ALAIN ESCASSUT

Problème des 4 exponentielles p-adiques et algèbres topologiquement de type fini

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 5 (1977-1978), exp. n° 15, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1977-1978__5__A8_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, D. BARSKY, P. ROBBA)
5e année, 1977/78, n° 15, 9 p.

22 mai 1978

PROBLÈME DES 4 EXPONENTIELLES p-ADIQUES ET ALGÈBRES TOPOLOGIQUEMENT DE TYPE FINI

par Alain ESCASSUT

Le problème des 4 exponentielles p-adiques (interprétation p-adique d'une conjecture de LANG [7] évoquée, dès 1966, par Jean-Pierre SERRE [8]) se ramène, en fait, à un problème de minoration du "module maximum", sur un disque centré à l'origine, de fonctions de la forme

$$P(\exp(ax)\ ,\ \exp(bx))\ ,\ \text{où}\ \ P(X\ ,\ Y) \in \underset{\sim}{Z}[X\ ,\ Y]\ .$$

On se propose ici de montrer que ce module maximum s'interprète, en fait, comme la norme quotient d'un élément (lié à P) d'une algèbre topologiquement de type dépendant de a/b , et on étudiera des conséquences de cette relation.

1. Algèbres topologiquement de type fini.

Soit p un entier premier. $(\underset{\sim}{C}_p\ ,\ |.|)$ désigne le corps complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$.

Pour tout $a \in \underset{\sim}{C}_p$ et $r \in \underset{\sim}{R}^+$, on note

$$d(a\ ,\ r) = \{x \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ \ |x - a| \leqslant r\}\ ,\quad U = d(0\ ,\ 1)\quad \text{et}\quad D = d(0\ ,\ \frac{1}{p})\ .$$

Soit $\mathbb{D}$ un fermé borné de $\underset{\sim}{C}_p$. On note $H(\mathbb{D})$ l'algèbre de Banach des éléments analytiques sur $\mathbb{D}$, et $\|.\|_{\mathbb{D}}$ sa norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{D}$ [2]. Pour tout $h \in H(U)$, pour tout $r \in]0\ ,\ 1]$, on pose $M(h\ ,\ r) = \sup_{|x|\leqslant r} |h(x)|$.

Soit $\underset{\sim}{C}_p\{X\ ,\ Y\}$ une extension topologiquement pure de $\underset{\sim}{C}_p$ de degré 2 [9], et soit $\|.\|$ sa norme canonique $(\|\sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j\| = \sup_{i,j} |a_{ij}|)$.

On notera exp la fonction exponentielle p-adique définie, pour $|x| < p^{-(1/(p-1))}$, par $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n!)$, et on notera $\mathcal{L}g(x)$ la fonction logarithme p-adique définie, pour $|x| < 1$, par $\mathcal{L}g(1 - x) = - \sum_{n=1}^{\infty}(x^n/n)$.

Soit $\alpha \in U$, soit

$$J_\alpha(X\ ,\ Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np}((pX)^n - \alpha(pY)^n) \in \underset{\sim}{C}_p\{X\ ,\ Y\}\ ,$$

et soit $\mathcal{C}(\alpha)$ l'algèbre topologiquement de type fini $\underset{\sim}{C}_p\{X, Y\}/(J_\alpha\{X, Y\}\ \underset{\sim}{C}_p\{X, Y\})$ [9]. Soit Γ la surjection canonique de $\underset{\sim}{C}_p\{X\ ,\ Y\}$ sur $\mathcal{C}(\alpha)$.

Soit $\|.\|^\alpha$ la norme de $\mathcal{C}(\alpha)$ quotient de la norme canonique de $\underset{\sim}{C}_p\{X\ ,\ Y\}$ par $J_\alpha(X\ ,\ Y)\ \underset{\sim}{C}_p\{X\ ,\ Y\}$, et enfin soit $|||\,.\,|||^\alpha$ la semi-norme définie, sur $\underset{\sim}{C}_p\{X, Y\}$, par $|||L(X\ ,\ Y)|||^\alpha = \|\Gamma(L)\|^\alpha$.

LEMME 1. - <u>Soient</u> $b \in \mathbb{C}_p$ <u>tel que</u> $|b| = 1/p$, $\alpha \in \mathbb{C}_p$ <u>tel que</u> $|\alpha| \leqslant 1$, $a = \alpha b$ <u>et</u> $g = (1 - \exp(ax))/p^2$, <u>et soit</u> $f = (1 - \exp(a|x))/p^2$. <u>Alors il existe un isomorphisme</u> Θ <u>de</u> $\mathcal{C}(\alpha)$ <u>sur</u> $H(D)$ <u>tel que</u>

$$\Theta \circ \Gamma(X) = f \quad \text{et} \quad \Theta \circ \Gamma(Y) = g \ ,$$

<u>et la norme</u> $\|.\|^{\alpha}$ <u>de</u> $\mathcal{C}(\alpha)$ <u>est égale à sa norme spectrale</u> $\|.\|_{sa}^{\mathcal{C}(\alpha)}$.

Remarquons d'abord que $\mathbb{C}_p[g]$ est dense dans $H(D)$. En effet, $\|pg\|_D = 1/p$, et par suite $\sum_{n=1}^{\infty}((p^2g)^n/n)$ appartient à l'adhérence $\overline{\mathbb{C}_p[g]}$ de $\mathbb{C}_p[g]$ dans $H(D)$. Or $\sum_{n=1}^{\infty}((p^2g)^n/n) = \mathcal{L}g(1 - p^2g)$, d'où $x \in \overline{\mathbb{C}_p[g]}$ et, comme $H(D) = \overline{\mathbb{C}_p[x]}$, on voit que $H(D) = \overline{\mathbb{C}_p[g]}$.

Montrons maintenant que $\mathcal{C}(\alpha)$ est isomorphe à $H(D)$ par un isomorphisme Θ tel que $\Theta \circ \Gamma(X) = f$ et $\Theta \circ \Gamma(Y) = g$. Par définition de $H(D)$, pour tout $h \in H(D)$, on a $\|h\|_D = \|h\|_{sa}^{H(D)}$. D'autre part, l'homomorphisme naturel de $\mathbb{C}_p[X,Y]$ dans $H(D)$ défini par $L(X , Y) \longrightarrow L(f , g)$ est continu pour la norme canonique de $\mathbb{C}_p[X , Y]$ et la norme $\|.\|_D$ de $H(D)$. Donc, il se prolonge en un homomorphisme continu Δ de $\mathbb{C}_p\{X , Y\}$ dans $H(D)$. De plus, on voit que f et g satisfont la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(b(p^2 f)^n - a(p^2 g)^n) = 0 \ . \tag{1}$$

Alors, il est évident que $\operatorname{Ker} \Delta \supset \operatorname{Ker} \Gamma$, de sorte que $H(D)$ apparaît comme un quotient de $\mathcal{C}(\alpha)$.

Maintenant, nous allons montrer que $\mathcal{C}(\alpha) = \Gamma(\mathbb{C}_p\{Y\})$. En effet, soit $u \in \mathcal{C}(\alpha)$ tel que $\|u\|^{\alpha} < 1$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty}(u^n/n)$ converge dans $\mathcal{C}(\alpha)$, on la notera $- \mathcal{L}g(1 - u)$. De même, si $\|v\|^{\alpha} < p$, la série $\sum_{n=1}^{\infty}(v^n/n!)$ converge dans $\mathcal{C}(\alpha)$, et on la notera $\exp(v)$. Alors, notons $x = \Gamma(X)$ et $y = \Gamma(Y)$. Dans $\mathcal{C}(\alpha)$, on a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n}}{n}(x^n - \alpha y^n) = 0 \ .$$

D'où, comme $\|x\|^{\alpha} \leqslant \|X\| = 1$ et $\|y\|^{\alpha} \leqslant \|Y\| = 1$, on voit que

$$\mathcal{L}g(1 - (p^2x)) = \alpha\, \mathcal{L}g(1 - (p^2y)).$$

Or, il est immédiat de voir que

$$\|\mathcal{L}g(1 - p^2x)\|^{\alpha} \leqslant \frac{1}{p^2} \text{ et } \|\mathcal{L}g(1 - p^2y)\|^{\alpha} \leqslant \frac{1}{p^2}.$$

D'où

$$\exp(\mathcal{L}g(1 - p^2x)) = \exp(\alpha(\mathcal{L}g(1 - p^2y))) \ ,$$

ce qui prouve que x peut se mettre sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$, où $\sum_{n=0}^{\infty} a_n Y^n \in \mathbb{C}_p\{Y\}$, donc $x \in \Gamma(\mathbb{C}_p\{Y\})$, et donc $\mathcal{C}(\alpha) = \Gamma(\mathbb{C}_p\{Y\})$.

Par suite, on voit que $H(D) = \Theta \circ \Gamma(\mathbb{C}_p\{Y\})$, et, comme $H(D)$ et $\mathbb{C}_p\{Y\}$ sont isomorphes [3], Θ et Γ sont des isomorphismes. On en déduit que

$$\|\Theta(u)\|_{sa}^{H(D)} = \|u\|_{sa}^{\mathcal{C}(\alpha)} \ , \text{ pour tout } u \in \mathcal{C}(\alpha) \ ,$$

et que

$$\|\Gamma(L(Y))\|_{sa}^{\mathcal{C}(\alpha)} = \|L(Y)\| \text{ , pour tout } L(Y) \in \mathbb{C}_p\{Y\} .$$

Or, trivialement, on a

$$\|\Gamma(F(X , Y))\|_{sa}^{\mathcal{C}(\alpha)} \leqslant \|\Gamma(F(X , Y))\|^{\alpha} \leqslant \|F(X , Y)\| ,$$

pour tout $F(X , Y) \in \mathbb{C}_p\{X , Y\}$. Maintenant, soit $u \in \mathcal{C}(\alpha)$, et, puisque $\mathcal{C}(\alpha) = \Gamma(\mathbb{C}_p\{Y\})$, soit $L(Y) \in \mathbb{C}_p\{Y\}$ tel que $u = \Gamma(L(Y))$. On voit donc que

$$\|u\|_{sa}^{\mathcal{C}(\alpha)} \leqslant \|u\|^{\alpha} \leqslant \|L(Y)\| = \|u\|_{sa}^{\mathcal{C}(\alpha)} ,$$

d'où $\|u\|_{sa}^{\mathcal{C}(\alpha)} = \|u\|^{\alpha}$, ce qui montre que la norme quotient $\|.\|^{\alpha}$ et la norme spectrale $\|.\|_{sa}^{\mathcal{C}(\alpha)}$ sont <u>égales.</u>

<u>Notations</u>. - Soit log la fonction logarithme réelle de base p .

Pour tout nombre $x \in \mathbb{C}_p$, algébrique sur $\mathbb{Q}$, on notera $d(x)$ le plus petit des entiers naturels n tels que nx soit un entier algébrique, et si $\sigma_1 , \dots , \sigma_q$ sont les plongements de $\mathbb{Q}[x]$ dans $\mathbb{C}$, dont la valeur absolue est notée $|.|_{\infty}$, on notera

$$|\bar{x}| = \max_i |\sigma_i(x)|_{\infty} \text{ , et } s(x) = \max(\log |\bar{x}| , d(x)) .$$

Soit

$$P(X_1 , \dots , X_n) = \sum a_{i_1,\dots,i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \in \mathbb{Z}[X_1 , \dots , X_n] .$$

On note

$$t(p) = \max(\log \max_{(i_1,\dots,i_n)} |a_{i_1,\dots,i_n}| , \max_{1\leqslant j\leqslant n} \deg_{X_j}(P)) .$$

Pour tout polynôme $P(X , Y) \in \mathbb{C}_p[X , Y]$, on pose

$$\tilde{P}(X , Y) = P(1 + p^2 X , 1 + p^2 Y) .$$

D'autre part, pour toute fonction analytique f dans le disque $|x| \leqslant r$, on notera $M(f , r) = \sup_{|x|\leqslant r} |f(x)|$. Alors, nous pouvons maintenant énoncer le théorème 1.

THÉORÈME 1. - <u>Soient</u> a <u>et</u> $b \in \mathbb{C}_p$ <u>tels que</u> $|a| \leqslant |b| = 1/p$. <u>Alors, pour tout polynôme</u> $P(X , Y) \in \mathbb{C}_p[X , Y]$, <u>on a</u>

$$M(P(\exp(ax) , \exp(bx)) , \tfrac{1}{p}) = |||\tilde{P}|||^{a/b} .$$

<u>Preuve</u>. - En effet, il est clair que $P(\exp(ax) , \exp(bx)) = \tilde{P}(f , g)$, et par suite

$$\|P(\exp(ax) , \exp(bx))\|_D = \|\tilde{P}(f , g)\|_D .$$

Or $\|\tilde{P}(f , g)\|_D = |||\tilde{P}|||^{\alpha}$, d'après le lemme précédent, ce qui prouve le théorème, puisque $M(h , (1/p)) = \|h\|_D$.

<u>Remarque</u>. - Le théorème 1 peut s'interpréter de la façon suivante. Soit

$\tilde{P}(X , Y) = \sum_{i\leq N, j\leq N} \delta_{ij} X^i Y^j$, et supposons que $|||\tilde{P}|||^{\alpha} < \varepsilon$. Alors, par définition, il existe $L \in \underset{\sim}{C}_p\{X , Y\}$ tel que $\|\tilde{P} - J_\alpha L\| < \varepsilon$. Soit

$$L(X , Y) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} X^i Y^j ,$$

et soit $J_\alpha L = \sum_{i,j} \mu_{ij} X^i Y^j$. Il est immédiat de voir que

$$\mu_{ij} = \sum_{h=0}^{i-1} \lambda_{h,j} \frac{p^{i-h-1}}{i - h} - \alpha \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_{i,k} \frac{p^{j-k-1}}{j - k} .$$

On voit donc qu'il doit exister une suite double $(\lambda_{m,n})_{m\in \underset{\sim}{N}, n\in \underset{\sim}{N}}$ telle que $\lim_{m\to\infty, n\to\infty} (\lambda_{m,n}) = 0$, et telle que

$$|\delta_{ij} - \sum_{k=0}^{i-1} \lambda_{h,j} \frac{p^{i-h-1}}{i - h} + \alpha \sum_{0}^{j-1} \lambda_{i,k} \frac{p^{j-k-1}}{j - k}| < \varepsilon ,$$

quels que soient $i \leqslant N$ et $j \leqslant N$, et

$$|\sum_{h=0}^{i-1} \lambda_{hj} \frac{p^{i-h-1}}{i - h} - \alpha \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_{i,k} \frac{p^{j-k-1}}{j - k}| < \varepsilon ,$$

quels que soient i et j tels que $\max(i , j) > N$. Soit $n \geqslant \deg \tilde{P}$.

Notons C la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{p}{1} & 0 & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{p}{1} & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & 0 & \cdot \\ \frac{p^n}{n} & \frac{p^{n-1}}{n-1} & \dots & \frac{p}{1} & 0 \end{bmatrix} ,$$

soit Λ la matrice $(\lambda_{ij})_{0\leq i\leq n, 0\leq j\leq n}$, et enfin soit Δ la matrice $(\delta_{ij})_{0\leq i\leq n, 0\leq j\leq n}$. Alors, il est immédiat de voir que

$$\Delta = \Lambda C - \alpha\, {}^t C\Lambda .$$

Munissons l'anneau des matrices carrées d'ordre n de la norme $\|(\alpha_{ij})\| = \max |\alpha_{ij}|$.

Soit $\tilde{P} = \sum_{i,j\leq n} a_{ij} X^i Y^j$, et soit $[\tilde{P}]$ la matrice $(a_{ij})_{i\leq n, j\leq n}$. On voit donc que, si $|||\tilde{P}|||^{\alpha} < \varepsilon$, il existe Λ tel que $\|\Lambda C - \alpha\, {}^t C\Lambda - [\tilde{P}]\| < \varepsilon$.

2. Problème des 4 exponentielles p-adiques.

Rappelons la conjecture des 4 exponentielles p-adiques [8].

Soient a_1 , a_2 (resp. b_1 , b_2) deux nombres de $\underset{\sim}{C}_p$, $\underset{\sim}{Q}$-linéairement indépendants, tels que $\max |a_i b_j| < p^{-(1/(p-1))}$. Alors, l'un au moins des 4 nombres

$\exp(a_i\, b_j)$ <u>est transcendant.</u>

Ceci est immédiat si le rapport a_1/a_2 est algébrique sur $\underset{\sim}{Q}$, ou bien transcendant sur $\underset{\sim}{Q}_p$ [5] (corollaires 1.5 et 3.2) ; la conjecture concerne donc le cas où les rapports a_1/a_2 et b_1/b_2 sont tous les deux à la fois transcendants sur $\underset{\sim}{Q}$ et algébriques sur $\underset{\sim}{Q}_p$.

Le théorème 1 permet d'établir une relation entre cette conjecture et les algèbres topologiquement de type fini.

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> a_1, a_2 (<u>resp.</u> b_1, b_2) $\in \underset{\sim}{C}_p$, <u>$\underset{\sim}{Q}$-linéairement indépendants, telsqque</u> $\max_{i,j} |a_i\, b_j| < p^{-(1/(p-1))}$. <u>On suppose qu'il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que</u> $-\log |||Q|||^{a_1/a_2} \leq Ct(Q)$, <u>pour tout polynôme</u> $Q \in Z[X, Y]$. <u>Alors, l'un au moins des 4 nombres</u> $\exp_{i,j}(a_i\, b_j)$ <u>est transcendant.</u>

<u>Preuve</u>. - Supposons algébriques les nombres $\exp(a_i\, b_j)$, soit $K = \underset{\sim}{Q}[\exp(a_i\, b_j)]$, et soit $t = [K : \underset{\sim}{Q}]$. Soit $A = \max(\exp(a_i\, b_j))$. Soit $\lambda > 0$ tel que

(2) $$\frac{7\lambda A t C}{\lambda^2 - t} < 1 .$$

Grâce au lemme de SIEGEL, il est immédiat de construire, pour tout $N \in \underset{\sim}{N}$ assez grand, une famille d'entiers $(\alpha_{m,n,N})_{m\leq N, n\leq N}$ de $\underset{\sim}{Z}$ telle que

$$s(\alpha_{m,n,N}) \leq \frac{A\lambda t C N^2}{\lambda^2 - t} ,$$

et telle que

$$\sum_{m,n\leq \lambda N} \alpha_{m,n,N} \exp((ma_1 + na_2)(ib_1 + jb_2)) = 0 ,$$

pour tous (i, j) tels que $0 \leq i \leq N$ et $0 \leq j \leq N$ [10] (lemme 1.3.1).

Soit $P_N(X, Y) = \sum_{m,n} \alpha_{m,n,N} X^m . Y^n$, et soit $F_N(x) = P_N(\exp(a_1\, x), \exp(a_2\, x))$ Alors, on a $F_N(ib_1 + jb_2) = 0$, pour (i, j) tels que $0 \leq i \leq N$ et $0 \leq j \leq N$, et par suite F_N admet au moins N^2 zéros dans le disque D. D'où, d'après les propriétés des fonctions analytiques [1], on obtient la relation

(3) $$\log \|F_N\|_D \leq -N^2 .$$

Or, d'après le théorème 1, on a $\|F_N\|_D = \|\tilde{P}\|^{a_1/a_2}$, et, par hypothèse,

$$-\log |||\tilde{P}|||^{a_1/a_2} \leq Ct(\tilde{P}_N) .$$

Mais il est immédiat de voir que $t(\tilde{P}_N) \leq 7\, t(P_N)$, et donc

$$-\log \|F_N\|_D \leq 7Ct(P_N) \leq \frac{7A\lambda t N^2}{\lambda^2 - t}$$

d'où, grâce à (3), $N^2 \leq (7A\lambda t C N^2/(\lambda^2 - t))$, ce qui contredit (2), et le théorème 2 est démontré.

3. Minorations d'un polynôme de 2 exponentielles.

Soit $P(X, Y) \in \mathbb{C}_p[X, Y]$, soit $\tilde{P}(X, Y) = \sum_{i,j} a_{i,j} X^i Y^j$, et soit r le plus petit des entiers m tels que $\max_{0\leq i\leq m} |a_{i,m-i}| > 0$. On notera

$$\hat{P}(X) = \sum_{i=0}^{r} a_{i,r-i} X^i .$$

THÉORÈME 3. - Soient a et $b \in \mathbb{C}_p$ tels que $|a| \leq |b| = 1/p$. Alors, pour tout polynôme $P(X, Y) \in \mathbb{C}_p[X, Y]$, on a

$$M(P(\exp(ax), \exp(bx)), \frac{1}{p}) \geq |\hat{P}(\frac{a}{b})| .$$

Preuve. - D'après le théorème 1, il s'agit de montrer que $|||P|||^{a/b} \geq |\hat{P}(a/b)|$. Pour cela, soit $\mu > |||\tilde{P}|||^{a/b}$, et montrons que

(4) $$\mu > |\hat{P}(\frac{a}{b})| .$$

Grâce au lemme 1, on voit qu'il existe $G \in \mathfrak{J}$ tel que

(5) $$\|P - G\| < \mu .$$

Alors G s'écrit $J.T$ ($T \in \mathbb{C}_p\{X, Y\}$). Soit $\tilde{P}(X, Y) = \sum_{i,j} \zeta_{ij} X^i Y^j$, soit $G(X, Y) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} X^i Y^j$, et soit $T(X, Y) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} X^i Y^j$.

Par récurrence sur n, on vérifie que, pour chaque couple (i, j) tel que $i + j = n$, les α_{ij} satisfont les relations $(\mathfrak{F}_{i,j})$

$$(\mathfrak{F}_{i,j}) \quad \alpha_{ij} = (\frac{b}{p})\lambda_{i,j-1} - (\frac{a}{p})\lambda_{i-1,j} + \sum_{s+t\leq n-2} \frac{\omega_{s,t,i,j}\, a^{\varepsilon_{s,t,i,j}}\, b^{1-\varepsilon_{s,t,i,j}}\, p^{3(\sigma_{s,t,i,j}+\tau_{s,t,i,j})}\, \lambda_{s,t}}{(n - s - t)}$$

où $\omega_{s,t,i,j} = 0$, 1 ou -1,

$\varepsilon_{s,t,i,j} = 0$ ou 1,

$\max(\sigma_{s,t,i,j}, \tau_{s,t,i,j}) \leq n - s - t - 2$,

$\sigma_{s,t,i,j}\, \varepsilon_{s,t,i,j} = \sigma_{s,t,i,j}$,

$\tau_{s,t,i,j}(1 - \varepsilon_{s,t,i,j}) = \tau_{s,t,i,j}$.

Soit $f = \{x \in \mathbb{C}_p, |x| < \mu\}$, et soit $B = U/f$. Pour tout $x \in U$, on notera $\bar{x}$ la classe de x dans B. Alors, d'après (5), on a donc

(6) $$\overline{\zeta_{ij}} = \overline{\alpha_{ij}} ,$$

quel que soit $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Soit r le plus petit des entiers m tels que $\max_{0\leq i\leq m} |\alpha_{i,m-i}| > 0$. Alors, d'après $(\mathfrak{F}_{i,j})$, il est immédiat de voir que l'on a $\overline{\lambda_{s,t}} = 0$, pour tout couple (s, t) tel que $s + t < r - 1$, et par suite, pour $i + j = r$, les relations $(\mathfrak{F}_{ij})$ nous donnent

$(\overline{\mathfrak{F}_{ij}})$ $$\overline{\alpha_{ij}} = \overline{(\frac{b}{p})}\ \overline{\lambda_{i,j-1}} - \overline{(\frac{a}{p})}\ \overline{\lambda_{i-1,j}} \ .$$

D'après (6), on a

$$\overline{\zeta_{ij}} = \overline{(\frac{b}{p})}\ \overline{\lambda_{i,j-1}} - \overline{(\frac{a}{p})}\ \overline{\lambda_{i-1,j}} \ , \text{ pour } i + j = r \ .$$

C'est un système de $r + 1$ équations à r inconnues $(\overline{\lambda_{s,t}})_{s+t=r-1}$ à coefficients dans B , et s'il admet une famille solution, le déterminant $\Lambda \in B$ suivant doit être nul.

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \overline{\alpha_{r,0}} & \overline{(\frac{b}{p})} & \bar{0} & & & & \bar{0} \\ \overline{\alpha_{r-1,1}} & \overline{(\frac{a}{p})} & \overline{(\frac{b}{p})} & & & & \bar{0} \\ \overline{\alpha_{r-2,2}} & \bar{0} & \overline{(\frac{a}{p})} & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & \overline{(\frac{a}{p})} & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdots & \overline{(\frac{b}{p})} & \bar{0} \\ \overline{\alpha_{1,r-1}} & & & & \bar{0} & \overline{(\frac{a}{p})} & \overline{(\frac{b}{p})} \\ \overline{\alpha_{0,r}} & & & & \bar{0} & \bar{0} & \overline{(\frac{a}{p})} \end{vmatrix}$$

Ainsi, on voit que $\sum_{i=0}^{r} \overline{\zeta_{i,r-i}}\,\overline{(\frac{a}{p})}^{i}\,\overline{(\frac{b}{p})}^{r-i} = \bar{0}$, d'où

$$\left|\sum_{i=0}^{r} \zeta_{i,r-i}(\frac{a}{b})^{i}\right| < \mu \ .$$

Or $\sum_{i=0}^{r} \zeta_{i,r-i}(X) = \hat{P}(X)$, et la relation (4) est donc établie.

Rappelons que, si μ et $\nu \in \underset{\sim}{R}^{+}$, on note $\mathcal{S}(\mu , \nu)$ [5] l'ensemble des $x \in \underset{\sim}{C}_p$ tels qu'il existe $C \in \underset{\sim}{R}^{+}$ vérifiant

$$\log |P(x)| > C((\log H(P))^{\mu} + (\deg P)^{\nu}) \ .$$

Alors, on déduit du théorème 2 le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - Soient μ et $\nu \in \underset{\sim}{R}^{+}$, et soient a et $b \in \underset{\sim}{C}_p$ tels que $|a| \leqslant |b| = 1/p$ et tels que $a/b \in \mathcal{S}(\mu , \nu)$. Alors, il existe $C \in \underset{\sim}{R}^{+}$ tels que, pour tout $P(X , Y) \in \underset{\sim}{Z}[X , Y]$, on ait

$$\log M(P(\exp(ax) , \exp(bx)) , \frac{1}{p}) \geqslant C(t(P)^{\mu} + (\deg P)^{\nu}) \ .$$

Preuve. - En effet, d'après le théorème 2, on a

$$M(P(\exp(ax) , \exp(bx) , \frac{1}{p}) \geqslant |\hat{P}(\frac{a}{b})| \ .$$

Or, puisque $a/b \in \mathcal{S}(\mu , \nu)$, il existe $K > 0$ tel que

$$\log |Q(\frac{a}{b})| \geqslant K((\log H(Q))^{\mu} + (\deg Q)^{\nu}) \ , \text{ pour tout } Q \in \underset{\sim}{Z}[X] \ .$$

On peut donc appliquer cette relation à $\hat{P}$, en remarquant que

$$H(\hat{P}) \leqslant H(\tilde{P}) = H(P) + 6 \deg P \leqslant 7\ t(P) \quad \text{et } \deg(\hat{P}) \leqslant \deg(\tilde{P}) = \deg P ,$$

et on obtient le corollaire 1 de façon immédiate.

D'autre part, grâce à l'utilisation de la méthode du résultant des 2 polynômes, on peut déduire, du théorème 2, le théorème 3 qui va suivre.

Rappelons d'abord la définition du résultant de deux polynômes.

Soient $P(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$, et soit $Q(X) = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j \in \underset{\sim}{C}_p[X]$. On note $\mathcal{R}(P , Q)$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre $m + n$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} & & & \text{n-ième colonne} & & & & \\ & & & \downarrow & & & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
a_m & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & a_m & & \cdot & \cdot & b_n & & \vdots \\
\cdot & \cdot & & \vdots & \cdot & \cdot & & 0 \\
\cdot & \cdot & & 0 & \cdot & \cdot & & b_n \\
a_0 & \cdot & & a_m & b_1 & \cdot & & \cdot \\
0 & a_0 & & 0 & b_0 & \cdot & & \cdot \\
\cdot & 0 & & \cdot & 0 & b_0 & & \cdot \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \cdot & \vdots & & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & a_0 & \cdot & \cdot & & b_0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Alors on sait que $\mathcal{R}(P , Q) \neq 0$ si, et seulement si, P et Q sont premiers entre eux [6], et en adaptant la démonstration d'un résultat classique [10] (lemme 5.3.1) au cas ultramétrique, on montre aisément le lemme suivant.

LEMME 2. - <u>Soient</u> $P(X)$ <u>et</u> $Q(X) \in \underset{\sim}{Z}[X]$, <u>soient</u> $m = \deg(P)$ <u>et</u> $n = \deg(Q)$, <u>et soit</u> $\alpha \in \underset{\sim}{C}_p$ <u>tel que</u> $|\alpha| \leqslant 1$. <u>Alors</u>

$$\frac{1}{(m + n)!\ H(P)^n\ H(Q)^m} \leqslant \mathcal{R}(P , Q) < \|P\|^n\ \|Q\|^m \max(|P(\alpha)| , |Q(\alpha)|) .$$

Alors, par un raisonnement apparenté à celui du théorème 5.1.1 de [10], on peut établir la proposition suivante.

PROPOSITION. - <u>Soit une suite de polynômes</u> $Q_n(X) \in \underset{\sim}{Z}[X]$ <u>telle que</u>

$$\log H(Q_n) \leqslant kn \quad (k \in \underset{\sim}{R}^+) \quad \underline{\text{et}} \quad \deg(Q_n) \leqslant q , \text{ pour tout } n \in \underset{\sim}{N} .$$

<u>Soit</u> $\alpha \in \underset{\sim}{C}_p$ <u>transcendant sur</u> $\underset{\sim}{Q}$ <u>tel que</u> $|\alpha| \leqslant 1$. <u>Alors, on a</u>

$$\liminf_{n \to \infty} \left(\frac{- \log |Q_n(\alpha)|}{2q \log H(Q_n)}\right) \leqslant 1 .$$

Grâce au théorème 3, on en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> P_n <u>une suite de</u> $\underset{\sim}{Z}[X , Y]$ <u>telle que, pour tout</u> $n \in \underset{\sim}{N}$, $(0 , 0)$ <u>soit un zéro de</u> P_n <u>d'ordre</u> $\leqslant q$, <u>et telle que</u>

$$\log H(P_n) \leqslant Kn \quad (K \in \underset{\sim}{R}^+) \quad \underline{\text{et}}\ \lim_{n\to\infty} \frac{\deg(P_n)}{\log(H_n)} = 0 .$$

Soient a et $b \in \underset{\sim}{C}_p$ tels que $|a| \leqslant |b| = 1/p$, et tels que a/b soit transcendant.

(i) On a

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{-\log M(P_n(\exp(ax)\ ,\ \exp(bx))\ ,\ \frac{1}{p})}{2q \log H(P_n)} \leqslant 1 .$$

(ii) Il existe une sous-suite $r \longrightarrow P_{n_r}$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre des zéros de $P_{n_r}(\exp(ax)\ ,\ \exp(bx))$ dans D soit majoré par $(2q \log H(P_{n_r}))(1 + \varepsilon)$, quand r est assez grand.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection Sup. "Le Mathématicien", 14).

[2] ESCASSUT (Alain). - Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., Series A, t. 77, 1974, p. 339-351.

[3] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate, Astérisque n° 10, 1973, p. 1-107.

[4] ESCASSUT (Alain). - Eléments spectralement injectifs et générateurs universels dans une algèbre de Tate, Collectanea Math., Barcelona, t. 28, 1977, p. 131-148.

[5] ESCASSUT (Alain). - Type de transcendance p-adique, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 5e année, 1977/78, n° 8.

[6] LANG (Serge). - Algebra. - Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1965 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[7] LANG (Serge). - Introduction to transcendantal numbers. - Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1966 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[8] SERRE (Jean-Pierre). - Dépendance d'exponentielles p-adiques, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 7e année, 1965/66, n° 15, 13 p.

[9] TATE (John). - Rigid analytic spaces, Invent. Math., Berlin, t. 12, 1971, p. 257-289.

[10] WALDSCHMIDT (Michel). - Nombres transcendants. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 402).

(Texte reçu le 7 juillet 1978)

Alain ESCASSUT
Laboratoire Math.
et Inform. associé au CNRS
Université de Bordeaux-I
351 cours de la libération
33405 TALANCE