

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

MICHEL EMSALEM

Sur une généralisation de la conjecture de Leopoldt

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. n° 4, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A2_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA CONJECTURE DE LEOPOLDT

par Michel EMSALEM (*)

Soit k un corps de nombres de degré g galoisien sur le corps des rationnels Q , de groupe de Galois $G = \text{Gal}(k/Q)$ et soit p un nombre premier. On suppose k plongé dans C_p , le complété de la clôture algébrique de Q , muni de la valeur absolue p -adique I, I_p . A chaque élément σ de G est associé ainsi le complété K_σ de k en une place au-dessus de p . Le problème du rang p -adique du groupe des unités E de k se réduit facilement à l'étude du rang p -adique dans l'espace $Y = \prod_{\sigma \in G} K_\sigma$ de l'adhérence de l'image de E par l'application diagonale (1), (2). L'étude de cette adhérence comme sous-module galoisien de Y conduit à des minoration de ce rang p -adique.

On peut plus généralement considérer à la place de E un sous-module galoisien M de type fini de k^x et après avoir défini son rang p -adique, énoncer une formule conjecturale (3). Soit $r_M^{(p)}$ ce rang p -adique, χ_M le caractère de la représentation $M \otimes_{\mathbb{Z}} Q$ et $d(M)$ son degré. Si χ_{reg} est le caractère de la représentation régulière de G et si $\chi_M = \sum_i m_i \chi_i$ et $\chi_{\text{reg}} = \sum_i r_i \chi_i$ sont les décompositions de χ_M et de χ_{reg} en caractères irréductibles sur Q , on note

$$\chi_M \wedge \chi_{\text{reg}} = \sum_i \min(m_i, r_i) \chi_i$$

et r_M^{conj} le degré de ce caractère. On note enfin $\delta(M) = \delta(\chi_M) = \max_i (m_i \text{ deg } \chi_i)$ et $\delta_G = \delta(\chi_{\text{reg}})$.

THÉORÈME. - Si M est un sous-ZIGI-module de type fini de k^x , ne contenant pas de puissance de p et qui possède un sous-ZIGI-module N tel que $\chi_M \geq \delta(N) \chi_N$, alors $r_M^{(p)} = r_N^{\text{conj}}$.

Définition. - Un ZIGI-module de type fini N de caractère χ_N sera dit saturé si $\chi_N = \sum_i n_i \chi_i$ et si pour tout i , $n_i = 0$ ou $n_i \geq r_i$.

COROLLAIRE 1. - Sous les hypothèses du théorème, si M et N sont composés des mêmes caractères irréductibles et si N est saturé, alors $r_M^{(p)} = r_M^{\text{conj}}$.

Soit S un ensemble de places de Q contenant la place de l'infini et ne contenant pas p . Un corollaire intéressant du théorème concerne le cas du groupe des S -unités

(*) Michel EMSALEM, Mathématiques, Université Paris-7, Tour 45-55, 2 Place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

$E_S = \{x \in k^X ; \text{pour toute place } v \text{ de } k \text{ n'appartenant pas à } S, |x|_v = 1\}'$.

COROLLAIRE 2. - Soit $(D_1)_{1 \in S}$ la famille des classes de conjugaison des groupes de décompositions des places de Q contenues dans S .

Si $\chi_{E_S} \geq \inf(\delta(\chi_{E_S}), \delta(\chi_{\text{reg}})) \chi_{E_S} \wedge \chi_{\text{reg}}$, le rang p -adique de E_S est égal à son rang conjectural et le caractère de l'image de E_S dans Y est

$$\left(\bigoplus_i \text{Ind}_{D_1}^G 1_{D_1} \right) \wedge \chi_{\text{reg}}, \quad (2).$$

La démonstration du théorème repose sur l'analyse de M comme module galoisien et sur un théorème de Waldschmidt permettant de minorer le rang de matrices à coefficients logarithmes de nombres algébriques (4).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] EMSALEM (Michel). - Rang p -adique de groupes de S -unités d'un corps de nombres, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 297, 1983, série A, p. 225-227.
 - [2] EMSALEM (Michel). - Rang p -adique du groupe des S -unités d'un corps de nombres, journées "Algorithmique, Calcul formel et Arithmétique", [1983. Saint-Etienne], n° 32, 8 p.- Saint-Etienne, UER de Sciences, 1984.
 - [3] JAULENT (J. F.). - Sur l'indépendance l -adique de nombres algébriques, J. of number Theory (à paraître).
 - [4] WALDSCHMIDT (Michel). - Transcendance et exponentielles en plusieurs variables, Invent. Math., t. 63, 1981, p. 97-127.
-