Michèle Benois

Présentation et simplifiabilité de certains monoïdes

Groupe d'étude d'algèbre, tome 1 (1975-1976), exp. n° 13, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1975-1976__1__A13_0>

Groupe d'étude d'ALGÈBRE
(Marie-Paule MALLIAVIN)
1re année, 1975/76, n° 13, 3 p.

28 mai 1976

PRÉSENTATION ET SIMPLIFIABILITÉ DE CERTAINS MONOÏDES

par Michèle BENOIS

Résumé. - L'étude des congruences de Church-Rosser nous a amené à examiner les rapports existants entre les propriétés algébriques des monoïdes présentables à l'aide de telles congruences, et la forme des systèmes générateurs de ces congruences. On donne ici des critères de simplifiabilité, de plongement dans un groupe ou d'isomorphie à un groupe, en s'attachant particulièrement aux cas où ces critères sont décidables.

1. Cas général.

Tout monoïde M est quotient d'un monoïde X^* libre sur un ensemble fini ou infini X par une congruence. Tout élément de M est de plusieurs façons produit fini d'éléments de X : $m = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$. On appellera conjugué de m tout élément de M qui se décompose sur X en $x_i x_{i+1} \dots x_m x_1 \dots x_{i-1}$

PROPRIÉTÉ. - Si M est simplifiable à droite, l'ensemble des classes des éléments x de X facteurs d'un élément congru à 1 (1 est le neutre de X^*) engendre un groupe de M .

On démontre successivement que, si M est simplifiable à droite, tout conjugué d'élément congru à 1 est congru à 1 . Ce qui entraine que la classe de tout facteur d'élément congru à 1 admet un inverse.

2. Monoïdes finiment présentés, engendrés par un système unitaire.

M est quotient de X^* , monoïde libre sur l'ensemble fini X , par une congruence engendrée par une relation (ou système) finie de $X^+ \times \{1\}$. On notera F les éléments de X^+ définissant la relation.

PROPRIÉTÉ. - M est simplifiable à droite si, et seulement si, il est produit libre d'un groupe et d'un monoïde libre.

Le groupe est le quotient de X_0^* saturé par la congruence, où X_0 est l'ensemble des x de X facteurs d'un élément congru à 1 . Le monoïde libre est engendré par le complémentaire de X_0 dans X .

Application. - Le groupe quotient de X_0^*, défini comme monoïde finiment engendré et présenté, est isomorphe au groupe présenté par X_0 et F (F n'est pas en général la présentation la plus simple de ce groupe).

En vue d'obtenir des critères décidables de simplifiabilité, on démontre les propriétés suivantes

1° M est simplifiable à droite si, et seulement si, tout conjugué d'élément congru à 1 est congru à 1 .

2° Tout conjugué d'élément congru à 1 est congru à 1 si, et seulement si, tout conjugué d'un élément de F est congru à 1 .

Pour décider de l'équivalence à 1 de tout conjugué d'un élément de F , on est amené à étudier le cas suivant.

3. Monoïdes présentés par un système quasi parfait unitaire.

PROPRIÉTÉ. - Un monoïde présenté par un système quasi parfait unitaire est simplifiable à droite si, et seulement si, il existe une partition de X en $X_0, X_1, \ldots, X_k$, k éléments c_i de X_i^* contenant une, et une seule fois, chaque élément de X_i , et k entiers n_i tels que F soit la réunion des permutés des $(c_i)^{n_i}$ pour $i = 1 , 2 , \ldots , k$.

Exemple.- Avec $X = \{a , b , c\}$, on a

$F = \{(baba , 1) , (abab , 1)\}$
$F = \{(ab , 1) , (ba , 1)\}$
$F = \{(aa , 1)\}$
$F = \{(abc , 1) , (bca , 1) , (cab , 1)\}$.

Remarque. - Le groupe, qui intervient ici, est présenté lui par le système des $(c_i)^{n_i}$ seulement.

4. Monoïdes finiment engendrés et présentés par une relation unitaire.

Dans ce cas, ou bien la relation est quasi parfaite et le monoïde M n'est simplifiable d'un côté que si l'unique élément f de F est une puissance d'un élément x de X , ou bien f est une sesquipuissance et il se décompose de la façon suivante.

$$f = (uv)^n u \quad \text{où} \quad u = (u_1 v_1)^{n_1} u_1 , \ \ldots , \ u_p = (u_{p+1} v_{p+1})^{n_{p+1}} u_{p+1} ,$$

u_{p+1} n'étant pas une sesquipuissance, les $u_i v_i$ étant primitifs, et chaque $u_i v_i$ pouvant être une sesquipuissance. Soient $a , b , \ldots , k$ les plus petits éléments intervenant dans la décomposition des $u_i v_i$. On démontre que tout permuté de f sur les éléments $a , b , \ldots , k$ est congru à 1 . Par conséquent, le monoïde quotient est simplifiable d'un côté si, et seulement si, $a , b , \ldots , k$ sont des éléments de X .

Exemples. - Avec $X = \{x , y\}$ ou $X = \{x , y , z\}$,

$f = xyx$, le quotient du monoïde libre sur $\{x , y\}$ est isomorphe au groupe engendré par un élément,

$f = xyxyx$, le quotient est aussi un groupe,

$f = xzzyxz$, le quotient est un groupe,

$f = xyzx$, le quotient n'est plus simplifiable, ce qui se vérifie aisément, yzxxy est congru à y sans que $zxxy$ soit congru à 1 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADJAN (S. I.). - Defining relations and algorithmic problems for groups and semigroups, Proc. Steklov Inst. Math., t. 85, 1966, 152 p.

[2] CLIFFORD (A. H.) et PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[3] COCHET (Y.) et NIVAT (M.). - Une généralisation des ensembles de Dyck, Israël J. Math., t. 9, 1971, p. 389-395.

[4] LENTIN (A.). - Equations dans les monoïdes libres. - Paris, Gauthier-Villars, 1972 (Mathématiques et Sciences de l'Homme, 16).

[5] MAGNUS (W.), KARASS (A.) et SOLITAR (D.). - Combinatorial group theory. - New York Interscience Publishers, 1966 (Pure and applied Mathematics, Interscience 13).

[6] NIVAT (M.). - On some families of languages related to the Dick set, "Second annual ACM symposium on theory of computing, 1970".

Michèle BENOIS
Mathématiques appliquées
Université de Grenoble
Boite postale 53
38041 GRENOBLE CEDEX