

# GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

PHILIPPE ROBBA

## Clôture algébrique relative de certains anneaux de séries entières

*Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, tome 6 (1978-1979), exp. n° 21, p. 1-2

[http://www.numdam.org/item?id=GAU\\_1978-1979\\_\\_6\\_\\_A15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A15_0)

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CLÔTURE ALGÈBRIQUE RELATIVE DE CERTAINS ANNEAUX DE SÉRIES ENTIÈRES

(d'après un travail en commun avec B. DWORK)

par Philippe ROBBA (\*)  
[Univ. Paris-Sud, Orsay]

Soit  $K$  un corps complet pour une valuation ultramétrique de caractéristique  $0$ .

Soit  $K\{X\} = K\{X_1, \dots, X_n\}$  l'anneau des séries entières à  $n$  variables, à coefficients dans  $K$ , convergeant dans une boule de rayon  $> 1$ , c'est-à-dire des séries  $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} a_\nu X^\nu$  telles qu'il existe  $\varepsilon > 0$  pour lequel

$$|a_\nu| (1 + \varepsilon)^{|\nu|} \rightarrow 0 \text{ quand } |\nu| \rightarrow +\infty.$$

Soit  $K\langle\langle X \rangle\rangle$  l'anneau des séries  $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} a_\nu X^\nu$  telles que  $|a_\nu| \rightarrow 0$  quand  $|\nu| \rightarrow +\infty$ .  $K\langle\langle X \rangle\rangle$  est le complété de  $K\{X\}$  pour la norme de Gauss.

Nous avons montré le résultat suivant.

**THÉORÈME.** -  $K\{X\}$  est algébriquement clos dans  $K\langle\langle X \rangle\rangle$ .

La démonstration complète paraîtra ultérieurement. Nous nous contenterons d'esquisser la démonstration.

Schéma de la démonstration. - Pour  $g(X) = \sum a_\nu X^\nu$ ,  $\lim |a_\nu| = 0$ , on pose

$$|g| = \sup_\nu |a_\nu|.$$

Soit alors  $f \in K\{X\}[Y]$ , et soit  $u \in K\langle\langle X \rangle\rangle$  tel que  $f(u) = 0$ . Comme  $K$  est de caractéristique  $0$  on peut se ramener au cas où  $f'(u) \neq 0$ . Soit  $\omega = |f'(u)|$ .

On montre d'abord que  $u$ , élément analytique sur la boule unité  $B(0, 1^+)$ , se prolonge analytiquement en dehors de  $B(0, 1^+)$ , c'est-à-dire qu'il existe un ensemble (analytique)  $A$  non contenu dans  $B(0, 1^+)$ , avec  $A \cap B(0, 1^+) \neq \emptyset$ , et un élément analytique  $\tilde{u}$  sur  $A$  tel que  $u = \tilde{u}$  sur  $A \cap B(0, 1^+)$ .

Pour cela, on considère une approximation suffisamment bonne de  $u$  par un polynôme  $\eta \in K[X]$ . En appliquant la méthode des approximations successives (ou encore un lemme de Newton), on montre l'existence d'un couple  $A, \tilde{u}$ , où  $A$  est de la forme

$$A = \{X \in K^n ; |f'(\eta(X))| \geq \sigma \text{ et } |X| = \max |X_i| \leq R\}$$

où  $\sigma$  et  $R$  vérifient les conditions

(\*)  $\sigma < \omega$  et  $R > 1$ .

(\*) Texte reçu le 4 juillet 1979.

Philippe ROBBA, 138 rue Nationale, 75013 PARIS.

Soit  $P(X)$  la partie dominante de  $f'(\eta(X))$ , c'est-à-dire que si

$$f'(\eta(X)) = \sum_{\nu} a_{\nu} X^{\nu},$$

on pose  $P(X) = \sum_{\nu} a_{\nu} X^{\nu}$  la sommation étant étendue aux multi-indices  $\nu$  tels que  $|a_{\nu}| = \sup_{\mu} |a_{\mu}| = |f'(\eta)| = \omega$ . Il est clair que  $P$  est un polynôme et que, quitte à augmenter  $\sigma$  et diminuer  $R$ , mais toujours en vérifiant la condition (\*), on aura

$$A = \{X \in \mathbb{R}^n ; |P(X)| \geq \sigma \text{ et } |X| \leq R\}.$$

On montre facilement que par une rotation des axes (c'est-à-dire un changement de variable  $Y = UX$  où  $U$  est une matrice inversible de  $GL_n(\mathbb{O}_K)$ ; une telle transformation envoie la boule  $B(0, r)$  sur elle-même), on peut se ramener au cas où  $P$  vérifie de plus la condition

$$|a_{\nu(i)}| = \omega = |P| \text{ pour } 1 \leq i \leq n, \text{ où } \nu(i) = (m \delta_{ij})_{1 \leq j \leq n}, m = \deg P.$$

Ceci signifie que  $A$  contient les polycouronnes

$$\Delta_i = \{X \in K^n ; 1 < |X_i| < R \text{ et } |X_j| < 1 \text{ pour } j \neq i\}, 1 \leq i \leq n.$$

Soit  $\hat{u}$  la fonction égale à  $u$  dans  $B(0, 1^+)$ , et à  $\tilde{u}$  dans  $A$ . Soit  $D_i$  le polydisque

$$D_i = \{X \in K^n ; |X_i| < R \text{ et } |X_j| < 1 \text{ pour } j \neq i\}.$$

On montre alors que  $\hat{u}$  est séparément développable en série entière dans  $D_i$ , et donc globalement développable en série entière dans  $D_i$  (Il est évident que  $\hat{u}$  est développable en série entière par rapport aux  $X_j$  pour  $j \neq i$  compte tenu du fait que  $\hat{u}$  est un élément analytique dans  $B(0, 1^+)$ , resp.  $\Delta_i$ , donc globalement développable en série entière dans  $B(0, 1^+)$ , resp. globalement développable en série de Laurent dans  $\Delta_i$ , seuls les  $X_i$  peuvent avoir des exposants négatifs. Le fait que  $\hat{u}$  est également développable en série entière par rapport à  $X_i$  résulte des propriétés des éléments analytiques d'une variable).

Ce résultat est vrai pour tous les  $D_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Comme le domaine de convergence d'une série entière est multiplicativement convexe (\*\*), le domaine de convergence de la série de Taylor de  $\hat{u}$  en  $0$ , qui coïncide avec la série de Taylor de  $u$ , est l'enveloppe multiplicativement convexe des  $D_i$ , donc contient la boule  $B(0, R_1^+)$  avec  $R_1 = R^{1/n}$ .

(\*\*) Ceci signifie que si  $X$  et  $Y$  appartiennent au domaine de convergence, pour tous  $\lambda$  et  $\mu$  réels avec  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $0 \leq \mu \leq 1$  et  $\lambda + \mu = 1$ ,  $X^{\lambda} Y^{\mu} = (X_i^{\lambda} Y_i^{\mu})$  appartient au domaine de convergence.