GROUPE D'ÉTUDE D'ALGÈBRE

THOMAS S. BLYTH

Demi-groupes orthodoxes scindés

Groupe d'étude d'algèbre, tome 1 (1975-1976), exp. nº 20, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1975-1976__1__A20_0>

Groupe d'étude d'ALGÈBRE
(Marie-Paule MALLIAVIN)
1re année, 1975/76, n° 20, 7 p.

29 mai 1976

DEMI-GROUPES ORTHODOXES SCINDÉS

par Thomas S. BLYTH

Soit S un demi-groupe othodoxe (c'est-à-dire, un demi-groupe régulier dont les idempotents constituent un sous-demi-groupe), et soit y la congruence la plus fine sur S telle que le demi-groupe S/y soit un demi-groupe inverse. Nous considérons les demi-groupes orthodoxes S pour lesquels, étant donné l'homomorphisme canonique $\natural : S \longrightarrow S/y$, il existe un homomorphisme $\pi : S/y \longrightarrow S$ tel que $\pi\natural = \mathrm{id}_{S/y}$. Lorsqu'il en est ainsi, nous dirons que S est scindé (en anglais, "split"). Il est clair que S est scindé si, et seulement si, S contient un sous-demi-groupe inverse qui rencontre, une fois et une fois seulement, chaque classe modulo y .

Considérons d'abord le cas d'une bande. Dans ce cas y coïncide avec la relation $\mathcal{D}$ de Green.

<u>Définition</u>. - Soit $B = \bigcup\{B_\alpha \; ; \; \alpha \in Y\}$ une bande ayant Y comme demi-treillis de structure, et comme $\mathcal{D}$-classes les bandes rectangulaires B_α . Appelons <u>squelette</u> de B un sous-ensemble $E = \{x_\alpha \; ; \; \alpha \in Y\}$ tel que $x_\alpha \in B_\alpha$ et $x_\alpha x_\beta = x_{\alpha\beta} = x_\beta x_\alpha$, quels que soient $\alpha , \beta \in Y$.

LEMME 1. - <u>Une bande</u> B <u>est scindée si, et seulement si, elle admet un squelette</u>. <u>Si</u> B <u>est scindé par</u> $\pi : B/\mathcal{D} \longrightarrow B$ <u>alors</u> $\operatorname{Im} \pi$ <u>est un squelette de</u> B .

Or il est clair que si T est un demi-groupe orthodoxe scindé, alors la bande B des idempotents de T est aussi scindée. Soit E un squelette de B , et appelons <u>portée</u> (en anglais "span") de E l'ensemble

$$S_p(E) = \{a \in T \; ; \; (\exists\, e , f \in E) \quad e \,\mathcal{R}\, a \,\mathcal{L}\, f\} .$$

Utilisant les résultats connus suivants :

1° dans un demi-groupe orthodoxe T la relation y est donnée par

$$a \, y \, b \Longrightarrow V(a) = V(b) ,$$

où $V(a)$ signifie l'ensemble des inverses de a ,

2° la restriction de y à la bande B des idempotents de T est $\mathcal{D}$,

3° y est "déterminé par les idempotents" (c'est-à-dire, si $a \, y \, b$ avec $b \in B$, alors $a \in B$) ,

4° dans chaque $\mathcal{D}$-classe (bande rectangulaire) de B , on a l'identité $x y z = xz$,

5° $y \cap \mathcal{H}$ se réduit à l'égalité,

on peut montrer que l'ensemble $S_p(E)$ rencontre, une fois et une fois seulement, chaque classe modulo y . D'ailleurs, si $a \in S_p(E)$ avec $e \,\mathcal{R}\, a \,\mathcal{L}\, f$ où $e , f \in E$, et si $a' \in V(a)$, alors nous avons $a^0 = fa'e \in V(a)$ avec $f \mathcal{R} a^0 \mathcal{L} e$, d'où $a^0 \in S_p(E)$ et est l'unique inverse de a dans $S_p(E)$. Nous le noterons a^{-1}. Remarquons aussi que e, $f \in E$ sont déterminés de manière unique par a. En effet, $e = aa^{-1}$ et $f = a^{-1}a$.

THÉORÈME 1. - *Soit T un demi-groupe orthodoxe dont la bande B des idempotents possède un squelette E. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

1° *il y a un sous-demi-groupe inverse S de T qui rencontre chaque classe modulo y une fois, et une fois seulement, et qui admet E comme demi-treillis des idempotents,*

2° $aE^{-1}a \subseteq E$ *quel que soit* $a \in S_p(E)$,

3° $S_p(E)$ *est un sous-demi-groupe de* T.

Lorsque la condition (1) *s'obtient, alors nécessairement* $S = S_p(E)$.

Dans le cas où la bande B des idempotents est *normale* (c'est-à-dire, $efgh = egfh$ quels que soient e, f, g, $h \in B$), nous pouvons utiliser le théorème précédent pour démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 2. - *Soit T un demi-groupe orthodoxe dont la bande B des idempotents est normale. Alors T est scindé si, et seulement si, B est scindé. En particulier, T est scindé lorsque T/y a un élément neutre.*

D'autres exemples de demi-groupes orthodoxes scindés sont fournis par les résultats suivants.

THÉORÈME 3. - *Si T est orthodoxe et T/y est bicyclique, alors T est scindé.*

THÉORÈME 4. - *Si B est une bande presque commutative* (c'est-à-dire quels que soient e, $f \in B$, ou bien $ef = fe$ ou bien $e \mathcal{D} f$), *alors B est scindé.*

Passons maintenant à la considération de la structure des demi-groupes orthodoxes scindés. Nous décrivons d'abord une méthode à construire un tel demi-groupe.

Soit B une bande scindée, et soit E un squelette de B. Soit T_B l'ensemble des isomorphismes θ entre les sous-bandes de B de la forme eBe, où $e \in E$, tels que E soit stable par rapport à θ dans le sens que

$$(\forall f \in \mathcal{D}om\ \theta) \quad f\theta \in E \Longleftrightarrow f \in E .$$

Il est clair que T_B est une génération de la notion correspondante T_E introduite par W. D. MUNN. Nous composons les éléments de T_B de la manière suivante. Etant donnés θ, $\varphi \in T_B$, tels que

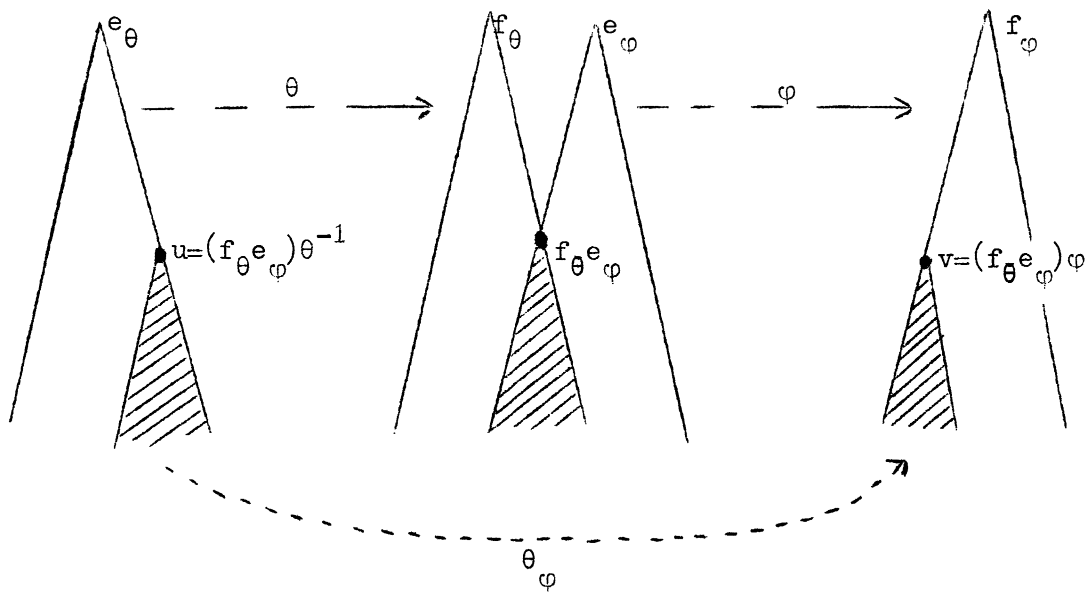
$$\theta : e_\theta Be_\theta \longrightarrow f_\theta Bf_\theta \quad \text{et} \quad \varphi : e_\varphi Be_\varphi \longrightarrow f_\varphi Bf_\varphi .$$

Nous définissons θ_φ comme l'isomorphisme dont le domaine est uBu, où $u = (f_\theta e_\varphi)\theta^{-1} \in E$, et le codomaine est vBv où $v = (f_\theta e_\varphi)\varphi \in E$, et $x(\theta_\varphi) = (x\theta)\varphi$ quel que soit $x \in \mathcal{D}om\ \theta_\varphi$.

Or, l'ordre naturel sur B est donné par

$$f \leqslant e \Longleftrightarrow fe = ef = f \Longleftrightarrow f = efe \Longleftrightarrow f \in eBe \ .$$

Par rapport à cet ordre naturel, la définition précédente de θ peut être représentée par le diagramme suivant :



Avec la notation précédente, nous voyons alors que

$$e_{\theta\varphi} = u = (f_\theta \ e_\varphi)\theta^{-1} \quad \text{et} \quad f_{\theta\varphi} = v = (f_\theta \ e_\varphi)\varphi$$

LEMME 2. - T_B <u>est un demi-groupe inverse</u>.

Nous trouverons très commode d'étendre chaque $\theta \in T_B$ à une application $\bar{\theta} : B \longrightarrow B$, donnée par $b\bar{\theta} = (e_\theta \ be_\theta)\theta$ quel que soit $b \in B$. Quoique $\bar{\theta}$ n'est pas en général un homomorphisme, nous avons la propriété suivante.

LEMME 3. - $\forall \ \theta \ , \ \varphi \in T_B \ , \ \overline{\theta\varphi} = \bar{\theta}\bar{\varphi}$.

Etant donné $\theta \in T_B$, disons $\theta : \ e_\theta \ Be_\theta \longrightarrow f_\theta \ Bf_\theta$. Il est clair que $E \cap \mathcal{D}om \ \theta = e_\theta \ E$ et $E \ \mathrm{Cod} \ \theta = f_\theta \ E$. D'ailleurs, il y a un isomorphisme

$$\hat{\theta} : \ e_\theta \ E \longrightarrow f_\theta \ E \quad \text{donné par} \quad x\hat{\theta} = x\theta \quad \text{quel que soit} \quad x \in e_\theta \ E \ .$$

l'application $\hat{} : \ T_B \longrightarrow T_E$ donnée par $\hat{} : \ \theta \longmapsto \hat{\theta}$ est alors un homomorphisme.

Soit maintenant S un demi-groupe inverse dont le demi-treillis des idempotents est E et considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} S \arrow[dr, "\mu"'] & T_B \arrow[d, "\hat{}"] \\ & T_E \end{tikzcd}$$

dans lequel l'application $\mu : \ S \longrightarrow T_E$, décrite par $\mu : \ a \longrightarrow \mu_a$, est l'homomorphisme de Munn, de sorte que $e\mu_a = a^{-1} ea$ quel que soit $e \in \mathcal{D}om \ \mu_a = aa^{-1} E$.

Un homomorphisme $\theta : \ S \longrightarrow T_B$ qui complète ce diagramme d'une manière commutative sera appelé triangulation de l'homomorphisme de Munn.

Le résultat suivant, quoique d'un caractère très technique, est fondamental à la discussion qui suivra.

LEMME 4. - *Soit* S *un demi-groupe inverse dont le demi-treillis des idempotents est* E , *et soit* B *une bande scindée dont* E *est un squelette. Pour chaque* $a \in S$, *soit* a_e E *le domaine de* μ_a (*de sorte que* $e_a = aa^{-1}$), *et soit* f_a E *le codomaine de* μ_a (*de sorte que* $f_a = a^{-1} a$). *Soit* θ *une triangulation de* μ . *Alors, étant donnés* $a , b \in S$ *et* $e , f , u , v \in B$ *tels que* $e \mathcal{L} e_a$, $f \mathcal{R} f_a$, $u \mathcal{L} e_b$, *et* $v \mathcal{R} f_b$, *nous avons*

$$e(fu)\bar{\theta}_{a^{-1}} \mathcal{L} e_{ab} \quad \text{et} \quad (fu)\bar{\theta}_b\, v \mathcal{R} f_{ab} \ .$$

COROLLAIRE. - *Si*

$$W = W(B , S , \theta) = \{(e , a , f) \in B \times S \times B \ ; \ \ e \mathcal{L} e_a , f \mathcal{R} f_a\}$$

alors la formule

$$(e , a , f)(u , b , v) = (e(fu)\bar{\theta}_{a^{-1}} , ab , (fu)\bar{\theta}_b\, v)$$

décrit une loi de composition sur W .

Concernant cette loi de composition sur W , nous avons les résultats suivants dont les démonstrations sony assez difficiles.

THÉORÈME 5. - $W(B , S , \theta)$ *est un demi-groupe orthodoxe dont la bande des idempotents est isomorphe à* B .

THÉORÈME 6. - *Le demi-groupe orthodoxe* $W = W(B , S , \theta)$ *est scindé, et* $W/y \simeq S$.

Le résultat suivant montre que tout demi-groupe orthodoxe scindé s'obtient de la manière précédente. Plus précisément nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 7. - *Soit* T *un demi-groupe orthodoxe scindé dont* B *est la bande des idempotents. Si* T *est scindé par un homomorphisme* $\pi : T/y \longrightarrow T$, *alors l'ensemble* $E = B \cap \operatorname{Im} \pi$ *des idempotents de* $\operatorname{Im} \pi$ *est un squelette de* B , *et* $S_p(E) = \operatorname{Im} \pi$. *D'ailleurs, si l'application* $\theta : \operatorname{Im} \pi \longrightarrow T_B$ *est donnée par* $a\theta = \theta_a$ *où le domaine de* θ_a *est* $aa^{-1} Baa^{-1}$, *le codomaine de* θ_a *est* $a^{-1} aBa^{-1} a$, *et* $b\theta_a = a^{-1}ba$, *alors* θ *est une triangulation de* $\mu : \operatorname{Im} \pi \longrightarrow T_E$ *et*

$$T \simeq W(B , \operatorname{Im} \pi , \theta) \ .$$

Démonstration. - $\operatorname{Im} \pi$ est un sous-demi-groupe inverse de T qui rencontre chaque module y une fois, et une fois seulement. Donc $E = B \cap \operatorname{Im} \pi$ rencontre chaque $\mathcal{D}$-classe de B une fois, et une fois seulement, et est ainsi un squelette de B . Puisque E est le demi-treillis des idempotents de $\operatorname{Im} \pi$ nous avons, d'après un résultat précédent, $\operatorname{Im} \pi = S_p(E)$.

Etant donné $a \in \operatorname{Im} \pi$, soient $e_a = aa^{-1}$, $f_a = a^{-1} a$, et soit

$$\theta : e_a Be_a \longrightarrow f_a Bf_a$$

l'application donnée par $b\theta_a = a^{-1} ba$. Il est facile de démontrer que θ_a est un isomorphisme. L'application $\theta : \operatorname{Im}\pi \longrightarrow T_B$ donnée par $\theta(a) = \theta_a$ est alors un homomorphisme et une triangulation de μ. Nous pourrons alors construire le demi-groupe orthodoxe scindé $W = W(B, \operatorname{Im}\pi, \theta)$.

Considérons maintenant l'application $\psi : W \longrightarrow T$ donnée par $(e, a, f)\psi = eaf$. Etant donnés $(e, a, f), (u, b, v) \in W$ nous avons

$$\begin{aligned}[(e, a, f)(u, b, v)]\psi &= (e(fu)\bar\theta_{a^{-1}}, ab, (fu)\bar\theta_b v)\psi \\ &= e(fu)\bar\theta_{a^{-1}}, ab, (fu)\bar\theta_b v \\ &= e(f_a fuf_a)\theta_{a^{-1}} ab(e_b fue_b)\theta_b v \\ &= eaf_a fuf_a a^{-1} abb^{-1} e_b fue_b bv \\ &= eafua^{-1} abb^{-1} fubv \\ &= eafubb^{-1} a^{-1} afubv \\ &= eafufubv, \text{ puisque } u \mathcal{L} e_b = bb^{-1}, f \mathcal{R} f_a = a^{-1}a \\ &= eafubv, \text{ puisque } fufu = fu \\ &= (e, a, f)\psi(u, b, v)\psi .\end{aligned}$$

Ainsi nous voyons que ψ est un homomorphisme.

Notons maintenant que

$$\begin{aligned} eaf, a, eaf &= eafa^{-1} a, a^{-1}, aa^{-1} eaf \\ &= eaa^{-1} a, a^{-1}, aa^{-1} af, \text{ puisque } f \mathcal{R} f_a = a^{-1} a, e \mathcal{L} e_a = aa^{-1} \\ &= eaf \end{aligned}$$

et d'une façon analogue,

$$a^{-1}, eaf, a^{-1} = a^{-1}, aa^{-1} eafa^{-1} a, a^{-1} = a^{-1} aa^{-1} = a^{-1}$$

Par conséquent, la classe de x modulo y étant notée y_x, nous avons $y_{eaf}\,\pi = a$.

Supposons alors que $(e, a, f)\psi = (u, b, v)\psi$. Nous avons $eaf = ubv$, donc $a = y_{eaf}\,\pi = y_{ubv}\,\pi = b$, d'où

$$f = f_a f = a^{-1} af = a^{-1} aa^{-1} eaf = b^{-1} bb^{-1} ubv = b^{-1} bv = v$$

et, d'une façon analogue, $e = u$. Ainsi l'application ψ est injective.

Pour chaque $x \in T$, soit maintenant $\tilde{x} = y_x\,\pi$. Il est facile de voir que $\tilde{x}^{-1}$ est un inverse de x dans T. Par conséquent, $x\tilde{x}^{-1}\,\tilde{x}\tilde{\tilde{x}}^{-1} = x\tilde{x}^{-1}$ et $\tilde{x}\tilde{\tilde{x}}^{-1}\,x\tilde{x}^{-1} = \tilde{x}\tilde{\tilde{x}}^{-1}$, d'où $x\tilde{x}^{-1} \mathcal{L} e_{\tilde{x}} = \tilde{x}\tilde{\tilde{x}}^{-1}$ et, d'une façon analogue, $\tilde{x}^{-1} x \mathcal{R} f_{\tilde{x}} = \tilde{x}^{-1}\tilde{x}$.
Alors puisque $x = x\tilde{x}^{-1} x = x\tilde{x}^{-1}\,\tilde{x}\tilde{\tilde{x}}^{-1} x$ il s'ensuit que $(x\tilde{x}^{-1}, \tilde{x}, \tilde{x}^{-1} x) \in N$ avec $(x\tilde{x}^{-1}, \tilde{x}, \tilde{x}^{-1} x)\psi = x$, d'où l'application ψ est aussi surjective.

Les résultats précédents ont des analogues pour les demi-groupes orthodoxes ordonnés. Un tel demi-groupe est appelé scindé si

1° T/y peut être ordonné tel que $\natural : T \longrightarrow T/y$ soit isotone,

2° il y a un homomorphisme isotone $\pi : T/y \longrightarrow T$ tel que $\pi \natural = di_{T/y}$.
Bien entendu, il y a dans ce cas le problème de déterminer les conditions sous lesquelles le demi-groupe $W(B , S , \theta)$ est un demi-groupe ordonné (par rapport à l'ordre cartésien). On est, en effet, amené à considérer les demi-groupes orthodoxes ordonnés T dans lesquels l'ordre est maniable (en anglais "amenable"), c'est-à-dire

$$x \leqslant y \Longrightarrow (\exists\, x' , x'' \in V(x))\ (\exists\, y' , y'' \in V(y))\quad xx' \leqslant yy' ,\ x''x \leqslant y''y .$$

Cette condition assure que l'isomorphisme du théorème précédent soit un isomorphisme de demi-groupes ordonnés. Nous ne préciserons pas ici les détails.

Signalons cependant un cas particulièrement intéressant, à savoir un demi-groupe orthodoxe ordonné ayant un plus grand idempotent. Si nous considérons d'abord le cas d'une bande nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME 8. - <u>Soit</u> B <u>une bande ordonnée ayant un plus grand élément</u> ξ . <u>Alors</u> $\xi B \xi$ <u>est un demi-treillis. D'ailleurs, si</u> $B/\mathcal{D}$ <u>est muni de l'ordre naturel, les conditions suivantes sont équivalentes</u>

1° B <u>est scindé</u>,
2° $\natural : B \longrightarrow B/\mathcal{D}$ <u>est isotone</u>,
3° $(\forall\, x \in B)\quad x = x\xi x$;
4° $(\forall\, x , y \in B)\quad xy = x\xi y$,
5° $\xi B \xi$ <u>est un squelette de</u> B ,
6° $\mathcal{D}$ <u>est une équivalence de fermeture dont l'ensemble des fermés est</u> $\xi B \xi$,
7° $\natural : B \longrightarrow B/\mathcal{D}$ <u>est résidué</u>.

<u>Enfin, lorsque ces conditions sont satisfaites,</u> B <u>est normale</u>.

Vu ce résultat, il est naturel de considérer le cas où y est une équivalence de fermeture.

THÉORÈME 9. - <u>Si</u> S <u>est un demi-groupe orthodoxe ordonné, alors les conditions suivantes sont équivalentes</u>

1° y <u>est une équivalence de fermeture</u>,
2° S/y <u>peut être ordonné tel que</u> $\natural : S \longrightarrow S/y$ <u>soit résidué</u>.

<u>D'ailleurs, si</u> y <u>est une fermeture multiplicative, alors</u> S <u>est scindé, et chaque élément de</u> S <u>admet un plus grand inverse</u>.

THÉORÈME 10. - <u>Soit</u> S <u>un demi-groupe orthodoxe ordonné ayant un plus grand idempotent</u> ξ . <u>Alors</u> $\xi S \xi$ <u>est un sous-demi-groupe inverse ordonné dont l'élément neutre</u> ξ <u>est le plus grand idempotent. D'ailleurs les conditions suivantes sont équivalentes</u>

1° y_ξ <u>est l'élément neutre de</u> S/y ,
2° $(\forall\, x = x^2 \in S)\quad x = x\xi x$,
3° $e^2 = e \leqslant f = f^2 \Longleftrightarrow e = efe$,
4° $(\forall\, x , y \in S)\quad xy = x\xi y$,
5° $(\forall\, x \in S)\quad x^2 = x\xi x$,

6° $\xi S \xi$ rencontre chaque $\mathcal{Y}$-classe une fois et une fois seulement,

7° $\mathcal{Y}$ est une fermeture multiplicative dont l'ensemble des fermés est $\xi S \xi$.

Enfin, lorsque ces conditions sont satisfaites, S est scindé, chaque élément de S admet un plus grand inverse, et la bande des idempotents est normale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] McALISTER (D. B.) and BLYTH (T. S.). - Split orthodox semi-groups (à paraître)

Thomas S. BLYTH
Matematical Institute
University of St-Andrews
St-ANDREWS, Scotland
(Grande-Bretagne).