MICHEL EMSALEM

Une remarque sur la conjecture de Léopoldt

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 14 (1986-1987), exp. n° 4, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1986-1987__14__A2_0>

Groupe d'Etude d'analyse ultramétrique (1986/87)
N°4 , 3 pages.

Le 3 novembre 1986

Exposé n° 4

UNE REMARQUE SUR LA CONJECTURE DE LEOPOLDT

par Michel EMSALEM

J. Ax avait proposé une méthode pour démontrer la conjecture de Leopoldt pour des extensions abéliennes de $\mathbb{Q}$ ou d'un corps quadratique imaginaire. Cette méthode qui repose sur l'analyse du groupe des unités d'un corps de nombres k galoisien sur $\mathbb{Q}$ comme représentation de $Gal(k/\mathbb{Q})$ nécessitait un résultat de transcendance alors seulement conjecturé : l'indépendance linéaire sur le corps des nombres algébriques de logarithmes p-adiques de nombres algébriques multiplicativement indépendants [1]. Cet énoncé était démontré par Brumer [2], suivant immédiatement le résultat donné par Baker dans le cas archimédien.

Cet exposé a pour objet la remarque suivante : dans le cas d'une p-extension abélienne de $\mathbb{Q}$ par exemple, on peut se passer du résultat de transcendance pour démontrer la conjecture de Leopoldt en suivant la méthode d'Ax.

Fixons quelque notations. Soit k un corps de nombres et p un nombre premier. Pour chaque place v de k au dessus de p, on note k_v le complété de k en v et U_v le groupe des unités locales en v. Le groupe des unités globales de k sera noté E, et $\bar{E}$ désignera l'adhérence dans $\prod_{v|p} U_v$ de l'image de E par l'application diagonale. On appelle enfin $\hat{k}$ l'extension abélienne maximale de k non ramifiée en dehors de p, et $\tilde{k}$ le compositum des de $Gal(\hat{k}/k)$ par la suite exacte suivante de $Gal(k/\mathbb{Q})$-modules :

$$(*) \qquad 1 \longrightarrow \prod_{v|p} U_v/\bar{E} \longrightarrow Gal(\hat{k}/k) \longrightarrow Cl(k) \longrightarrow 1 \quad ,$$

où $Cl(k)$ désigne le groupe des classes de k. Le groupe $Gal(\hat{k}/k)$ est le produit de $Gal(\tilde{k}/k)$ et d'un groupe abélien fini. De la suite exacte précédente on déduit l'isomorphisme suivant de $\mathbb{Q}_p[Gal(k/\mathbb{Q})]$-modules

$$Gal(\tilde{k}/k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \cong \prod_{v|p} k_v \;/\mathcal{E}$$

où $\mathcal{E}$ désigne le produit tensoriel sur $\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ et de la p-partie de $\bar{E}$

La *conjecture de Leopoldt* pour k équivaut à l'énoncé suivant :

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E} = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}} E$$

PROPOSITION : Soit *k* une extension galoisienne finie de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois *G* . On suppose que les caractères des représentations irréductibles de *G* définies sur $\mathbb{Q}_p$ et intervenant dans $E\otimes\mathbb{Q}_p$ sont à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et ont une multiplicité inférieure ou égale à 1 dans la décomposition de $E\otimes\mathbb{Q}_p$. Alors la conjecture de Leopoldt est vérifiée pour *k* .

Démonstration. Soit χ un caractère de G défini sur $\mathbb{Q}_p$ et intervenant dans $E\otimes\mathbb{Q}_p$. Soit $c_\chi = 1/|G|(\Sigma_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})\sigma)$ l'idempotent associé à χ . D'après notre hypothèse, c_χ appartient à $\mathbb{Q}_p|G$. Donc

$$c_\chi.(E\otimes\mathbb{Q}_p) = (c_\chi.E\otimes\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q}_p = E_\chi\otimes\mathbb{Q}_p ,$$

où l'on a posé $E_\chi = c_\chi.(E\otimes\mathbb{Q})$. La χ-composante $\mathcal{E}_\chi$ de $\mathcal{E}$ est l'espace engendré sur $\mathbb{Q}_p$ par l'image de E_χ dans l'homomorphisme injectif $E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{E}$. $\mathcal{E}_\chi$ est donc non nulle si E_χ est non nulle, c'est à dire si χ intervient dans $E\otimes\mathbb{Q}_p$ et $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{E}_\chi = \dim_{\mathbb{Q}}E_\chi$, ce qui achève la démonstration.

Exemples :

(1) Si k est une p-extension abélienne de $\mathbb{Q}$, k vérifie la conjecture de Leopoldt. C'est une conséquence de la proposition et du lemme suivant.

LEMME : Soit *G* un p-groupe fini. Tout caractère d'une représentation de *G* définie sur $\mathbb{Q}_p$ est à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Soit χ le caractère d'une représentation de G définie sur $\mathbb{Q}_p$. Les valeurs prises par χ sont dans $\mathbb{Q}_p \cap\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ où ζ_{p^n} est une racine primitive p^n-ième de 1 , et où p^n est l'ordre de G . Le caractère χ est donc à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

Remarque : si G est un p-groupe abélien, toute représentation de G définie sur $\mathbb{Q}_p$ est en fait définissable sur $\mathbb{Q}$.

(2). La proposition s'applique aussi aux extensions abéliennes k de $\mathbb{Q}$, telle que l'ordre g de $\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$ vérifie $\mathbb{Q}_p\cap\mathbb{Q}(\zeta_g) = \mathbb{Q}$ c'est à dire chaque fois qu'il existe une unique place v de $\mathbb{Q}(\zeta_g)$ au dessus de p .

(3) Supposons que k soit une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ telle que $\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})= A_4$ le groupe alterné à quatre lettres. Tous les caractères absolument irréductibles de A_4 sont à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et ils interviennent

dans $E\otimes\bar{\mathbb{Q}}$ avec multiplicité 1 (cf [3] pour un tableau des caractères de A_4). Le corps k vérifie donc la conjecture de Leopoldt.

(4) On suppose maintenant que le corps k est une extension galoisienne imaginaire de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois $G = D_n$ le groupe dihédral dont une présentation est $[r,s;\ r^n=1,\ srs^{-1}=r^{-1}]$. On suppose de plus que la classe de conjugaison dans G de la conjugaison complexe sur k est la classe de conjugaison de s et que n et p vérifient $\mathbb{Q}_p \cap \mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}$ (n est, par exemple, une puissance de p). Le groupe D_n a alors des caractères de degrés 1 et 2 sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et ces caractères interviennent avec une multiplicité au plus 1 dans $E\otimes\bar{\mathbb{Q}}$ (cf [3] pour un tableau de ces caractères). Il s'ensuit que les caractères des représentations de G définies sur $\mathbb{Q}_p$, qui sont à valeurs dans $\mathbb{Q}$, ont aussi une multiplicité au plus 1 dans $E\otimes\mathbb{Q}_p$. La proposition s'applique donc et le corps k vérifie donc la conjecture de Leopoldt.

COROLLAIRE. Si k est un corps quadratique imaginaire la conjecture de Leopoldt est vérifiée à tous les étages de la $\mathbb{Z}_p$-extension anticyclotomique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **J. AX** : *On the units of algebraic number field*, Illinois Journal of Math., (1965).

[2] **A. BRUMER** : *On the units of algebraic number field*, Mathematika, 14, (1967), 121-124.

[3] **J.P. SERRE** : *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, troisième édition (1978).

Université Paris 7
UFR de Mathématiques et UA 212
2 place Jussieu
75251 Paris Cedex 05