

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

PHILIPPE ROBBA

Nombre de zéros des fonctions exponentielles-polynômes

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. n° 9, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A8_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOMBRE DE ZÉROS DES FONCTIONS EXPONENTIELLES-POLYNÔMES

par Philippe ROBBA

(d'après A. I. Van der POORTEN)

Soit $u(z) = \sum_{i=1}^k f_i(z) \exp a_i z$ une fonction exponentielle-polynôme où les a_i appartiennent à un corps valué complet K , et les f_i sont des polynômes de degrés $m_i - 1$ à coefficients dans K . Le problème posé est d'estimer le nombre N_R de zéros de u dans le disque $|z| \leq R$ en fonction de $\Delta = \sup_i |a_i|$ et de $m = \sum_{i=1}^k m_i$ uniquement. (Par un changement de variable, on voit facilement qu'une telle majoration ne dépendra que de m et $R\Delta$.)

Une telle estimation sert dans des problèmes de transcendance (Cf. par exemple [5] pour le cas complexe, et [1] ou [5] pour le cas p -adique).

Dans le cas complexe, on obtient (TIJDEMAN [2])

$$(1) \quad N_R \leq 3(m - 1) + 4R\Delta .$$

Dans le cas p -adique, il faut bien sûr que R soit plus petit que le plus petit rayon de convergence des exponentielles, c'est-à-dire que

$$(2) \quad R\Delta < p^{-1/(p-1)} .$$

On posera $\delta = -(\log_p R\Delta + 1/(p - 1))$; δ est donc un nombre > 0 . La première estimation est due à SHOREY en 1972 [1]. Sa démonstration utilise l'intégrale de Schnirelmann. Il obtient

$$(3) \quad N_R \leq 30[(m - 1) + \frac{1}{\delta} (\frac{3}{\log p} + \frac{m - 1}{p - 1})] .$$

Une nouvelle majoration est établie par WALDSCHMIDT en 1973 [5] par une démonstration purement p -adique, mais dans un cas particulier : Si $\Delta < 1/p$ et $R = p^{-2/(p-1)}$, on a $N_R \leq 2m$.

En 1975, Van der POORTEN [3] améliore la majoration de SHOREY. Sa démonstration utilise la remarque que les exponentielles-polynômes sont solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Il obtient

$$(4) \quad N_R \leq m - 1 + \frac{1}{\delta} \frac{m - 1}{p - 1} .$$

En 1976, Van der POORTEN [4] améliore cette estimation en utilisant l'interpolation d'Hermite. Il obtient

$$(5) \quad N_R \leq m - 1 + \frac{1}{\delta} \max_{0 \leq r \leq p-1} \{ [\log_p(m + r)] - \frac{r}{p - 1} \} .$$

Cette majoration semble être la meilleure possible. Malheureusement cette dernière démonstration est nettement plus compliquée que la précédente.

Nous allons montrer comment, en reprenant l'idée que u est solution d'une équation

tion différentielle, on peut établir simplement une majoration équivalente à (5). Précisément, nous allons montrer que

$$(6) \quad N_R \leq m - 1 + \frac{1}{\delta} \frac{s - 1}{p - 1},$$

avec $s = \max_{j \leq m-1} \text{Schiff}_p j$.

Remarquons que l'on a $s \leq ([\log_p m] + 1)(p - 1)$, ce qui montre que (6) équivaut à (5).

Pour $m \leq p$, (4) et (5) donnent

$$N_R \leq m - 1 + \frac{1}{\delta} \frac{m - 1}{p - 1},$$

tandis que (6) donne

$$N_R \leq m - 1 + \frac{1}{\delta} \frac{m - 2}{p - 1} \quad (\text{car alors } s = m - 1).$$

On suppose que K est un corps valué complet de caractéristique 0, et que son corps de restes est de caractéristique p . On suppose la valuation de K normalisée, c'est-à-dire $|p| = p^{-1}$, et on pose, pour tout $a \in K$,

$$v(a) = -\log_p |a|.$$

Nous noterons \mathfrak{U} l'anneau de valuation de K .

Quitte à agrandir K , on peut supposer que R , Δ et $p^{-1/(p-1)}$ appartiennent au groupe des valeurs de K . Alors par une homothétie, on peut se ramener au cas $R = 1$. Soit $c \in K$ tel que $v(c) = \delta + 1/(p - 1)$, et soit $\alpha_i = a_i/c$. Il résulte alors de la définition de δ que les α_i appartiennent à \mathfrak{U} .

Il est bien connu que u est solution de l'équation différentielle

$$P(D)u = 0 \quad \text{avec} \quad D = \frac{d}{dz} \quad \text{et} \quad P(X) = \prod_{i=1}^k (X - a_i)^{m_i}.$$

Posons

$$Q(X) = \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)^{m_i}.$$

Alors Q est unitaire, et a ses coefficients dans \mathfrak{U} .

Soit R_n le reste de la division de X^n par Q . Alors R_n a ses coefficients dans \mathfrak{U} . Donc, puisque $P(X) = c^m Q(X/c)$, on a

$$(D/c)^n \equiv R_n(D/c) \pmod{P(D)}$$

et

$$\frac{D^n}{n!} \equiv \sum_{j=0}^{m-1} b_j^{(n)} c^{n-j} \frac{j!}{n!} \frac{D^j}{j!} \pmod{P(D)},$$

avec $R_n(X) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j^{(n)} X^j$, $b_j^{(n)} \in \mathfrak{U}$.

Par conséquent, si $u(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, on a

$$a_n = \sum_{j=0}^{m-1} b_j^{(n)} c^{n-j} \frac{j!}{n!} a_j.$$

Rappelons que $v(j!) = (j - \text{Schiff}_p j)/(p - 1)$, par conséquent,

$$v(b_j^{(n)} c^{n-j} \frac{j!}{n!}) = v(b_j^{(n)}) + \frac{n-j}{p-1} + (n-j)\delta + \frac{j\text{-Schiff}_p}{p-1} - \frac{n\text{-Schiff}_p}{p-1}$$

$$\geq (n-j)\delta - \frac{\text{Schiff}_p}{p-1} + \frac{1}{p-1},$$

et donc, pour $j \leq m-1$, on a

$$v(b_j^{(n)} c^{n-j} \frac{j!}{n!}) \geq (n-m+1)\delta - \frac{s-1}{p-1}.$$

Il en résulte que, pour $n > m-1 + \frac{1}{\delta} \frac{s-1}{p-1}$, on a

$$(7) \quad |a_n| < \sup_{j \leq m-1} |a_j|.$$

Si N est le plus grand entier tel que

$$|a_N| = \sup_n |a_n|,$$

il est bien connu que N est le nombre de zéros de u dans le disque $|z| \leq 1$ (dans la clôture algébrique de K). Il résulte alors de la majoration (7) que l'on a nécessairement

$$N \leq m-1 + \frac{1}{\delta} \frac{s-1}{p-1}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SHOREY (T. N.). - Algebraic independence of certain numbers in the p -adic domain, *Indag. Math.*, t. 34, 1971, p. 423-435.
- [2] TIJDEMAN (R.). - On the number of zeros of general exponential polynomials, *Indag. Math.*, t. 33, 1971, p. 1-7.
- [3] Van der POORTEN (A. I.). - Zeros of p -adic exponential polynomials, *Indag. Math.*, t. 38, 1975, p. 46-49.
- [4] Van der POORTEN (A. I.). - Hermite interpolation and p -adic exponential polynomials, *J. Austral. math. Soc.*, t. 22, 1976, p. 12-26.
- [5] WALDSCHMIDT (M.). - Propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 23, 1973, p. 19-88.

(Texte reçu le 7 juin 1977)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS