Nicole Raillard

Sur les anneaux de Mori

Groupe d'étude d'algèbre, tome 1 (1975-1976), exp. nº 1, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1975-1976__1__A1_0>

Groupe d'étude d'ALGÈBRE
(Marie-Paule MALLIAVIN)
1re année, 1975/76, n° 1, 4 p.

5 janvier 1976

SUR LES ANNEAUX DE MORI

par Nicole RAILLARD

On dira qu'un anneau commutatif unitaire et intègre est un anneau de Mori [10] si ses idéaux divisoriels entiers satisfont à la condition de chaîne ascendante, où, par idéal de A , on entend un idéal fractionnaire $\mathfrak{a}$ tel que $A : (A : \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$.

Dans une première partie, nous établierons deux théorèmes sur les anneaux satisfaisant à la Q.Q.R.-propriété et à la G.Q.R.-propriété, ces résultats étant des conséquences du théorème 1 de la deuxième partie de [12].

La deuxième partie fera l'objet de l'étude des idéaux premiers associés aux idéaux principaux au sens de [4], de laquelle résultera que tout anneau de Mori admet une représentation en anneaux locaux irréductibles.

Enfin, nous donnerons dans une troisième partie une caractérisation des anneaux de Krull.

1. Anneaux généralisés de fractions.

Définitions.

1° On dit qu'un anneau A a la Q.Q.R.-propriété, si tout surordre est intersection de localisés de l'anneau A [7].

2° On dit qu'un anneau A a la G.Q.R.-propriété, si tout surordre est un anneau généralisé de fractions de A [7].

THÉORÈME 1.1. - Un anneau de Mori A , ayant la Q.Q.R.-propriété, est un anneau de Dedekind.

THÉORÈME 1.2. - La clôture intégrale d'un anneau de Mori, ayant la G.Q.R.-propriété, est un anneau de Dedekind.

2. Idéaux premiers associés.

Définitions.

1° Soit α un élément non nul de K . On notera par $\mathfrak{a}_\alpha$ l'idéal divisoriel entier $\mathfrak{a}_\alpha = \alpha^{-1} A \cap A = A : (A + \alpha A)$.

2° On dira qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est associé à l'idéal $\mathfrak{a}$ s'il existe un élément non nul $a \in A - \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}a^{-1} \cap A$.

On notera par $\mathcal{P}_A$ l'ensemble des idéaux premiers associés aux idéaux principaux d'un anneau A ,

$$\wp_A = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \text{ , tel qu'il existe } \alpha \in K - A \text{ ; } \mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\alpha\}$$

3° On dira qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est faiblement associé à l'idéal $\mathfrak{a}$, s'il existe un élément non nul $a \in A - \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{p}$ soit minimal parmi les idéaux premiers de A, contenant $\mathfrak{a}a^{-1} \cap A$. On notera par P_A l'ensemble des idéaux premiers faiblement associés aux idéaux principaux de A.

$$P_A = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \text{ tel qu'il existe } \alpha \in K - A \text{ ; } \mathfrak{p} \text{ minimal sur } \mathfrak{a}_\alpha\} .$$

4° Un anneau intègre A est appelé faiblement cohérent, si toute intersection de deux idéaux fractionnaires principaux de A est un idéal fractionnaire de type fini.

5° Un anneau intègre est dit irréductible, si ses idéaux maximaux sont des idéaux divisoriels [9].

THÉORÈME 2.1. - Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier d'un anneau de Mori A. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1° $\mathfrak{p}$ est un idéal divisoriel de A,

2° $\mathfrak{p} \in P_A$,

3° $\mathfrak{p} \in \wp_A$.

COROLLAIRE 2.1.1. - Si A est un anneau de Mori de dimension 1, alors

$$\operatorname{Spec} A = \wp_A = P_A .$$

COROLLAIRE 2.1.2. - Tout anneau de Mori de dimension 1 faiblement cohérent est un anneau noethérien.

COROLLAIRE 2.1.3. - Un anneau de Mori faiblement cohérent irréductible est un anneau noethérien.

THÉORÈME 2.2. - Tout anneau de Mori admet une représentation en anneaux locaux irréductibles.

THÉORÈME 2.3. - Tout anneau de Mori faiblement cohérent admet une représentation en anneaux noethérien.

3. Sur les anneaux de Krull.

On rappelle que l'ensemble $D(A)$ des idéaux divisoriels d'un anneau A est muni d'une structure de monoïde commutatif et unitaire grâce à la loi suivante :

$$\mathfrak{a} \text{ , } \mathfrak{b} \in I(A) \text{ , } \mathfrak{a}_v * \mathfrak{b}_v = (\mathfrak{a}.\mathfrak{b})_v = (\mathfrak{a}_v.\mathfrak{b}_v)_v \text{ ,}$$

où $\mathfrak{a}_v$ est l'idéal divisoriel

$$\mathfrak{a}_v = A : (A : \mathfrak{a})$$

Définitions.

1° Un idéal divisoriel $\mathfrak{a}$ d'un anneau A est dit v-fini s'il existe un idéal fractionnaire $\mathfrak{a}'$ de type fini tel que $\mathfrak{a} = A : (A : \mathfrak{a}')$ ([3], p. 83, ex. 11). L'ensemble des idéaux divisoriels v-finis sera noté $D_f(A)$.

2° On dit qu'un anneau A est régulièrement intégralement clos, si tout élément $D_f(A)$ est un élément régulier ([1], p. 89, ex. 30).

3° Un anneau A sera appelé pseudo-pruférien si l'ensemble $D_f(A)$ est un groupe ([3], p. 96, ex. 19).

THÉORÈME 3.1. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° A est un anneau de Mori pseudo-pruférien,

2° A est un anneau de Mori régulièrement intégralement clos,

3° A est un anneau de Krull.

Ce théorème nous permet de donner une démonstration plus courte du résultat suivant de [6] (th. 4, p. 105) :

"Soit A un pseudo-Krull. Alors A est un anneau de Krull type".
En effet, un anneau pseudo-Krull, étant un anneau de Mori régulièrement intégralement clos, est donc un anneau de Krull, et il en résulte que c'est un anneau de Krull-type.

De plus, dans la proposition 5 (p. 106 du même article),

"Soit A un pseudo-Krull tel que tout t-idéal maximal soit un idéal fractionnaire inversible. Alors A est un anneau de Krull".

Nous pouvons remarquer que le résultat est vrai même si on n'a pas l'hypothèse faite sur les t-idéaux maximaux. En effet A , étant un pseudo-Krull, est bien un anneau de Krull.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.).-- Algèbre commutative, chap. 1 et 2. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290; Bourbaki, 27).

[2] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, chap. 5 et 6. - Paris, Hermann, 1964 (Act. scient. et ind., 1308; Bourbaki, 30).

[3] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, chap. 7. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1314, Bourbaki, 31).

[4] BREWER (I. W.) and HEINZER (W. J.). - Associated primes of principal ideals, Duke math. J, t. 41, 1974, p. 1-7.

[5] GILMER (R. W.). - Multiplicative ideal theory, Parts I and II. - Kingston, Queen's University, 1968 (Queen's Papers in pure and applied Mathematics, 12).

[6] HEDSTROM (J. R.). - Domains of Krull type and ideal transforms, Math. Nachr., t. 53, 1972, p. 139-148.

[7] HEINZER (W.). - Quotient overrings of integral domain, Mathematika, London, t. 17, 1970, p. 139-148.

[8] NAGATA (M.). - Local rings. - NewYork, Interscience Publishers, 1962 (Interscience tracts in pure and applied Mathematics, 13).

[9] QUENTEL (M.). - Sur le theorème d'Auslander-Buchsbaum, "Colloque d'algèbre commutative [1972. Rennes], 7p. - Rennes, Université de Rennes, 1973 (Publicationd des Séminaires de Mathématiques).

[10] QUERRÉ (J.). - Sur une propriété des anneaux de Krull, Bull. Sc. math., 2e série, t. 95, 1971, p. 341-354.

[11] QUERRÉ (J.). - Sur les anneaux réflexifs, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279, 1974, Série A, p. 45-47.

[12] RAILLARD (N.). - Sur les anneaux de Mori, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 1571-1573.

Nicole RAILLARD
Mathématiques
Université de Bretagne occidentale
6 avenue Victor Le Gorgeu
29283 BREST CEDEX.