ALAIN ESCASSUT

Prolongement analytique à travers un T-filtre

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 12, nº 1 (1984-1985), exp. nº 5, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1984-1985__12_1_A4_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
12e année, 1984/85, n° 5, 6 p.

12 novembre 1984

PROLONGEMENT ANALYTIQUE A TRAVERS UN T-FILTRE

par Alain ESCASSUT (*)

Soit $(K , | |)$ un corps ultramétrique complet algébriquement clos. Pour toute partie D de K, on notera $H(D)$ le K-espace vectoriel des éléments analytiques sur D, [K_1, E_1], muni de la topologie de la convergence uniforme sur D, et on notera $H_b(D)$ la K-algèbre de Banach des éléments analytiques bornés sur D, munie de la norme $\|\cdot\|_D$ de la convergence uniforme sur D. En particulier, on sait que $H(D) = H_b(D)$ si, et seulement si, D est fermé borné.

D'autre part, on note $H_0(D)$ la sous-algèbre des f tels que

$$\lim_{|x|\to\infty, x\in D} f(x) = 0$$

quand D n'est pas bornée.

Rappelons qu'on appelle T-suite croissante [S_1] de centre a, de diamètre R, une suite $(T_{m,i} ; q_{m,i})$, $1 \leqslant i \leqslant k_m$, où les $q_{m,i} \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, et où les $(T_{m,i})$, $1 \leqslant i \leqslant k_m$, sont des trous de D de diamètre $\rho_{m,i}$, de centre $\alpha_{m,i}$, inclus dans un même cercle $C(a , d_m)$ avec $d_m < d_{m+1}$, vérifiant

$$0 = \lim_{m\to\infty}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant k_m}\left[\left(\frac{d_m}{\rho_{m,i}}\right)^{q_{m,i}} \prod_{j\neq i}\left(\frac{d_m}{|\alpha_{m,i} - \alpha_{m,j}|}\right)^{q_{m,j}}\right]\right)\prod_{\ell=1}^{m}\left(\frac{d_m}{d_\rho}\right) \quad \text{avec} \quad q_\ell = \sum_{i=1}^{k_m} q_{m,i}$$

Nous appellerons <u>percement</u> d'une T-suite

$$(T_{m,i} ; q_{m,i}) , \quad 1 \leqslant i \leqslant k_m , \quad m \in \mathbb{N}$$

le nombre

$$\rho = \inf(\operatorname{diam}(T_{m,i})) , \quad 1 \leqslant i \leqslant k_m , \quad m \in \mathbb{N}$$

et nous dirons qu'elle est <u>bien percée</u> si $\rho > 0$.

On définit de même des T-suites <u>décroissantes</u>.

Alors nous savons qu'un filtre monotone est un T-filtre si, et seulement si, il admet une T-suite associée. Nous dirons qu'un T-filtre est <u>bien percé</u> si il admet une T-suite bien percée associée.

Soit $\mathfrak{F}$ un filtre monotone d'un infraconnexe D. On notera $\varphi_{\mathfrak{F}}$ la semi-norme multiplicative continue de l'algèbre de Banach $H_b(D)$ pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_D$, définie par $\varphi_{\mathfrak{F}}(f) = \lim_{\mathfrak{F}}|f(x)|$, et on notera $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ l'idéal premier fermé des $f \in H_b(D)$ tels que $\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = 0$.

(*) Alain ESCASSUT, M-11 G Résidence Compostelle, 33600 PESSAC.

Alors, sur l'algèbre de Banach quotient $(H_b(D)/\mathfrak{J}(\mathfrak{F}))$, on peut définir $\bar{\psi}_{\mathfrak{F}}(\bar{f}) = \psi_{\mathfrak{F}}(f)$ (puisque, par définition, $\psi_{\mathfrak{F}}(f) = \psi_{\mathfrak{F}}(f + \varphi)$, $\forall\ \varphi \in \mathfrak{J}(\mathfrak{F})$), et $\bar{\psi}$ est une valeur absolue de $(H(D)/\mathfrak{J}(\mathfrak{F}))$ continue pour la norme quotient.

Par ailleurs, on sait que si la plage $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$ d'un T-filtre est vide, alors $(H(D)/\mathfrak{J}(\mathfrak{F}))$ est un corps.

Les théorèmes P et P' qui suivent montrent que les éléments analytiques peuvent se prolonger à travers un T-filtre bien percé, sans hypothèse supplémentaire. Ils ont été suggérés par la découverte due à Marie-Claude SARMANT [S_2] d'un procédé concret pour construire un prolongement d'une série de Taylor au delà de son disque de convergence.

Nous allons montrer que les éléments analytiques peuvent se prolonger de la façon suivante.

THÉORÈME P. - Soit un infraconnexe fermé borné D, d'enveloppe $d(a\ ,\ R)$, et soit D' un infraconnexe admettant un T-filtre décroissant bien percé, de centre a et de diamètre R, tel que $d(a\ ,\ R) \cap D' = \emptyset$.

Alors, pour tout $\tilde{f} \in H(D)$, il existe $f \in H_0(D \cup D')$ tel que $f(x) = \tilde{f}(x)$, $\forall\ x \in D$.

Par inversion, il est équivalent de montrer le résultat suivant.

THÉORÈME P'. - Soit D un infraconnexe fermé admettant un trou $T = d^-(a\ ,\ R)$, et soit D', un infraconnexe fermé borné inclus dans T, admettant un T-filtre croissant bien percé, de centre a, de diamètre R. Alors, pour tout $f \in H(D)$, il existe $\tilde{f} \in H(D \cup D')$ tel que $f(a) = 0$ et $f(x) = \tilde{f}(x)$, $\forall\ x \in D$.

Remarques.

1° Les autres prolongements de f à $D \cup D'$ sont de la forme $\tilde{f} + h$, où $h(x) = 0$, $\forall\ x \in D$.

2° Pour montrer le théorème P', il suffit de montrer l'existence de $\tilde{f} \in H(D \cup D')$, tel que $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall\ x \in D$. En effet, il existe des éléments $\varphi \in \mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ tels que $\varphi(x) = 0$, $\forall\ x \in D$, et tel que $\varphi(a) = f(a)$, d'où $\tilde{f} - \varphi$ est un autre prolongement de f nul en a.

COROLLAIRE. - Soit D un infraconnexe fermé avec un trou $d^-(a\ ,\ R)$, et soit D' un infraconnexe fermé inclus dans $d^-(a\ ,\ R)$ avec un T-filtre croissant bien percé de centre a, de diamètre R.

L'application qui à tout $f \in H(D \cup D')$ associe sa restriction à D est une surjection de $H(D \cup D')$ sur $H(D)$.

Preuve. - Soit $h \in H(D')$; montrons qu'il existe $f \in H(D)$ tel que $f(x) = h(x)$, pour tout $x \in D'$.

Considérons la décomposition Mittag-Lefflérienne de h sur D'. Alors h peut s'écrire $\bar{h} + \hat{h}$, où $\hat{h} \in H(D' \cup d^-(a, R))$, et $\bar{h} \in H_0(K \setminus d^-(0, R))$.

Grâce au théorème P', il existe $\bar{f} \in H_0(D \cup K \setminus d^-(a, R))$ tel que $\bar{f}(x) = \bar{h}(x)$ pour tout $x \in K \setminus d^-(a, R)$, et par suite il suffit de considérer $f = \bar{f} + \hat{h}$ pour obtenir l'élément f cherché.

La démonstration des théorèmes P et P' s'appuie fondamentalement sur la proposition 1.

PROPOSITION 1. - Soit D un infraconnexe admettant une T-suite croissante de centre 0, de diamètre R, de percement $\rho > 0$, associée à un T-filtre $\mathfrak{F}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi_\varepsilon \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ tel que

(a) $|\varphi_\varepsilon(x) - 1| \leq \varepsilon$ pour $|x| \leq R(1 - \varepsilon)$

(b) $\|\varphi_\varepsilon\|_D \leq 1 + \frac{1}{\rho}$.

On démontre cette proposition en reprenant la construction de $[E_3]$, et en imposant des contraintes supplémentaires pour vérifier (a). La grosse difficulté consiste alors à vérifier (b). Il serait impossible d'avoir un résultat analogue si les diamètres des trous tendaient vers 0.

THÉORÈME A. - Soit D un infraconnexe fermé borné admettant un T-filtre bien percé à plage vide $\mathfrak{F}$. Alors sur le corps quotient $H(D)$ les topologies quotient de $\|\cdot\|_D$ et de $\psi_{\mathfrak{F}}$ sont équivalentes.

Preuve. - On fait la démonstration dans le cas où $\mathfrak{F}$ est croissant, de centre 0, de diamètre R.

Soit $f \in H(D)$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$, tel que $\big||f(x)| - \psi_{\mathfrak{F}}(f)\big|_\infty \leq \varepsilon$. quel que soit $x \in D$ tel que $\big||x| - R\big|_\infty \leq \eta$. On peut naturellement imposer $\eta \leq \varepsilon$.

Maintenant, en considérant $g_\varepsilon = f\varphi_\eta \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$, on voit que $|f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$ pour $|x| \leq R(1 - \eta)$ et que, quand $|x| \geq R(1 - \eta)$, on a

$$|f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq |f(x)| \frac{R}{\rho} \leq (\psi_{\mathfrak{F}}(f) + \varepsilon) \frac{R}{\rho}.$$

Pour tout $f \in H(D)$, soit $\bar{f}$ son image dans $(H(D)/\mathfrak{I}(\mathfrak{F}))$ par la surjection canonique, et soit $\|\cdot\|$ la norme quotient de $\|\cdot\|_D$ sur $(H(D)/\mathfrak{I}(\mathfrak{F}))$. Alors on voit que

$$\|\bar{f}\| \leq \|f - g_\varepsilon\|_D \leq (\psi_{\mathfrak{F}}(f) + \varepsilon) \frac{R}{\rho},$$

et ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\|f\| \leq \psi_{\mathfrak{F}}(f) \frac{R}{\rho}$, d'où l'équivalence des deux topologies

Remarque. - L'hypothèse d'une T-suite bien percée est indispensable. En effet, on a vu dans $[E_4]$ que, dans le cas le plus simple où $k_m = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, si

$\lim_{m\to\infty} \operatorname{diam}(T_m) = 0$, alors la topologie définie par $\|\cdot\|$ est strictement plus fine que la topologie définie par la valeur absolue quotient de $\psi_{\mathfrak{F}}$.

Les propositions 2 et 3 qui suivent sont une application du théorème au cas où la plage du T-filtre, au lieu d'être vide, est au contraire la plus grande possible.

PROPOSITION 2. - Soit $R > 0$, soit D un infraconnexe fermé borné contenant $d(0 , R)$ et admettant un T-filtre $\mathfrak{F}$ décroissant bien percé, de centre 0 et de diamètre R , et soit $A = (H(D)/\mathfrak{J}(\mathfrak{F}))$. Alors la valeur absolue $\bar{\psi}_{\mathfrak{F}}$, quotient de la semi-norme multiplicative $\psi_{\mathfrak{F}}$ définie par $\psi_{\mathfrak{F}}(f) = \lim_{\mathfrak{F}}|f(x)|$, définit sur A une topologie équivalente à celle de la norme $\|\cdot\|$ d'algèbre de Banach quotient de $H(D)$.

Preuve. - On a toujours $\bar{\psi}_{\mathfrak{F}}(u) \leqslant \|u\|$ pour tout $u \in A$. Soit $B = d(0 , R)$, et soit $D' = D \setminus B$. Pour tout $f \in H(D)$, soit $\bar{f}$ son image dans A par la surjection canonique de $H(D)$ sur A .

D'après le théorème 1, il existe M tel que

(1) $$\|f\|_{D'} \leqslant M\, \psi_{\mathfrak{F}}(f) \quad \text{pour tout} \quad f \in H(D') ,$$

et donc pour tout $f \in H(D)$. Soit $\mathfrak{G}$ le filtre croissant de centre 0 , de diamètre R . Alors d'après les résultats classiques, on sait que

(2) $$\psi_{\mathfrak{G}}(f) = \psi_{\mathfrak{F}}(f) \quad \text{pour tout} \quad f \in H(D) .$$

Mais puisque $B \subset D$, on sait que $\psi_{\mathfrak{G}}(f) = \|f\|_B$, d'où, d'après (1) et (2), on voit que

$$\|f\|_D = \max(\|f\|_{D'} , \|f\|_B) \leqslant \max(\psi_{\mathfrak{G}}(f) , M\, \psi_{\mathfrak{F}}(f)) \leqslant M\, \psi_{\mathfrak{F}}(f) ,$$

ce qui achève la démonstration.

Par inversion, comme corollaire, on obtient la proposition 3.

PROPOSITION 3. - Soit $R > 0$; soit D un infraconnexe contenant $K \setminus d^-(0 , R)$ et admettant un T-filtre bien percé croissant de centre 0 , de diamètre R . Soit $A = (H_b(D)/\mathfrak{J}(\mathfrak{F}))$. Alors la valeur absolue quotient de la semi-norme multiplicative $\psi_{\mathfrak{F}}$ associée à $\mathfrak{F}$ définit sur A une topologie équivalente à celle de la norme d'algèbre de Banach quotient.

Preuve du théorème P'. - Pour établir le théorème P', il est immédiat de se ramener au cas où D est de la forme $K \setminus d^-(a , R)$. En effet la décomposition Mittag-Lefflérienne d'un élément $f \in H(D)$ est de la forme $f_0 + f_1$ avec

$$f_1 \in H(D \cup d^-(a , R))$$

et

$$f_0 \in H_0(K \setminus d^-(a , R))$$

de sorte que le problème se réduit à trouver un prolongement de f_0 . On va donc établir la Proposition 4.

PROPOSITION 4. - Soit $R > 0$, soit $D = K \setminus d^-(0, R)$, et soit D' un infraconnexe inclus dans $d^-(0, R)$, admettant une T-suite croissante bien percée de centre 0 , de diamètre R . Alors pour tout $f \in H_b(D)$, il existe $\tilde{f} \in H(D \cup D')$ tel que $f(x) = \tilde{f}(x)$, $\forall x \in D$.

Preuve. - Soit $\mathfrak{F}$ le T-filtre de D' de centre 0 , de diamètre R . On peut naturellement se ramener au cas où D' admet un trou de centre 0 puisque $d^-(0,R)$ contient des trous de D' . Alors x est inversible dans $H(D' \cup D)$. Soit $A = (H(D' \cup D)/\mathcal{J}(\mathfrak{F}))$, soit ω la surjection canonique de $H(D' \cup D)$ sur A , et soit $|.|$ la valeur absolue de A , quotient de la semi-norme multiplicative $\psi_{\mathfrak{F}}$ définie sur $H(D')$ par $\mathfrak{F}$.

Soit $f \in H(D)$; on sait que $f(x)$ est de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$. Soit $\bar{x} = \omega(x)$. Alors $|\frac{1}{\bar{x}}| = \frac{1}{R}$ de sorte que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\bar{x}^n}$ converge dans A puisque A est complète pour $|.|$ d'après la proposition 3.

Soit $h \in H(D' \cup D)$ tel que $\omega(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\bar{x}^n}$, soit $\varepsilon > 0$. Soit $N(\varepsilon)$ tel que $(|a_n|/R^n) \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N(\varepsilon)$, et soit $f_n = \sum_{i=0}^{n}(a_i/x^i) \in R(D' \cup D)$ pour $n \geqslant N(\varepsilon)$.

On sait que $\|(a_i/x^i)\|_D = (|a_i|/R^i)$ et, par suite,

(2) $$\|f_n - f\|_D \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqslant N(\varepsilon) .$$

D'autre part

(3) $$|\omega(f_n - h)| = |\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{\bar{x}^i}| \leqslant \sup_{i \geqslant n+1}(\frac{|a_i|}{R^i}) \leqslant \varepsilon .$$

Or, par définition, $|\omega(f_n - h)| = \lim_{\mathfrak{F}}|f_n(x) - h(x)|$.

Soit $\mathcal{G}$ le filtre décroissant de D de centre 0 et de diamètre R . Dans $H(D' \cup D)$ on sait que

$$\lim_{\mathfrak{F}}|f_n(x) - h(x)| = \lim_{\mathcal{G}}|f_n(x) - h(x)| \quad ([E_2], [E_3])$$

d'où, d'après (3)

$$\lim_{\mathcal{G}}|f_n(x) - h(x)| \leqslant \varepsilon .$$

Mais, grâce à (2), on a donc $\lim_{\mathcal{G}}|f(x) - h(x)| \leqslant \varepsilon$. Ceci est vrai pour un $\varepsilon > 0$ quelconque, d'où $\lim_{\mathcal{G}}(f(x) - h(x)) = 0$.

Mais puisque D est sans T-filtre, la semi-norme multiplicative $\psi_{\mathcal{G}}$ définie sur $H(D)$ par $\psi_{\mathcal{G}}(u) = \lim_{\mathcal{G}}|u(x)|$ est une valeur absolue, d'où la restriction de h à D est égale à f .

BIBLIOGRAPHIE

[E_1] ESCASSUT (A.). - Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne, Indagationes Mathematicae, t. 36, 1974, p. 339-351.

[E_2] ESCASSUT (A.). - Eléments analytiques et filtres percés sur un ensemble infraconnexe, Annali di Mat. pura ed appl., Serie 4, t. 110, 1976, p. 335-352.

[E_3] ESCASSUT (A.). - T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 25, 1975, fasc. 2, p. 45-80.

[E_4] ESCASSUT (A.). - Algèbres de Krasner, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, série A, p. 598-601.

[K_1] KRASNER (M.). - Prolongement analytique dans les corps valués complets : préservation de l'analycité par des opérations rationnelles ; quasi-connexité et éléments analytiques réguliers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 1599-1602.

[K_2] KRASNER (M.). - Prolongement analytique dans les corps valués complets : préservation de l'analycité par la convergence uniforme et par la dérivation ; théorème de Mittag-Leffler généralisé pour les éléments analytiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 2570-2573.

[K_3] KRASNER (M.). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, "Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres" [1964. Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1966 (Colloques internationaux du C. N. R. S., 143).

[M.R.] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). - Prolongement analytique en analyse p-adique, "Colloque de théorie des nombres" [1969. Bordeaux], p. 151-158, Bull. Soc. math. France, Mémoire, 1971, n° 25.

[R] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque, n° 10, 1973, p. 109-220.

[S_1] SARMANT (M.-C.) et ESCASSUT (A.). - T-suites idempotentes, Bull. Sc. math., Paris, t. 106, 1982, p. 289-303.

[S_2] SARMANT (M.-C.). - Décomposition en produit de facteurs de fonctions méromorphes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 292, 1981, p. 127-130.

[S_3] SARMANT (M.-C.). - Prolongement d'une série entière dont le disque de convergence est fermé, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 11e année, 1983/84, n° 22, 15 p.