Pour tout nombre premier  $p$  et pour tout entier  $h$ , il existe  $n(h) \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P_n \equiv P_{n+k(p)} p^{n(h)} \pmod{p^h}, \text{ où } k(p) = (p^p - 1)(p - 1)^{-1}.$$

C'est une conséquence immédiate du fait que  $F(X)$  est un élément analytique sur  $\tilde{C}_p - \bigcup_{i=1}^p B(\zeta_i, 1^-)$ , nul à l'infini.

#### 4. Congruences entre nombres de Bell.

Nous allons rendre effective l'expression de  $n(h)$  en fonction de  $h$ .

Soit  $p$  un nombre premier fixé pour tout le paragraphe, on posera donc

$$F_h(X) = F_{h,p}(X), \quad \omega_h = \omega_{h,p}; \quad k(p) = \frac{p^p - 1}{p - 1}, \quad r(h) = p^{-h}, \quad \rho_h = p^{-r(h)}.$$

LEMME 2. - Si  $F_{1,1}(X) = \sum_{n \geq 0} P_{n,1} X^n$ , on a

$$P_{n+k(p)p^{j-1},1} \equiv P_{n,1} \pmod{(p^j)}, \quad j \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

En effet,  $F_{1,1}$  est un élément analytique nul à l'infini sur  $\omega_1$ . On peut donc poser, d'après le théorème de Mittag-Loeffler  $p$ -adique ([1] ou [14]),

$$F_{1,1} = \sum_{i=1}^p F_{i,1}, \quad \text{où } F_{i,1} \in H_O(\mathbb{C}_{\sim p} - B(\zeta_i, \rho_0^+)).$$

En fait,  $F_{i,1}(X) = \lambda_{i,1} (\zeta_i - \xi_{i,1}^{-1} X)^{-1}$ , avec  $|\lambda_{i,1}| \leq 1$ , d'après Mittag-Loeffler. Donc si  $F_{i,1}(X) = \sum_{n \geq 0} P_{n,i,1} X^n$ , on a  $P_{n,i,1} = \lambda_{i,1} \xi_{i,1}^{-n}$  et, par conséquent,

$$P_{n+k(p)p^{j-1},i,1} - P_{n,i,1} = \lambda_{i,1} (\xi_{i,1}^{-n-k(p)p^{j-1}} - \xi_{i,1}^{-n}).$$

On en déduit que

$$|P_{n+k(p)p^{j-1},i,1} - P_{n,i,1}| \leq |\lambda_{i,1}| |\xi_{i,1}^{-n-p^{j-1}k(p)} - \xi_{i,1}^{-n}| \leq p^{-j}.$$

Donc comme  $P_{n,1} = \sum_{i=1}^p P_{n,i,1}$ ,

$$|P_{n+k(p)p^{j-1},1} - P_{n,1}| \leq p^{-j}.$$

Ce résultat est équivalent à l'énoncé du lemme puisque  $P_{n,1} \in \mathbb{Z}_{\sim}$ .

LEMME 3. - Si  $F_h(X) = \sum_{n \geq 0} P_{n,h} X^n$ , on a, pour  $j \geq 0$  et  $h \geq 2$ ,

$$P_{n+k(p)p^{j-1},h} \equiv P_{n,h} \pmod{(p^j)} \quad \text{si } p > 2,$$

$$P_{n+k(2)2^j,h} \equiv P_{n,h} \pmod{(2^j)}.$$

On raisonne par récurrence sur  $h$  pour  $j$  fixé. Le lemme est vrai pour  $h = 1$  (Lemme 2), supposons-le vrai pour  $2, 3, \dots, h-1$ . On a

$$F_h(X) = F_h(X) - F_{h-1}(X) + F_{h-1}(X) \quad \text{et} \quad \|F_h - F_{h-1}\|_{\omega_h} \leq p^{-h+2+p^{-1}},$$

car

$$|D_h(X) - D_{h-1}(X)| \geq p^{-1-p^{-1}} \quad (D_h(X) = D_{h,p}(X)) \quad \text{sur } B(\zeta_i, 1^-) - B(\zeta_i, \rho_{h-1}^+)$$

et

$$|F_h(X) - F_{h-1}(X)| \leq p^{-h+1} \quad \text{sur } \mathbb{C}_{\sim p} - \bigcup_{i=1}^p B(\zeta_i, 1^-).$$

Posons  $G_h(X) = F_h(X) - F_{h-1}(X)$ ,  $G_h \in H_O(\omega_h)$ . On peut donc, d'après le théorème de Mittag-Loeffler, décomposer  $G_h$  en ses parties singulières relatives aux

trous de  $\mathcal{O}_h$ ,

$$G_h(X) = \sum_{i=1}^p G_{i,h}(X), \quad \text{où } G_{i,h} \in H_{\mathcal{O}}(\mathbb{C}_{\sim p} - B(\zeta_i, \rho_{h-1}^+)).$$

Posons

$$G_{i,h}(X) = \sum_{k \geq 1} \lambda_{i,h,k} (1 - X \zeta_i^{-1})^{-k} \quad \text{pour } X \in \mathbb{C}_{\sim p} - B(\zeta_i, \rho_{h-1}^+)$$

et

$$G_{i,h}(X) = \sum_{n \geq 0} g_{i,h,n} X^n \quad \text{pour } X \in B(0, 1^-).$$

On a  $g_{i,h,n} = \sum_{k \geq 1} \lambda_{i,h,k} \zeta_i^{-k-n} \binom{n+k-1}{k-1}$ . Le théorème de Mittag-Leffler montre que  $\sup_i \|G_{i,h}\|_{\mathbb{C}_{\sim p} - B(\zeta_i, \rho_{h-1}^+)} = \|G_h\|_{\mathcal{O}_h}$  d'où l'on déduit que

$$|\lambda_{i,h,k}| \leq p^{-h+2+p^{-1}-kr(h-1)}.$$

On a donc d'après l'inégalité ultramétrique

$$\begin{aligned} & |g_{i,h,n+k(p)j-1} - g_{i,h,n}| \\ & \leq \sup_{k \geq 1} \{ |\lambda_{i,h,k}| |\zeta_i^{-k-n-k(p)j-1} \binom{n+k(p)j-1+k-1}{k-1} - \zeta_i^{-k-n} \binom{n+k-1}{k-1}| \} \\ & \leq \sup_{k \geq 1} \sup \{ |\lambda_{i,h,k}| |\zeta_i^{-k-n-k(p)j-1} - \zeta_i^{-k-n}| | \binom{n+k(p)j-1+k-1}{k-1} |, \\ & \quad |\lambda_{i,h,k}| |\zeta_i^{-k-n}| | \binom{n+k(p)j-1+k-1}{k-1} - \binom{n+k-1}{k-1}| \}. \end{aligned}$$

or  $\zeta_i$  est une racine  $k(p)$ -ième de l'unité, puisque  $|\zeta_{i,1}^{k(p)} - 1| \leq p^{-1}$ , et que  $\zeta_i$  est le représentant de Teichmüller de  $\xi_{i,1}$ . Enfin,

$$| \binom{n+k(p)j-1+k-1}{k-1} - \binom{n+k-1}{k-1} | \leq \inf(1, p^{-j+1+\ell(k-1)}), \quad \text{où } \ell(k-1) = \left[ \frac{\log(k-1)}{\log(p)} \right]$$

(c'est-à-dire que  $\ell(k-1)$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $\frac{\log(k-1)}{\log(p)}$ ) (cf. [2]). Deux cas sont à envisager :

$$k-1 < p^j \quad \text{et} \quad k-1 \geq p^j.$$

Si  $k-1 \geq p^j$ , alors

$$|\lambda_{i,h,k}| \leq p^{-h+2+p^{-1}-(p^j+1)r(h-1)},$$

or  $h-2 - \{1/p\} + ((p^j+1)/p^{h-1}) > j-1$  pour tout entier  $j$ , donc

$$|\lambda_{i,h,k}| < p^{-j+1} \quad \text{si } k-1 \geq p^j.$$

Si  $k-1 < p^j$ , alors

$$|\lambda_{i,h,k}| | \binom{n+k(p)j-1+k-1}{k-1} - \binom{n+k-1}{k-1} | \leq p^{-s(k)},$$



où  $s(k) = h - 2 - p^{-1} + kp^{-h+1} + j - 1 - \ell(k-1) \geq h - 3 - p^{-1} + kp^{-h+1} + j - \frac{\log(k-1)}{\log(p)}$ .

Le minimum du dernier membre est atteint pour  $k - 1 = p^{h-1}/\log(p)$ . Pour cette valeur de  $k$ , et compte tenu de la définition de  $\ell(k-1)$ , le premier membre vaut

$$s\left(\frac{p^{h-1}}{\log(p)} + 1\right) = h - 2 + p^{-1} + (1/\log(p)) + p^{-h+1} + j - 1 - h + 2 \\ = j - 1 - p^{-1} + (1/\log(p)) + p^{-h+1} > j - 1 \text{ si } p > 2,$$

si  $p = 2$ , alors

$$s\left(\frac{2^{h-1}}{\log(2)} + 1\right) = h - 2 - 2^{-1} + (\log(2))^{-1} + 2^{-h+1} + j - 1 - h + 1 > j - 2 \text{ (si } h \geq 2 \text{)}.$$

Comme  $\ell(k-1)$  garde la même valeur pour  $p^r \leq k < p^{r+1}$ , on en déduit que le minimum de  $s(k)$  est atteint pour  $k - 1 = p^{h-2}$  si  $p > 2$  (resp. pour  $k - 1 = 2^{h-1}$  si  $p = 2$ ). Donc  $s(k) > j - 1$  si  $p > 2$  (resp.  $s(k) > j - 2$  si  $p = 2$ ). On a donc montré que

$$|g_{i, h, n+k(p)p^{j-1}} - g_{i, h, n}| < p^{-j+1} \text{ si } p > 2,$$

respectivement

$$|g_{i, h, n+k(2)2^{j-1}} - g_{i, h, n}| < 2^{-j+2} \text{ (} h \geq 2 \text{)}.$$

De ces inégalités, on tire, comme  $P_{n, h} = P_{n, h-1} + \sum_{i=1}^p g_{i, h, n}$ ,

$$|P_{n+k(p)p^{j-1}, h} - P_{n, h}| < p^{-j+1} \text{ si } p > 2,$$

respectivement

$$|P_{n+k(2)2^{j-1}, h} - P_{n, h}| < 2^{-j+2} \text{ (} h \geq 2 \text{)}.$$

Or  $P_{n, h} \in \mathbb{Z}$ , les inégalités précédentes entraînent alors

$$|P_{n+k(p)p^{j-1}, h} - P_{n, h}| \leq p^{-j} \text{ si } p > 2,$$

respectivement

$$|P_{n+k(2)2^j, h} - P_{n, h}| \leq 2^{-j} \text{ (} h \geq 2 \text{)}.$$

Le lemme 3 est démontré.

**THÉORÈME.** - Les nombres de Bell vérifient les congruences suivantes. On pose  $k(p) = (p^p - 1)/(p - 1)$  pour tout nombre premier  $p$ . Si  $p$  est un nombre premier impair,

$$P_{n+k(p)p^{h-1}} \equiv P_n \pmod{p^h} \quad (h \geq 1),$$

respectivement

$$P_{n+k(2)2^h} \equiv P_n \pmod{2^h} \text{ et } P_{n+k(2)2^h} \equiv P_n \pmod{2^h} \quad (h \geq 2).$$

Pour montrer des congruences mod( $p^h$ ) sur les  $P_n$ , il suffit de montrer les mêmes congruences sur les  $P_{n,h}$ , car  $\|F - F_{h,p}\|_{B(0,1^-)} \leq p^{-h}$ , ce qui entraîne, d'après les inégalités de Cauchy, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{n,h} \equiv P_n \pmod{p^h}$ . Il suffit alors d'appliquer les lemmes 2 et 3.

### 6. Généralisation.

On peut généraliser un peu la proposition 1 en remarquant que, si  $p$  est un nombre premier,

$$F(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n X^n}{(1-X) \dots (1-nX)}$$

est un élément analytique sur  $B(0, 1^-) \subset \mathbb{C}_{\sim p}$  toutes les fois que

$$G(T) = \sum_{n \geq 0} a_n T^n$$

en est un sur  $B(0, 1^-) \subset \mathbb{C}_{\sim p}$ . La connaissance des singularités de  $G$  entraîne des informations sur celles de  $F$  et donc des congruences entre les coefficients de Taylor de  $F$ .

En particulier, cette méthode s'applique aux nombres de Bernoulli relatifs à un caractère, et permet de retrouver de manière simple les congruences classiques entre nombres de Bernoulli ainsi que la théorie de KUBOTA et LEOPOLDT (cf. [4]). Elle s'applique aussi aux nombres de Hurwitz (cf. [5]) et permet de retrouver des résultats de KATZ [9].

Remarque. - On peut avoir une connaissance précise sur la localisation des pôles de  $F_{h,p}$ . En particulier, on peut tracer le polygone de Newton de  $D_{h,p}(X + \xi_{i,h})$  pour tout  $i$  et tout  $h$ . On peut, de plus, placer les racines de  $D_{h,p}$  par rapport à celles de  $D_{h-1,p}$ . On peut montrer que, pour  $1 \leq i \leq p^{h-2}$ , il existe  $j$  tel que  $1 \leq j \leq p^{h-1}$  et  $|\xi_{i,h-1} - \xi_{j,h}| < p^{(p-1)^{-1}}$ . Mais on n'obtient pas de congruences plus précises pour les  $P_n$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.). - Les nombres  $p$ -adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "le Mathématicien", 14).
- [2] BARSKY (D.). - Fonctions  $k$ -lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 397-411.
- [3] BARSKY (D.). - Analyse  $p$ -adique et nombre de Bell, C. R. Acad. Sc. Paris (à paraître).
- [4] BARSKY (D.). - Fonction génératrice et congruences, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 17<sup>e</sup> année, 1975/76, n° 21, 16 p.
- [5] BARSKY (D.). - Congruences de coefficients de séries de Taylor, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique (Amice-Robba), 3<sup>e</sup> année, 1975/76, n° 17.
- [6] CARLITZ (L.). - Congruences for generalized Bell and Stirling numbers, Duke math. J., t. 22, 1955, p. 193-205.
- [7] COMTET (L.). - Analyse combinatoire, Vol 1 et 2. - Paris, Presses Universi-

taires de France, 1970 (Collection SUP, "le Mathématicien", 4 et 5).

- [8] IWASAWA (K.). - Lectures on  $p$ -adic  $L$ -functions. - Princeton, Princeton University Press, 1972 (Annals of mathematical Studies, 74).
- [9] KATZ (N. M.). - The congruences of Clausen-von Staudt and Kummer for Bernoulli-Hurwitz numbers, Math. Annalen, t. 216, 1975, p. 1-4.
- [10] KUMMER (E. F.). - Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwicklungskoeffizienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen, J. für die reine und ang. Math., t. 41, 1851, p. 368-372.
- [11] LANG (S.). - Algebra. - Reading, Addison-Wesley, 1965.
- [12] RADOUX (C.). - Nouvelles propriétés arithmétiques des nombres de Bell, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 16e année, 1974/75, n° 22, 12 p.
- [13] RADOUX (C.). - Nombres de Bell, modulo  $p$  premier et extensions de degré  $p$  de  $\mathbb{F}_p$ , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 281, 1975, Série A, p. 879-882.
- [14] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, Astérisque n° 10, 1973, p. 108-218.

(Texte reçu le 1er juillet 1976)

Daniel BARSKY  
 Département de Mathématiques  
 Université de Paris-7  
 Tour 45-55, 5e étage  
 2 place Jussieu  
 75221 PARIS CEDEX 05

---