PHILIPPE ROBBA

Quelques remarques sur les opérateurs différentiels d'ordre 1

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. n° 12, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A8_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
11e année, 1983/84, n° 12, 8 p.

30 janvier 1984

QUELQUES REMARQUES SUR LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS D'ORDRE 1

par Philippe ROBBA (*)

Nous avons montré dans un article précédent [Ro 1] comment l'indice d'un opérateur différentiel du premier ordre D dans un disque était lié au rayon de convergence des solutions de cet opérateur en différents points. Nous avions également mis en évidence des propriétés d'additivité de l'indice.

Nous allons dans cet exposé utiliser ces deux résultats pour montrer que, dans un disque B où D n'a pas de singularité, il existe des disques fermés disjoints B_i en nombre fini, uniquement déterminés, tels, pour tout disque B' contenu dans B mais non dans un des B_i, l'indice de D dans B' peut être calculé simplement en déterminant les B_i contenus dans B' ; de même, pour tout point c de B, le rayon de convergence de la solution de D près de c peut être calculé à partir des distances de c aux disques B_i.

Observons que les B_i ne sont pas obtenus de façon constructive et à priori se trouvent dans une extension sphériquement complète de notre corps de base (supposé algébriquement clos).

1. Notations.

- Soit K un corps valué ultramétrique sphériquement complet, de caractéristique 0.

On notera $B^+(c , r)$ (resp. $B^-(c , r)$) les disques fermés (resp. ouverts) de centre c et de rayon r.

Soit $\eta \in K(x)$; posons $D = (d/dx) - \eta$. Si c n'est pas une singularité pour D (c'est-à-dire n'est pas un pôle de η), on note $\rho_c(D)$ le rayon de convergence de la solution u de $Du = 0$ au voisinage du point c.

Soit t un point générique du disque $B^+(a , r)$, on pose

$$\rho_a(D , r) = \rho_t(D) .$$

On dira que le disque $B^\pm(a , r)$ est de type S si $\rho_a(D , r) \geqslant r$, ceci signifie que la solution de $Du = 0$ près du point générique t converge dans tout le disque générique $B^-(t , r)$, donc que D est soluble dans le disque générique. Sinon on dira que le disque $B^\pm(a , r)$ est de type NS (D est Non Soluble (noté NS) dans le disque générique).

On notera $H_c^\pm(r)$ l'espace de Banach des fonctions analytiques bornées dans le disque $B^\pm(c , r)$

(*) Philippe ROBBA, 138 rue Nationale, 75013 PARIS.

$$H_c^+(r) = \{\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n \ ; \ |a_n|\, r^n \longrightarrow 0\}$$

$$H_c^-(r) = \{\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n \ ; \ \sup |a_n|\, r^n < +\infty\} \ .$$

On rappelle que l'endomorphisme L d'un espace vectoriel E a un indice si $\dim \ker L < +\infty$ et $\dim \operatorname{coker} L < +\infty$, et alors l'indice de L est dénoté

$$\chi(L \ , E) = \dim \ker L - \dim \operatorname{coker} L \ .$$

Lorsque D possède un indice dans $H_c^{\pm}(r)$, on notera cet indice

$$\chi_c^{\pm}(D \ , r) = \chi(D \ , H_c^{\pm}(r)) \ .$$

Rappelons [Ro 1] que D a un indice dans $H_c^{\pm}(r)$ si, et seulement si, $B^{\pm}(c \ , r)$ est de type NS.

Nous pouvons énoncer maintenant notre résultat fondamental.

2. THÉORÈME. - Supposons que $\eta \in k(x)$ n'a pas de pôle dans le disque $B^-(a \ , R)$, et posons $D = (d/dx) - \eta$.

1°. Si $\rho := \rho_a(D \ , R) \geq R$ (soit $B^-(a \ , R)$ de type S), alors, pour tout $c \in B^-(a \ , R)$, $\rho_c(D) = \rho$ et, pour tout $r < R$, $B^{\pm}(c \ , r)$ est de type **S**.

2°. Si $\rho = \rho_a(D \ , R) < R$ (soit $B^-(a \ , R)$ de type NS), alors il existe une unique famille finie $(B^+(c_i \ , r_i))_{i\in I}$ de disques fermés disjoints contenus dans $B^-(a \ , R)$, et des entiers $m_i > 0$ associés tels que, si l'on pose

$$m = \sum_{i\in I} m_i \quad \text{et} \quad P(x) = \prod_{i\in I}(x - c_i)^{m_i}$$

(a-1) Si $c \in B^+(c_i \ , r_i)$, alors $\rho_c(D) = r_i$,

(a-2) Si $c \in B^-(a \ , R) - \bigcup_{i\in I} B^+(c_i \ , r_i)$, alors

$$\rho_c(D) = \frac{\rho R^m}{|P(c)|} \ ,$$

(b-1) Si $B^{\pm}(c \ , r) \subset B^+(c_i \ , r_i)$, alors $B^{\pm}(c \ , r)$ est de type S,

(b-2) Si $B^{\pm}(c \ , r)$ est de type NS, n'est pas contenu dans $\bigcup_{i\in I} B^+(c_i \ , r_i)$, et est contenu dans $B^-(a \ , R)$, alors

$$\chi_c^{\pm}(D \ , r) = - \sum_{B^+(c_i, r_i)\subset B^{\pm}(c, r)} m_i \ .$$

(b-3) Si $B^{\pm}(c \ , r)$ contient strictement au moins un des $B^+(c_i \ , r_i)$, il est de type NS.

Ainsi que nous le verrons à la remarque 3.3 les r_i sont entièrement déterminés par la donnée de ρ, R, des c_i et des m_i.

3. Remarques. - Toutes les remarques s'appliquent à la situation du § 2 , la seule intéressante.

3.1. - Les boules $B^+(c_i , r_i)$ et les entiers m_i sont entièrement caractérisés par les conditions (a-1), (a-2) (resp. (b-1), (b-2)).

3.2. - La condition (a-1) (resp. (b-1)) exprime que les disques $B^+(c_i , r_i)$ sont de type S, et la condition (a-2) (resp. (b-2)) exprime qu'ils sont maximaux avec cette propriété, par conséquent pour tout i , on a $\rho_{c_i}(D , r_i) = r_i$.

3.3. - Soit $c \in B^-(a , R)$. Pour $r < R$ et $r > r_i$ si $c \in B^+(c_i , r_i)$, on voit, en prenant le point générique t de $B^+(c , r)$, que

$$\rho_c(D , r) = \rho_t(D) = \frac{\rho R^m}{|\rho(t)|} = \frac{\rho R^m}{|\rho|_c(r)} .$$

En particulier, en faisant tendre r vers R , on retrouve

$$\rho_c(D , r) = \frac{\rho R^m}{|\rho|_c(R)} = \rho .$$

En prenant $c = c_i$, et en faisant tendre r vers r_i , on trouve

$$\rho_{c_i}(D , r_i) = \frac{\rho R^m}{|\rho|_{c_i}(r_i)} = \frac{\rho R^m}{r_i^{m_i} \prod_{j \neq i} |c_j - c_i|^{m_j}} .$$

Comme on sait que $r_i = \rho_{c_i}(D , r_i)$ on a donc

$$r_i^{m_i+1} = \frac{\rho R^m}{\prod_{j \neq i} |c_j - c_i|^{m_j}}$$

4. Quelques conséquences du théorème fondamental. - On considère toujours la situation du § 2. Observons qu'alors $-\chi_a^-(D , R) = m$. Nous allons discuter le comportement de $\rho_c(D)$ suivant les valeurs de m .

Observons que P est le polynôme constant si, et seulement si, $m = 0$ et que si $m > 0$, alors $|\rho(c)| < |\rho|_a(R) = R^m$. Il en résulte que, si $m = 0$, pour tout $c \in B^-(a , R)$, $\rho_c(D) = \rho$, et que s'il existe un $c \in B^-(a , R)$ avec $\rho_c(D) = \rho$, alors $m = 0$. (C'était déjà connu (cf. [Ro 1]).

Si $m = 1$ on a un seul disque spécial $B^+(c_1 , r_1)$ avec $m_1 = 1$. Alors $r_1 = \sqrt{R\rho}$. Si $|c - c_1| \leq r_1$, on a $\rho_c(D) = r_1$; si $|c - c_1| > r_1$ on a $\rho_c(D) = (R\rho/|c - c_1|) < r_1$, et donc $r_1 = \sqrt{R\rho} = \sup_{c \in B^-(0,R)} \rho_c(D)$.

De façon générale, pour $m > 0$, observons que l'on a, pour tout $c \in B^-(a , R)$, $\sup_{i \in I} r_i \geq \rho_c(D) > \rho$, et donc $\sup_{c \in B^-(a,R)} \rho_c(D) = \sup_{i \in I} r_i$.

Si $m > 1$, on a d'après la formule 3.1

$$r_i^2 = \frac{R^m \rho}{r_1^{m_i-1} \prod_{j \neq i} |c_j - c_i|^{m_j}} > R\rho .$$

On voit que la valeur maximale pour r_i est obtenue lorsqu'on a un seul disque $B^+(c , r)$ avec $m_1 = m$, et alors $r_1^{m+1} = R^m \rho$. Finalement, pour $m > 1$, on a

$$\sqrt{(R\rho)} < \sup_{c\in B^-(a,R)} \rho_c(D) \leqslant (R^m \rho)^{1/(m+1)}$$

on obtient la valeur maximum dans le cas d'un seul disque $B(c_1 , r_1)$, et on se rapproche de la valeur minimale dans le cas de m disques avec les $|c_i - c_j|$ proches de R .

5. Démonstration du théorème fondamental.

1°. C'est à peu près évident. Si $\rho > R$, la solution près de t est définie dans $B^-(a , r)$ et donc coïncide avec la solution près de c . Donc $\rho_c(D) = \rho$.

Si $\rho = R$, d'après le principe de transfert [Dw], la solution près de c converge dans $B^-(c , R)$, et elle ne peut avoir un rayon de convergence plus grand que R car sinon elle coïnciderait avec la solution près de t et on aurait $\rho > R$. Donc, dans ce cas, on a encore $\rho_c(D) = R = \rho$.

2°. Nous commençons par démontrer (b-1) et (b-2), nous en déduisons (a-1) et (a-2).

On utilisera les propriétés suivantes que l'on trouvera dans [Ro 1].

Si le disque $B^{\pm}(c , r)$, contenu dans $B^-(a , R)$, est de type NS, alors, pour $r < r' < R$, $B^{\pm}(c , r')$ est de type NS, et on a

$$0 \geqslant \chi_c^-(D , r) \geq \chi_c^+(D , r) \geqslant \chi_c^-(D , r') ;$$

la fonction $\chi_c^+(D , r)$ (resp. $\chi_c^-(D , r)$ est continue à droite (resp. à gauche) ; si $B^+(c , r) = \cup_j B^-(d_j , r)$, les $B^-(d_j , r)$ étant disjoints, on a

$$\chi_c^+(D , r) = \Sigma_j \chi_{d_j}^-(D , r) .$$

Il en découle immédiatement que si les disques disjoints $B^+(a_j , r_j)$ sont contenus dans $B^-(c , r)$ on a

$$\Sigma_j \chi_{a_j}^+(D , r_j) > \chi_c^-(D , r) .$$

Notons $\mathfrak{NS}$ la famille des disques $B^+(c , r)$ fermés de type NS contenus dans $B^-(a , R)$ tels que $\chi_c^+(D , r) < 0$.

Si l'on a des éléments disjoints $B^+(a_j , r_j)$ de $\mathfrak{NS}$, comme ils sont contenus dans $B^-(a , R)$ on a

$$\Sigma_j - \chi_{a_j}^+(D , r_j) \leqslant - \chi_a^-(D , R) = m ,$$

ce qui montre que, si l'on a $m + 1$ disques appartenant à $\mathfrak{NS}$, l'un d'entre eux doit être contenu dans l'un des autres. Si $\mathfrak{NS}$ est muni de la relation d'ordre définie par l'inclusion, on a donc au plus m chaînes maximales disjointes dans $\mathfrak{NS}$. Soit $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ une famille maximale de chaînes maximales disjointes. Posons

$$B^+(c_i , r_i) = \bigcap_{B^+(c,r)\in\mathcal{C}_i} B^+(c , r) .$$

Cette intersection est non vide parce que K est sphériquement complet.

On pose

$$m_i = - \lim_{B^+(c,r)\in\mathcal{C}_i} \chi_c^+(D , r) .$$

Montrons que $B^+(c_i , r_i)$ est de type S. En effet si $B^+(c_i , r_i)$ était de type NS, il existerait $c \in B^+(c_i , r_i)$ tel que $\chi_c^-(D , r) < 0$ et alors, pour $r' < r$ assez proche de r , $B^+(c , r')$ serait de type NS avec $\chi_c^+(D , r') = \chi_c^-(D , r) < 0$, donc $B^+(c , r')$ appartiendrait à $\mathfrak{NS}$ ce qui contredirait la maximalité de la chaîne $\mathcal{C}_i$.

Les $B^+(c_i , r_i)$ et les m_i sont les disques et les entiers annoncés par le théorème. La propriété (b-1) découle du fait que les $B^+(c_i , r_i)$ sont de type S.

Nous allons vérifier la propriété b-2.

Par définition de m_i , pour $r > r_i$ suffisamment proche de r_i, $B^+(c_i , r)$ est de type NS et l'on a $\chi_{c_i}^+ (D , r) = - m_i$ avec $B^\pm(c_i , r)$ ne contenant pas de $B^+(c_j , r_j)$ pour $j \neq i$, pour $B^\pm(c_i , r)$ la propriété (b-2) est donc vérifiée. Il en résulte également, d'après ce qu'on a vu au début de ce paragraphe, que, pour $B^\pm(c , r)$ contenu dans $B^-(a , R)$ et non dans $\bigcup_i B^+(c_i , r_i)$, $B^\pm(c , r)$ est de type NS et

$$\chi_c^\pm(D , r) \leqslant - \sum_{B^+(c_i,r_i)\subset B^\pm(c,r)} m_i .$$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des $B^\pm(c , r)$ de ce type pour lesquels on n'a pas égalité. Supposons $\mathcal{E}$ non vide.

Soit $\mathcal{C}$ une chaîne maximale dans $\mathcal{E}$ (ordonné par l'inclusion), considérons l'intersection des disques de la famille $\mathcal{C}$. Supposons que le disque ainsi obtenu soit de type NS. S'il est fermé, par suite de la propriété de continuité de l'indice, il appartient à la famille $\mathcal{E}$; alors, par suite de la propriété d'additivité de l'indice, il contient une boule ouverte de même rayon qui appartient à la famille $\mathcal{E}$ ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{C}$. Si ce disque est ouvert, c'est qu'il appartient à $\mathcal{C}$; par suite de la propriété de continuité de l'indice il contient un disque de rayon plus petit appartenant à la famille $\mathcal{E}$. Il en résulte que l'intersection des disques de $\mathcal{C}$ est de type S et donc un des $B(c_i , r_i)$. Mais on a vu que les disques $B(c_i,r)$, avec $r > r_i$ assez proche de r_i , n'appartenaient pas à $\mathcal{E}$ On a donc une contradiction ce qui montre que $\mathcal{E}$ est vide.

Démontrons maintenant (a-1) et (a-2).

Comme $B^+(c_i , r_i)$ est de type S, d'après le théorème de transfert [Dw] si $c \in B^+(c_i , r_i)$, comme D n'a pas de singularité dans $B^-(c , r_i)$, on a $\rho_c(D) = r_i$.

Soit $c \in B^-(a , R) - \bigcup_{i\in I} B^+(c_i , r_i)$. Posons $\sigma := \rho_c(D)$. Le disque $B^+(c , \rho)$ est de type S et ne peut donc contenir aucun des disques $B^+(c_i , r_i)$ car cela contredirait (b-2). Pour $\sigma < r \leqslant R$, $B^+(c , r)$ est de type NS car sinon on aurait $\rho_c(D) = r$ contredisant la définition de σ . On sait alors [Ro 1] que l'on a la relation

$$\left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_c(D , r)}{d \operatorname{Log} r}\right)^{\pm} = \chi_c^{\pm}(D , r) .$$

Le polynôme P étant défini dans l'énoncé, on sait que l'on a

$$\left(\frac{d \operatorname{Log} |P|_c(r)}{d \operatorname{Log} r}\right)^{\pm} = \operatorname{ord}_c^{\pm}(P , r)$$

où $\operatorname{ord}_c^{\pm}(P , r)$ désigne le nombre de zéros de P dans le disque $B^{\pm}(c , r)$. Comme d'après (b-2) (et la définition de P), $\chi_c^{\pm}(D , r) = - n \, d_c^{\pm}(P , r)$, il en résulte que

$$\rho_c(D , r) = C/|P|_c(r) .$$

On détermine la constante C en choisissant $r = R$, ce qui donne

$$C = \rho \, |P|_c(R) = \rho \, R^m .$$

Par continuité, on obtient, en faisant tendre r vers σ ,

$$\rho_c(D , \sigma) = \rho \, R^m/|P|_c(\sigma) .$$

Comme $\rho_c(D , \sigma) = \sigma = \rho_c(D)$ est comme, P n'ayant pas de zéros dans $B^+(c , \sigma)$, $|P|_c(\sigma) = |P(c)|$, on obtient la relation (a-2).

6. Examples. - Nous allons commencer par indiquer une méthode permettant de calculer l'indice d'un opérateur $D = (d/dx) - \eta$ dans un disque. Nous supposons que nous nous sommes ramenés au cas du disque $B^+(0 , 1)$. Nous supposerons également que D n'a pas de singularités dans $B^+(0 , 1)$, mais ce que nous dirons resterait valable sinon à condition de considérer l'indice généralisé de D (cf. [Ro 2]). Il résulte de la démonstration du théorème 4.2 que, si l'on dénote par $\eta_n \in K(x)$ le reste de la division de (d^n/dx^n) par D , le disque $B^+(0 , 1)$ est de type NS si, et seulement si, il existe un n pour lequel $|\eta_n|_{gauss} > |n \, !|$. Si m est le plus petit n pour lequel cette inégalité a lieu, on a, pour $c \in B^+(0 , 1)$,

$$\chi_c^{\pm}(D , 1) = - \frac{1}{m} \operatorname{ord}_c^{\pm}(\eta_m , 1) .$$

Dans la pratique, m est toujours de la forme $m = p^s$.

Le critère est facile à appliquer dans les deux cas suivants

(a) $|\eta|_{gauss} > 1$, on prend $m = 1$ et

$$\chi_c^{\pm}(D , 1) = - \mathrm{ord}_c^{\pm}(\eta , 1)$$

(b) $|\eta|_{gauss} = 1$ et $|\eta_p|_{gauss} = 1$, on prend $m = p$. D'après un résultat célèbre de Barsotti [Ba], on sait que l'on a, en caractéristique p ,

$$\bar{\eta}_p = \bar{\eta}^{(p-1)} + \bar{\eta}^p .$$

Alors $|\eta_p|_{gauss} = 1$ équivaut à $\bar{\eta}_p \neq 0$, et on a alors $\mathrm{ord}_c^-(\eta_p, 1) = \mathrm{ord}_c \bar{\eta}_p$ et $\mathrm{ord}_c^+(\eta_p , 1) = \deg \bar{\eta}_p$.

Prenons alors $D = (d/dx) - x^{p-1}$.

Le critère précédent nous montre que, pour $R > 1$, on a

$$\chi_0^{\pm}(D , R) = - \mathrm{ord}_0^{\pm}(x^{p-1} , R) = - (p - 1) .$$

On obtient pour $r = 1$

$$\bar{\eta}_p = (p - 1)! + x^{p(p-1)} = (x^{p-1} - 1)^p = (x - 1)^p (x - 2)^p \dots (x - (p - 1))^p \pmod p.$$

Ce qui montre que

$$\chi_1^-(D , 1) = \chi_2^-(D , 1) = \dots = \chi_{p-1}^-(D , 1) = - 1 .$$

Par ailleurs la solution de D près de t étant $\exp(x^p - t^p)/p$, on trouve que, pour $r < 1$, $\rho_0(D , r) = p^{-1/(p-1)}$ et donc par continuité $\rho_0(D, 1) = \rho = p^{-1/(p-1)}$.

Il existe donc $c_i \in B^-(i , 1)$, $i = 1 , r \dots (p - 1)$ tel que

$$\rho(D , c_i) = \sqrt{p} = p^{-1/2(p-1)} .$$

Déterminons $\rho_1(D)$. Posons $x = 1 + y$. La solution de D près de 1 est

$$u(x) = \exp(x^p - 1)/p = \exp(\frac{y^p}{p} + y + \textstyle\sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{j} y^j) ;$$

$$\exp(\frac{y^p}{p} + y) \text{ converge pour } \mathrm{ord}_p\, y > \frac{2(p - 1)}{p^2(p - 1)} ;$$

$$\exp(\frac{1}{p} \binom{p}{j} y^i) \text{ converge pour } \mathrm{ord}_p\, y > \frac{1}{j(p - 1)} .$$

Par conséquent si $\frac{2(p - 1)}{p^2(p - 1)} < \frac{1}{2(p - 1)}$, ce qui équivaut à $p > 3$, on a

$$\rho_1(D) = p^{-(1/2(p-1))} .$$

Ceci montre que, dans ce cas, on peut prendre $c_1 = 1$, et de même $c_i = i$ pour $i = 2 \dots (p - 1)$.

Par contre, pour $p = 2 , 3$, on a

$$\rho_1(D) = p^{-(2(p-1) / p^2(p-1))} = \frac{\rho}{|1 - c_1|} = \frac{p^{-i/(p-1)}}{|1 - c_1|}$$

ce qui donne

$$\mathrm{ord}_p(1 - c_1) = - \frac{1}{p - 1} + \frac{2(p - 1)}{p^2(p - 1)} = - \frac{p - 1}{p^2}$$

ce qui montre que c_1 appartient à une extension ramifiée de $\underset{\sim}{Q}_p$.

Je pense que, pour $p = 3$, c_1 peut être choisi dans une extension finiment ramifiée de $\underset{\sim}{Q}_p$, tandis que, pour $p = 2$, c_1 appartient essentiellement à l'extension maximalement complète de $\underset{\sim}{C}_p$.

Pour $p = 2$, on trouve, en posant $x = c_1 + y$,

$$u(x) = \exp\left(\frac{x^2 - c_1^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{y^2}{2} + c \ , y\right) .$$

Cette fonction a rayon de convergence $2^{-1/2}$. Si on pose $y = - 2 c_1 z$ et $\pi' = - 2 c^2$, on voit que $\exp \pi'(z - z^2)$ a rayon de convergence $2^{1/2}$. Avec $\pi = (- 2)^{1/(2-1)} = - 2$ on voit que $\exp \pi(z - z^2)$ a rayon de convergence $2^{1/4}$. On a $|\pi| = |\pi'| = 1/2$.

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] BARSOTTI (I.). - Repartitions on Abelian varieties, Illinois J. of Math., t. 2, 1958, p. 43-70.

[Dw] DWORK (B.). - On p-adic differential equation, II, Annals of Math., Series 2, t. 98, 1973, p. 366-376.

[Ro 1] ROBBA (P.). - Index of p-adic differential operators, III : Application to exponenti l sums, Astérisque n° 119-120, 1984, p. 191-266.

[Ro 2] ROBBA (P.). - Indice d'un opérateur différentiel p-adique, IV : Cas des systèmes, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 35, 1985 (à paraître).