

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JACQUES CHAZARAIN

## **Paramétrie du problème mixte pour l'équation des ondes à l'intérieur d'un domaine convexe pour les bicaractéristiques**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1975), p. 165-181

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1975\\_\\_165\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975__165_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PARAMÉTRIX DU PROBLÈME MIXTE POUR L'ÉQUATION  
 DES ONDES A L'INTÉRIEUR D'UN DOMAINE CONVEXE  
 POUR LES BICARACTÉRISTIQUES

par

J. CHAZARAIN

--:--:-

0. INTRODUCTION.

Soit  $P(\partial/\partial t, x, \partial/\partial x)$  un opérateur du type des ondes dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , et soit  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  à bord régulier  $\partial X$ . Le problème mixte hyperbolique, avec données initiales  $g_0(x)$ ,  $g_1(x)$  et condition au bord de Dirichlet, consiste à trouver une distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times X)$  solution de

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (Pu)(t,x) = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times X \\ u(0,x) = g_0(x) & \text{dans } X \\ \frac{\partial}{\partial t} u(0,x) = g_1(x) & \text{dans } X \\ u(t,x)|_{\mathbb{R} \times \partial X} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \partial X \end{array} \right.$$

Ceci est formel car, en général, les traces sur le bord latéral  $\mathbb{R} \times \partial X$  n'ont pas de sens pour une distribution  $u$ . On précise alors ce problème en introduisant une classe de distributions dites admissibles.

Le problème que nous étudions ici est de décrire une paramétrix ; c'est-à-dire un opérateur qui aux données initiales  $(g_0, g_1)$  fait correspondre une solution approchée de  $(*)$ , en ce sens qu'elle peut différer de la solution exacte par une fonction  $C^\infty$  jusqu'au bord. Sans hypothèse supplémentaire la structure de cette paramétrix est

une question encore ouverte. Dans ce travail, on se place dans le cas particulier où les données initiales sont des distributions à support compact dans l'ouvert  $X$  et de plus on suppose (de manière à exclure le phénomène de la diffraction) que cet ouvert  $X$  est en un sens convexe pour les bicaractéristiques de  $P$ .

Avec ces hypothèses, le résultat essentiel (théorème 3.1) est que l'on peut construire une paramétrix qui soit un opérateur intégral de Fourier dont la relation canonique traduit le phénomène physique des réflexions successives d'un rayon lumineux sur la surface  $\partial X$  du miroir. Nous avons obtenu ce résultat il y a quelques années (Chazarain [1]); mais nous espérons en donner la démonstration détaillée sans hypothèse sur le support des données, ce que nous ne sommes pas encore parvenus à faire.

Du théorème 3.1, il découle immédiatement que les singularités des solutions se propagent et se réfléchissent selon les lois de l'optique géométrique. Ce dernier résultat avait été obtenu vers 1960 par Povzner et Suhaveveskii [12] dans le cas particulier où  $P$  est à coefficients constants et où  $X$  est un ouvert strictement convexe de  $\mathbb{R}^2$ . Plus récemment, Lax et Nirenberg [11] ont précisé comment se réfléchit le spectre singulier des solutions d'une équation de type principal réel, puis Majda et Osher [9] et Taylor [13] ont étendu ces résultats à des situations un peu plus générales.

Après ce colloque, j'ai reçu des préprints de Friedlander [5], Melrose [10], Taylor [14] où ces auteurs étudient la propagation des singularités dans le cas de diffraction ; ce qui constitue un progrès important dans l'étude de la paramétrix de (\*) quand  $X$  n'est pas convexe.

## I. - NOTATIONS ET DÉFINITIONS.

On note  $(t, x)$  le point courant de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $(\tau, \xi)$  les variables duales. On utilise les notations standards de Hörmander [6] pour les distributions et opérateurs intégraux de Fourier. Le spectre singulier (wave front set dans [6]) est noté  $wF$ . Soit  $Z$  une variété, on note  $\overset{\circ}{T}^*$  l'espace cotangent à  $Z$  privé de la section nulle, si  $Y$  est une sous-variété de  $Z$ , on désigne par  $N_Y X$  son fibré conormal dans  $Z$ .

On se donne dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  un opérateur strictement hyperbolique du type des ondes.

$$(1.1) \quad P = \partial^2 / \partial t^2 - Q(x, \partial / \partial x)$$

où  $Q$  est un opérateur à coefficients  $C^\infty$  indépendant du temps  $t$ .

La partie principale de  $Q$  s'écrit

$$(1.2) \quad q(x, \xi) = \sum_{1, j=1} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$$

et on suppose qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$(1.3) \quad q(x, \xi) \geq C \text{ pour tout } (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \text{ et } |\xi| = 1.$$

Soit  $X$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , on suppose que son bord  $\partial X$  est une sous-variété  $C^\infty$ . Pour définir les traces sur  $\partial X$  de certaines distributions dans  $X$ , on introduit les sous-espaces suivants de distributions que l'on dira admissibles :

$$\mathcal{D}'_a(X) = \left\{ g \left| \begin{array}{l} g \in \mathcal{D}'(X) \text{ et il existe un prolongement} \\ \tilde{g} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } \text{WF}(\tilde{g}) \cap N_{\partial X} \mathbb{R}^n = \emptyset, \end{array} \right. \right\}$$

de façon analogue

$$\mathcal{D}'_a(\mathbb{R} \times X) = \left\{ u \left| \begin{array}{l} u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times X) \text{ et il existe un prolongement } \tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}) \\ \text{tel que } \text{WF}(\tilde{u}) \cap \left[ N_{\mathbb{R} \times \partial X} \mathbb{R}^{n+1} \cup N_{\{0\} \times X} \mathbb{R}^{n+1} \right] = \emptyset \end{array} \right. \right\}$$

Les hypothèses faites sur le spectre singulier de ces distributions admissibles impliquent la régularité  $C^\infty$  en des variables normales au bord ; par conséquent, la trace des prolongements ne dépend que de la distribution prolongée. On définit ainsi les traces

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{D}'_a(\mathbb{R} \times X) &\longrightarrow \gamma_k u = \left. \frac{\partial^k}{\partial t^k} u \right|_{t=0} \in \mathcal{D}'_a(\mathbb{R} \times X) \quad k \in \mathbb{N} \\ &\longrightarrow Bu = \left. u \right|_{\mathbb{R} \times \partial X} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \partial X). \end{aligned}$$

Maintenant on est en mesure de donner un sens précis à la notion de solution des problèmes mixtes (\*) et en particulier à la notion de paramétrix. Pour simplifier, on se place dorénavant dans le cas où  $g_0 = 0$  et on note  $g_1 = g$ , le cas où  $g_0 \neq 0$  et  $g_1 = 0$  se traite de la même façon.

Posons-la

DÉFINITION 1.1. - On appelle paramétrix du problème mixte (\*) un opérateur

$$E : \mathcal{D}'_a(X) \longrightarrow \mathcal{D}'_a(\mathbb{R} \times X) \text{ tel que si } v = Eg \text{ on ait}$$

$$(1.4) \quad Pv = F_0, \quad \gamma_0 v = f_0, \quad \gamma_1 v = g + f_1, \quad Bv = h_0$$

où  $F_0, f_0, f_1, h_0$  sont  $C^\infty$  jusqu'au bord et de plus  $C^\infty$  compatibles sur l'arête  $\{0\} \times \partial X$ .

Cette définition nécessite quelques remarques.

Remarque 1.1. - Il est inutile d'expliciter les conditions de compatibilités  $C^\infty$  ; il suffit de savoir qu'elles équivalent à l'existence d'une fonction

$$v_0 \in C^\infty(\mathbb{R} \times \bar{X}) \text{ telle que } PV_0 = F_0, \gamma_j V_0 = f_j, BV_0 = h_0 \text{ (cf. Kato [7]).}$$

En particulier les conditions de compatibilités sont satisfaites lorsque les fonctions  $F_0, f_0, f_1, h_0$  ont toutes leurs dérivées nulles sur  $\{0\} \times \partial X$ .

Remarque 1.2. - La solution du problème mixte (\*) est évidemment indépendante de la façon dont on a prolongé les coefficients de l'opérateur  $P$  à l'extérieur de  $\bar{X}$ . Aussi pour des raisons techniques on choisit de prolonger  $P$  en un opérateur à coefficients constants en dehors d'un certain voisinage compact de  $\bar{X}$ .

Remarque 1.3. - Enfin, la définition précise de la notion de solution du problème (\*) et en particulier le choix d'une classe de distributions admissibles reste arbitraire tant que l'on n'a pas résolu le problème mixte dans le cas général.

## II. - RELATIONS CANONIQUES ET OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE.

Introduisons des notations pour désigner les bicaractéristiques de  $P$ . Tout d'abord, si  $f$  désigne une fonction  $C^\infty$  à valeurs réelles définie sur un espace cotangent  $\overset{\circ}{T^*}Y$ , on note par

$$H_f = (f'_\xi, -f'_X)$$

le champ hamiltonien correspondant sur  $T(T^*Y)$ . Ainsi, au symbole  $\sqrt{q}$  sur  $\overset{\circ}{T^*}X$ , on associe le flot  $\phi^t$  du champ  $H_{\sqrt{q}}$ .

Ce flot est défini pour tout  $t$  puisque  $q$  est constant en dehors d'un compact ; il est homogène de degré 1 comme  $\sqrt{q}$  et ne diffère du flot engendré par  $H_q$  que par un changement de paramétrage.

On désigne par  $D_+^0(y, \eta)$  et  $D_-^0(y, \eta)$  les deux bicaractéristiques de  $P$  qui se relèvent du point  $(y, \eta) \in \overset{\circ}{T^*}X$  :

$$(2.1) \quad D_\pm^0(y, \eta) = \{t, \tau ; \phi^t(y, \eta) \mid t \in \mathbb{R}, \tau = \pm \sqrt{q(y, \eta)}\}.$$

Afin de définir la bicaractéristique obtenue après une première réflexion sur le bord, on introduit l'instant  $t_+^1(y, \eta) > 0$  (resp.  $t_-^1(y, \eta) < 0$ ) auquel la demi-bicaractéristique portée par  $D_+^0$  (resp.  $D_-^0$ ) coupe le bord  $R \times \partial X$ . Cet instant est bien défini grâce à l'hypothèse suivante dite de "convexité pour les bicaractéristiques".

(H<sub>1</sub>) Toute demi-courbe intégrale du flot  $\phi^t$  issue d'un point  $(y, \eta) \in \overset{\circ}{T}^*X$  coupe le bord  $\partial X$  en un point unique et transversalement. De plus, on suppose qu'aucune courbe intégrale reste au-dessus d'un compact de  $\mathbb{R}^n$ .

Cette hypothèse de transversalité permet d'appliquer le théorème des fonctions implicites pour montrer que les applications

$$(y, \eta) \in \overset{\circ}{T}^*X \longrightarrow t_{\pm}^1(y, \eta) \in \mathbb{R}$$

sont  $C^\infty$ .

Notons au passage que  $t_-^1(y, \eta) = -t_+^1(y, -\eta)$ .

On désigne par

$$(2.2) \quad \lambda_{\pm}^1(y, \eta) = \phi_{\pm}^{t_{\pm}^1(y, \eta)}(y, \eta)$$

les points de rencontre correspondant avec  $\overset{\circ}{T}^*\mathbb{R}^n|_{\partial X}$ .

On définit maintenant une involution sur  $\overset{\circ}{T}^*\mathbb{R}^n|_{\partial X}$  qui traduit l'idée physique de réflexion. C'est l'application

$$(x, \xi) \in \overset{\circ}{T}^*\mathbb{R}^n|_{\partial X} \longrightarrow (\widehat{x}, \widehat{\xi}) \in \overset{\circ}{T}^*\mathbb{R}^n|_{\partial X}$$

où  $\widehat{x} = x$  et  $\widehat{\xi}(x, \xi)$  est caractérisé par les conditions

$$(2.3) \quad q(x, \xi) - q(x, \widehat{\xi}) = 0,$$

$$(2.4) \quad \xi - \widehat{\xi} \text{ est une forme linéaire nulle sur } T_x \partial X,$$

$$(2.5) \quad \widehat{\xi} \neq \xi \text{ quand } \xi \text{ n'est pas l'unique solution de (2.3) et (2.4).}$$

Cette involution revient à permuter les deux racines d'une équation algébrique du deuxième degré. En effet, soit  $\rho(x) = 0$  une équation du bord  $\partial X$ , l'équation du 2ème degré en  $s$

$$q(x, \xi + s d\rho(x)) - q(x, \xi) = 0$$

admet la solution  $s = 0$ , on note  $s_1$  l'autre racine, alors

$$\widehat{\xi} = \xi + s_1 d\rho(x).$$

Ce qui prouve, en particulier, que cette involution est  $C^\infty$  car  $s_1$  est aussi égale à la somme des racines de ce trinôme.

On définit les bicaractéristiques  $D_{\pm}^1$  obtenues après réflexion de  $D_{\pm}^0$  en posant

$$(2.6) \quad D_{\pm}^1(y, \eta) = \{(t, \tau; \phi^t \cdot \widehat{\lambda}_{\pm}^1(y, \eta) \mid t \in \mathbb{R}, \tau = \pm \sqrt{q(y, \eta)}\}$$

On définit ensuite l'instant  $t_{\pm}^2(y,n)$  où  $D_{\pm}^1(y,n)$  recoupe le bord et on note le point de rencontre par

$$\lambda_{\pm}^2(y,n) = \phi^{t_{\pm}^2(y,n)}(\widehat{\lambda_{\pm}^1(y,n)}),$$

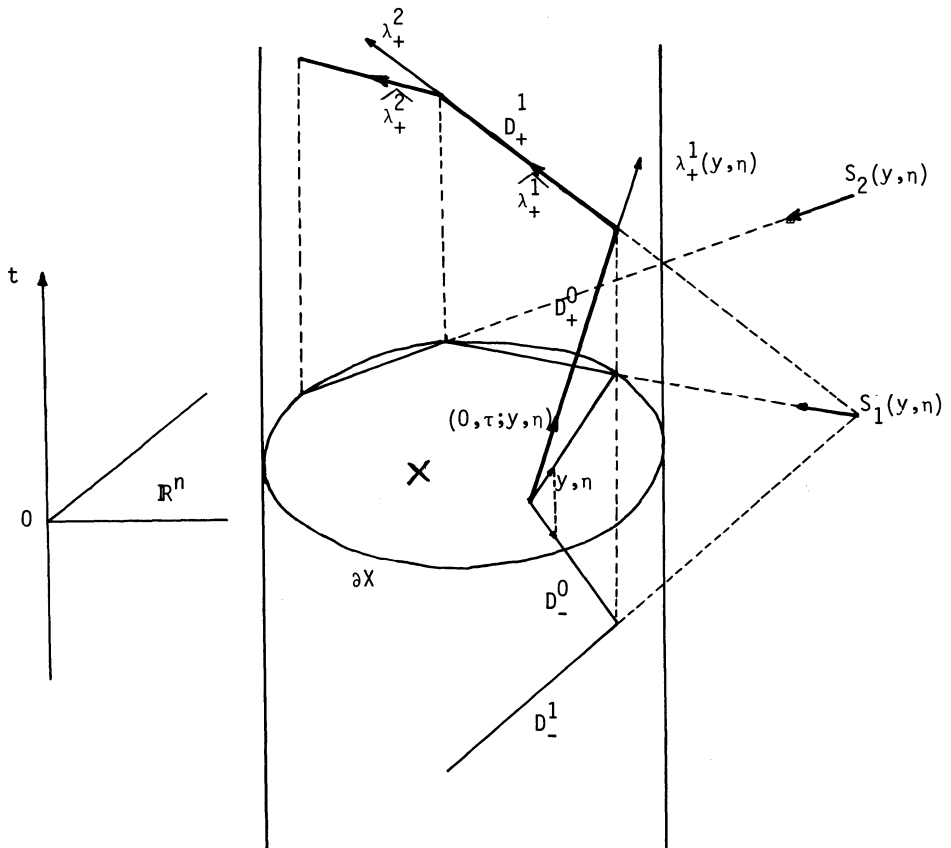
ce qui permet de définir les bicaractéristiques après deux réflexions

$$D_{\pm}^2(y,n) = \{(t,\tau; \phi^t \cdot \widehat{\lambda_{\pm}^2(y,n)}) \mid t \in \mathbb{R}, \tau = \pm \sqrt{q(y,n)}\}.$$

Et ainsi de suite on obtient

$$\lambda_{\pm}^j(y,n), D_{\pm}^j(y,n) \quad j \in \mathbb{N}.$$

Illustrons ceci par un schéma :



Avec ces notations, il est facile de définir la suite  $C^j$  des relations qui traduisent l'idée que l'on peut passer d'un point à un autre après  $j$  réflexions :

$$(2.7) \quad C_{\pm}^j = \{(t, \tau; x, \xi; y, \eta) \mid (t, \tau; x, \xi) \in D_{\pm}^j(y, \eta) \cup D_{\pm}^j(y, -\eta), (y, \eta) \in \overset{\circ}{T}^*X\}$$

et

$$C^j = C_+^j \cup C_-^j \subset \overset{\circ}{T}^*\mathbb{R}^{n+1} \times \overset{\circ}{T}^*X.$$

Pour démontrer que ce sont des relations canoniques, il est utile d'avoir une construction de ces relations où l'on fait intervenir les images virtuelles successives du point  $(y, \eta)$  dans le "miroir"  $\partial X$ .

L'application première image de  $S_1$  est définie par

$$(y, \eta) \in \overset{\circ}{T}^*X \longrightarrow S_1(y, \eta) = \phi^{-t_+^1}(y, \eta) \widehat{(\lambda_+^1(y, \eta))} \in \overset{\circ}{T}^*\mathbb{R}^n.$$

Remarque physique. - La propriété d'astigmatisme pour le miroir  $\partial X$  signifie précisément que dans la transformation  $S_1$ , la position  $x$  du point image  $(x, \xi)$  est indépendante de la direction du covecteur  $\eta$ .

Plus généralement la  $j$ ème image est définie par

$$(2.8) \quad S_j(y, \eta) = \phi^{-(t_+^1 + \dots + t_+^j)}(y, \eta) \cdot \widehat{\lambda_+^j}(y, \eta).$$

Avec ces notations, il est clair que la relation  $C_+^j$  peut encore s'écrire comme réunion de deux composantes connexes

$$(2.9) \quad C_+^j = \{(t, \tau; \phi^t \cdot S_j(y, \eta) ; y, \eta) \mid \tau = +\sqrt{q(y, \eta)}\} \\ \cup \{(t, \tau; \phi^t \cdot S_j(y, \eta) ; y, -\eta) \mid \tau = +\sqrt{q(y, \eta)}\}$$

Il est important de faire la

Remarque 2.2. - L'hypothèse de convexité ( $H_1$ ) implique que les images successives  $S_j(y, \eta)$  sont situées à l'extérieur de  $X$ .

Pour ces relations  $C^1$ , on a bien sûr la

PROPOSITION 2.1. - La relation  $C^j$  est une sous-variété lagrangienne fermée conique de  $\overset{\circ}{T}^*\mathbb{R}^{n+1} \times \overset{\circ}{T}^*X$  relativement à la 2ème forme canonique  $\sigma_{\mathbb{R}^{n+1}} - \sigma_X$  sur cet espace produit.

DÉMONSTRATION. - Il suffit de le montrer pour chacune des 4 composantes connexes de  $C^j$ . L'expression (2.9) montre que les deux composantes connexes de  $C_+^j$  sont des graphes de fonctions de  $(t, y, \eta) \in \mathbb{R} \times \overset{\circ}{T}^*X$ , homogènes de degré 1 en  $\eta$  et sont donc



des sous-variétés fermées coniques de dimension moitié de celle de l'espace total. Pour démontrer le caractère lagrangien, on l'établit successivement pour  $C^0, C^1, \dots$ . Le cas de  $C^0$  est classique (cf. Duistermaat [4]) ; néanmoins on va en rappeler la démonstration car c'est la même qui servira pour les suivantes.

Pour cela, on donne une nouvelle description de ces relations. Ainsi pour  $C_{\pm}^0$  on définit les sous-variétés isotropes de  $\overset{\circ}{T}^*\mathbb{R}^{n+1} \times \overset{\circ}{T}^*X$

$$(2.10) \quad A_{\pm}^0 = \{(0, \tau ; y, \eta ; y, \eta) \mid (y, \eta) \in \overset{\circ}{T}^*X, \tau = \pm \sqrt{q(y, \eta)}\}$$

et les fonctions

$$b_{\pm} : (t, \tau ; x, \xi ; y, \eta) \longrightarrow \tau \mp \sqrt{q(x, \xi)} \in \mathbb{R},$$

et on désigne par  $\psi_{\pm}^t$  les flots engendrés par les champs  $H_{b_{\pm}}$ . Par définition des bicaractéristiques,  $C_{\pm}^0$  est la variété obtenue en transportant la variété  $A_{\pm}^0$  par le flot  $\psi_{\pm}^t$  :

$$(2.11) \quad C_{\pm}^0 = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \psi_{\pm}^t A_{\pm}^0$$

Il est évident que le champ  $H_{b_{\pm}}$  n'appartient pas à l'espace tangent à  $A_{\pm}^0$ , de plus  $H_{b_{\pm}}$  est symplectiquement orthogonal à cet espace puisque  $b_{\pm}$  s'annule sur  $A_{\pm}^0$ . Par conséquent,  $C_{\pm}^0$  est lagrangienne aux points de  $A_{\pm}^0$  et finalement partout car le flot hamiltonien  $\psi_{\pm}^t$  conserve la 2-forme canonique. Pour  $C_{\pm}^1$  on commence par définir  $A_{\pm}^1$  comme la partie de  $C_{\pm}^0$  qui est au-dessus de  $\mathbb{R} \times \partial X \times X$ , de sorte que

$$(2.12) \quad C_{\pm}^1 = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \psi_{\pm}^t \cdot \overset{\wedge}{A}_{\pm}^1$$

On en déduit de même que  $C_{\pm}^1$  est lagrangienne. On définit ensuite  $A_{\pm}^2$  comme les parties de  $C_{\pm}^1$  qui est au-dessus de  $\mathbb{R} \times \partial X \times X$  et qui est disjointe de  $\overset{\wedge}{A}_{\pm}^1$  et on a

$$C_{\pm}^2 = \bigcup_t \psi_{\pm}^t A_{\pm}^2,$$

et ainsi de suite pour définir  $A_{\pm}^j$  et montrer que  $C_{\pm}^j$  est lagrangienne.

On introduit maintenant la relation globale  $C$  par

$$(2.13) \quad C_{\pm} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_{\pm}^j, \quad C = C_+ \cup C_-.$$

Pour démontrer que  $C$  est fermée, on introduit une nouvelle hypothèse sur le flot  $\phi^t$ .

$$(H_2) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Pour tout } (y, \eta) \in \overset{\circ}{T}^*X, \text{ la suite des instants} \\ t_+^j(y, \eta) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} +\infty \end{array} \right.$$

ce qui signifie qu'il n'y a pas de rayon qui vienne s'accumuler en un point du bord ("trapped ray" en anglais). On a la :

PROPOSITION 2.2. - Sous les hypothèses (H<sub>1</sub>) et (H<sub>2</sub>), la relation C est une sous-variété lagrangienne fermée canonique de

$$T^*\mathbb{R}^{n+1} \times T^*X.$$

DÉMONSTRATION. - Tout d'abord, notons que les variétés  $C_{\pm}^j$  sont disjointes car les  $A_{\pm}^j$  le sont par construction. Ainsi C est une réunion de sous-variétés lagrangiennes disjointes, il suffit donc de s'assurer que les  $C_{\pm}^j$  forment une famille localement finie, ce qui découle précisément de l'hypothèse (H<sub>2</sub>).

### III. - CONSTRUCTION DE LA PARAMÉTRIX E.

Si on se restreint à des données initiales à support compact, on peut construire une paramétrix globale à l'aide des opérateurs intégraux de Fourier, c'est le résultat essentiel de ce travail :

THÉORÈME 3.1. - On fait les hypothèses (H<sub>1</sub>) et (H<sub>2</sub>) sur le flot  $\phi^t$ . Soit K un compact de X, alors il existe un opérateur intégral de Fourier  $E \in I^{-1-1/4}(\mathbb{R}^{n+1}, X ; C)$  associé à la relation canonique C tel que l'application

$$g \in \mathcal{C}'(K) \longrightarrow \text{Eg} \Big|_{\mathbb{R} \times X} \in \mathcal{D}'_a(\mathbb{R} \times X)$$

soit une paramétrix du problème mixte (\*).

DÉMONSTRATION. - Elle se fait en deux temps ; dans une première étape, on construit un opérateur intégral de Fourier F qui est une paramétrix à ceci près que les erreurs  $F_0, f_0, f_1, h_0$  ne sont pas nécessairement compatibles. La deuxième étape consiste simplement à tronquer F au voisinage de  $\{0\} \times \partial X$  pour obtenir une vraie paramétrix E.

1ère étape. On construit F sous la forme d'un développement asymptotique

$$F \sim \sum_{k \geq 0} F^{(k)}$$

d'opérateurs intégraux de Fourier,  $F^{(k)}$  qui vérifient

$$(a_k) \quad F^{(k)} \in I^{-1-\frac{1}{4}-k}(\mathbb{R}^{n+1}, X ; C)$$

$$(b_k) \quad P(F^{(0)} + \dots + F^{(k)}) \in I^{-1-\frac{1}{4}-k}(\mathbb{R}^{n+1}, X; C)$$

$$(c_k) \quad \gamma_0(F^{(0)} + \dots + F^{(k)})|_X \in I^{-1-k}(X, X; \Gamma_X \circ C)$$

$$(d_k) \quad \gamma_1(F^{(0)} + \dots + F^{(k)})|_X - \text{Id}_X \in I^{-1-k}(X, X; \Gamma_X \circ C)$$

$$(e_k) \quad B(F^{(0)} + \dots + F^{(k)}) \in I^{-2-k}(\mathbb{R} \times \partial X, X; \mathfrak{B} \circ C)$$

où  $\Gamma_X$  et  $\mathfrak{B}$  désignent respectivement les relations canoniques de restriction aux sous-variétés  $\{0\} \times \partial X$  et  $\mathbb{R} \times \partial X$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  (cf. Duistermaat [4]).

Pour la restriction à  $t = 0$ , au-dessus de  $X$ , on a

$$\Gamma_X \circ C = \Gamma_X \circ C_0$$

en vertu de la remarque 2.2 ; et on sait que  $\Gamma_X$  et  $C_0$  se composent transversalement et proprement pour donner la relation identité  $I_X$  (cf. Duistermaat [4]). Pour étudier la composition des relations  $\mathfrak{B}$  et  $C$ , il suffit, d'après la démonstration de la proposition 2.2, de considérer seulement la composition d'une  $C^j$  avec  $\mathfrak{B}$ . C'est le

LEMME 3.1. - Les relations canoniques  $C^j$  et  $\mathfrak{B}$  se composent transversalement et proprement.

DÉMONSTRATION. - Vérifions que  $\mathfrak{B} \times C^j$  coupe transversalement la diagonale  $\Delta$  de

$$\overset{\circ}{T}^*(\mathbb{R} \times X) \times \overset{\circ}{T}^*\mathbb{R}^{n+1} \times \overset{\circ}{T}^*X.$$

Soit  $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in (\mathfrak{B} \times C^j) \cap \Delta$  et soit une carte locale de  $\partial X$  dans laquelle le bord est donné par  $x_n = 0$  ; alors les espaces tangents s'écrivent avec des notations évidentes

$$T_{\mu_1} \mathfrak{B} = \{(\delta t, \delta \tau ; \delta x', \delta \xi' ; \delta t, \delta \tau ; \delta x', \delta \xi) \mid \text{où } \delta \xi = (\delta \xi', \delta \xi_n)\}$$

$$T_{\mu_2} C^j = \{(\delta t, \delta \tau ; \delta(\Phi^t \cdot \lambda_+^j(y, \eta)) ; \delta y, \delta \eta) \mid \text{où } \delta \tau = \delta(\sqrt{q(y, \eta)})\}$$

Démontrer que  $(T_{\mu_1} \mathfrak{B} \times T_{\mu_2} C^j) + T_{\mu} \Delta$

engendre tout l'espace, équivaut à démontrer qu'en prenant l'orthogonal symplectique  $\perp$ , on a

$$(T_{\mu_1} \mathfrak{B} \times T_{\mu_2} C^j) \cap (T_{\mu} \Delta)^\perp = \{0\} ;$$

or ceci est immédiat d'après (2.9) où  $C^j$  apparaît comme graphe d'une fonction de  $(t, y, \eta)$ . Cette même propriété de graphe implique que la projection  $(\mathcal{B} \times C^j) \cap \Delta \longrightarrow \mathcal{B} \circ C^j$  est propre.

Revenons à la construction de l'opérateur  $F$ . On commence par construire  $F^{(0)}$ . On désigne par  $e^{(0)}$  le symbole principal de  $F^{(0)}$  et on pose  $e_+^{(0)} = e^{(0)}|_{C_+}$ , on note  $\gamma$  le symbole principal de l'opérateur de restriction sur  $t = 0$  et  $\beta$  celui de la restriction sur  $\mathbb{R} \times \partial X$ . La composition des symboles principaux est notée par le signe  $\times$ . Pour écrire les équations de transport, on introduit la fonction  $\tilde{p}$  sur  $\overset{\circ}{T}^* \mathbb{R}^{n+1} \times \overset{\circ}{T}^* X$  image réciproque de  $p$  par la projection sur le premier facteur, on note  $C_p$  le symbole sous-principal de  $P$ . Alors, les théorèmes sur les opérateurs intégraux de Fourier (Hörmander [6], Duistermaat et Hörmander [3]) permettent de remplacer les conditions  $(b_0)$ ,  $(c_0)$ ,  $(d_0)$  par les conditions équivalentes suivantes :

$$(b'_0) \quad \left(\frac{1}{T} \mathcal{L}_{H_p} + C_p\right) \cdot e_+ = 0$$

$$(c'_0) \quad \gamma \times e_+(0, \tau ; y, \eta ; y, \eta) + \gamma \times e_-(0, -\tau ; y, \eta ; y, \eta) = 0$$

$$(d'_0) \quad \tau[\gamma \times e_+(0, \tau ; y, \eta ; y, \eta) - \gamma \times e_-(0, -\tau ; y, \eta ; y, \eta)] = 1 \text{ et } \tau = \sqrt{q(y, \eta)}$$

De  $(c'_0)$  et  $(d'_0)$  on tire l'expression de

$$(\gamma \times e_{\pm})(y, \eta) = \pm \frac{1}{2} (q(y, \eta))^{-1/2} \text{ sur } \overset{\circ}{T}^* X,$$

d'où la valeur de  $e_{\pm}$  sur  $\overset{\circ}{A}_{\pm}$  et compte tenu de  $(b'_0)$  celle de  $e$  sur  $C^0 = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \psi^t A^0$ .

La condition  $(e_0)$  implique que sur  $A_+^1$  on a

$$(e'_0) \quad \beta \times e_{\pm}(t_{\pm}^1, \pm \tau ; \lambda_{\pm}^1(y, \eta) ; y, \eta) + \beta \times e_{\pm}(t_{\pm}^1, \pm \tau ; \widehat{\lambda}_{\pm}^1(y, \eta) ; y, \eta) = 0$$

le premier terme est déjà connu, on en déduit donc la valeur de  $e$  au-dessus de  $\widehat{A}_{\pm}^1$  et par suite, en utilisant de nouveau  $(a'_0)$ , sur tout  $C_{\pm}^1$ . De proche en proche  $e^{(0)}$  est déterminé sur  $C$  de manière à ce que  $(a_0)$ ,  $(b_0)$ ,  $(c_0)$ ,  $(d_0)$ ,  $(e_0)$  soient satisfaits.

La construction des symboles principaux des  $F^{(k)}$  se fait de la même façon, à ce détail près que les équations  $(a'_k)$ ,  $(b'_k)$ ,  $(c'_k)$ ,  $(d'_k)$ ,  $(e'_k)$  ont un deuxième membre. On obtient alors un opérateur

$$(3.1) \quad F \in I^{-1-1/4}(\mathbb{R}^{n+1}, X ; C)$$

tel que pour tout  $g \in \mathcal{C}^1(X)$ , on ait

$$(3.2) \quad P F g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$$

$$(3.3) \quad \gamma_0 F g|_X - g \in C^\infty(X)$$

$$(3.4) \quad \gamma_1 F g|_X - g \in C^\infty(X)$$

$$(3.5) \quad B F g \in C^\infty(\mathbb{R} \times \partial X).$$

Notons que (3.2) implique en particulier que  $Fg|_{\mathbb{R} \times X} \in \mathcal{D}'_a(\mathbb{R} \times X)$ ;

Avant de passer à la deuxième étape, montrons que cette construction de F s'étend au cas où l'on remplace la condition de Dirichlet au bord par une condition différentielle du premier ordre

$$B(D_{\pm, x}, D_x)u = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \partial X.$$

La seule différence apparaît au niveau de l'équation  $(d_0')$  qui devient :

$$(d_0'') \quad b(\pm\tau, \lambda_{\pm}^1(y, n)) \cdot \beta \times e_{\pm}(\dots, \lambda_{\pm}^1, \dots) + b(\pm\tau; \widehat{\lambda}_{\pm}^1(y, n)) \cdot \beta \times e_{\pm}(\dots, \widehat{\lambda}_{\pm}^1, \dots) = 0$$

où  $b(\tau, x, \xi)$  désigne le symbole principal de  $B(D_{\pm, x}, D_x)$ .

On pourra donc déterminer  $e_{\pm}$  sur  $\widehat{A}_{\pm}^1$  à partir de sa valeur sur  $A_{\pm}^1$  si le coefficient  $b(\pm\tau, \widehat{\lambda}_{\pm}^1(y, n))$  ne s'annule pas. Ceci est vérifié pour la condition de Neumann au bord, ou lorsque la condition de Lopatinski uniforme est satisfaite :

$$b(\tau, x, \xi) \neq 0 \text{ pour tout } (\tau, x, \xi) \in p^{-1}(0) \text{ et } |\tau| + |\xi| = 1.$$

Deuxième étape. On commence par montrer que les images successives des points d'un compact de X ne peuvent s'approcher de  $\bar{X}$ , c'est le

LEMME 3.2. - Soit K un compact de X, alors il existe un voisinage ouvert X' de  $\bar{X}$  tel que toutes les images  $S_j(y, n)$  soient en dehors de X' pour tout  $(y, n) \in \overset{\circ}{T^*X}|_K$ .

DÉMONSTRATION. - On appelle  $t_0$  le plus petit temps pour aller de K au bord :

$$t_0 = \inf_{\substack{y \in K \\ |\eta|=1}} t_+^1(y, \eta)$$

ce minimum étant atteint, on a  $t_0 > 0$ . Ensuite on définit une minoration  $d_0$  de la distance entre X et les images des points de K :

$$d_0 = \inf (distance(\bar{X}, \phi^t(y, n))) \\ y \in \partial X, t > t_0$$

$$|\eta| = 1 \text{ et } \langle q'_\eta(y, \eta), d\rho(y) \rangle \geq 0$$

où  $X = \{x \mid \rho(x) < 0\}$ .

L'hypothèse  $(H_1)$  implique que pour tout  $t \geq T$  assez grand,  $\phi^t(y, \eta)$  est dans la région où  $P$  est à coefficients constants, il suffit donc de prendre cet inf pour  $t \in [t_0, T]$  et donc  $d_0 > 0$ .

On définit ensuite un voisinage ouvert  $\tilde{X}$  de  $\bar{X}$  par

$$\tilde{X} = \{x, \text{distance}(x, \bar{X}) < d_0\}.$$

Notons  $\Gamma_{\tilde{X}}^\nu$  la relation canonique de restriction sur  $\{0\} \times \tilde{X} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , par construction de  $\tilde{X}$  on a

$$\Gamma_{\tilde{X}}^\nu \circ C = \Gamma_{\tilde{X}}^\nu \circ C^0 = \text{Graphe de l'injection } \overset{\circ}{T}^* X \hookrightarrow \overset{\circ}{T}^* \tilde{X}.$$

Par conséquent les conditions (3.3) et (3.4) impliquent que pour tout  $g \in \mathcal{C}'(\bar{K})$

$$(3.6) \quad \gamma_0 \text{ Fg} \Big|_{\tilde{X}} \in C^\infty(\tilde{X})$$

$$(3.7) \quad \gamma_1 \text{ Fg} \Big|_{\tilde{X}} - g \in C^\infty(\tilde{X}).$$

Il reste maintenant à multiplier  $F$  par une fonction  $C^\infty$  convenable  $\alpha$  de façon à ce que  $Eg = \alpha \cdot \text{Fg}$  soit nulle dans un voisinage de  $\{0\} \times \partial X$ . Soit  $\omega$  un petit voisinage du bord  $X$  tel que  $\bar{\omega} \subset \tilde{X} \setminus K$ , alors on peut trouver un petit voisinage ouvert  $\Omega$  de  $\{0\} \times \partial X$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  tel que

$$(3.8) \quad \Omega \cap (t=0) = \omega \text{ et } T^*\Omega \cap (C \circ \overset{\circ}{T}^*X \Big|_K) = \emptyset.$$

Pour cela, il suffit de remarquer que  $C$  propage les singularités avec une vitesse finie grâce à (1.3). Soit  $\beta \in C^\infty(\Omega)$  identique à 1 au voisinage de  $\{0\} \times \partial X$ , on pose

$$\alpha = 1 - \beta \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Compte tenu de (3.8), ce choix de  $\alpha$  montre que les opérateurs  $F$  et  $E = \alpha \cdot F$  ne diffèrent que par un régularisant en ce sens que :

$$(3.9) \quad (E - F)g \in C^\infty(\mathbb{R} \times \tilde{X}) \text{ pour tout } g \in \mathcal{C}'(K).$$

De plus, les fonctions

$$(3.10) \quad F_0 = \text{PEg} \Big|_{\mathbb{R} \times \tilde{X}}, \quad f_0 = \gamma_0 \text{Eg} \Big|_{\tilde{X}}, \quad f_1 = \gamma_1 \text{Eg} \Big|_{\tilde{X}} - g, \quad h_0 = \text{BEg}$$

sont  $C^\infty$  et identiquement nulles au voisinage de  $\{0\} \times \partial X$  et donc  $C^\infty$  compatibles.

Ce qui montre que E est une paramétrix sur  $\mathcal{U}(K)$ .

#### IV. - APPLICATIONS

Tout d'abord, on obtient un théorème d'existence et d'unicité pour le problème mixte (\*) à données initiales à support compact.

C'est le :

THÉORÈME 4.1. - On fait les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  sur le flot  $\phi^t$ . Alors pour tout  $g \in \mathcal{U}(X)$ , il existe une solution unique  $u \in \mathcal{D}'_a(\mathbb{R} \times X)$ , nulle dans un voisinage de  $\{0\} \times \partial X$  et vérifiant

$$(4.1) \quad Pu = 0, \quad \gamma_0 u = 0, \quad \gamma_1 u = g, \quad Bu = 0.$$

DÉMONSTRATION DE L'EXISTENCE. - C'est une conséquence immédiate du théorème 3.1. En effet, si on pose  $v = Eg$  et  $w = v - u$ , on est ramené à résoudre

$$Pw = F_0, \quad \gamma_0 w = f_0, \quad \gamma_1 w = f_1, \quad Bw = h_0$$

avec les données  $C^\infty$  et nulles au voisinage de  $\{0\} \times \partial X$ .

Il est bien connu (cf. par exemple Kato [7] que ce problème admet une solution  $C^\infty$  et nulle au voisinage de  $\{0\} \times \partial X$ .

DÉMONSTRATION DE L'UNICITÉ. - Soit  $u \in \mathcal{D}'_a(\mathbb{R} \times X)$  nulle au voisinage de  $\{0\} \times \partial X$  et solution de (4.1) avec  $g = 0$ . Il s'agit de montrer que pour tout  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times X)$ , on a

$$\langle u, \varphi \rangle = 0.$$

Pour cela, on considère la solution  $v \in C^\infty(\mathbb{R} \times \bar{X})$  du problème mixte transposé

$$(4.2) \quad t_P v = \varphi, \quad v \Big|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0, \quad Bv = 0$$

où T est choisi assez grand pour que  $\varphi(t, x) = 0$  quand  $t \geq T$ .

Soit  $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  un prolongement admissible de u, on peut donc le tronquer pour  $t < 0$  en le multipliant par la fonction de Heaveside  $Y(t)$  ; on a

$$(4.3) \quad \langle u, \varphi \rangle = \langle Y(t)\tilde{u}, \varphi \rangle$$

On désigne par  $v^0$  la fonction  $v(t, x)$  prolongée par  $\tilde{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$  par 0 si  $t \geq T$  ou si  $x \notin \bar{X}$ . La formule des sauts s'écrit

$$(4.4) \quad t_P v^0 = \varphi + B_1 v \otimes \delta_{\mathbb{R} \times \partial X}$$

où le deuxième terme désigne une couche simple sur  $\mathbb{R} \times \partial X$ .

En remplaçant dans (4.3); l'expression tirée de (4.4), il vient

$$(4.5) \quad \langle u, \varphi \rangle = \langle Y(t)\tilde{u}, {}^t P v^0 - B_1 v \times \delta_{\mathbb{R} \times \partial X} \rangle .$$

Mais comme  $u$  est nul sur  $\mathbb{R} \times \partial X$  au voisinage de  $\{0\} \times \partial X$ , on a

$$\langle Y(t)\tilde{u}, B_1 v \otimes \delta_{\mathbb{R} \times \partial X} \rangle = 0.$$

Après transposition de  $P$ , on tire de (4.5)

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle P(Y(t)\tilde{u}), v^0 \rangle ,$$

ce dernier produit scalaire est nul car  $\tilde{u}$  est admissible et vérifie

$$P(Y(t)\tilde{u}) \Big|_{\mathbb{R} \times X} = Pu \Big|_{\mathbb{R} \times X} = 0.$$

Remarque 4.1. - On peut aussi obtenir un théorème analogue dans des espaces de Sobolev, pour cela il suffit d'utiliser la continuité de  $E$  dans ces espaces en procédant comme pour le problème de Cauchy (cf. par exemple Chazarain [2]).

Montrons maintenant que les singularités de la solution  $u$  se propagent et se réfléchissent selon les lois de l'optique géométrique.

THÉORÈME 4.2. - Sous les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ , le spectre singulier de la solution  $u$  du problème mixte (4.1) vérifie l'inclusion

$$(4.6) \quad wF(u) \subset C_0 \cup wF(g)$$

DÉMONSTRATION. - C'est une conséquence évidente du théorème sur la propagation des singularités par un opérateur intégral de Fourier et du fait que la solution exacte ne diffère de  $Eg$  que par une fonction  $C^\infty$ .

Terminons par quelques remarques.

Remarque 4.1. - Pour simplifier la rédaction on a supposé les coefficients  $P$  indépendants du temps, mais en fait la démonstration marche tout aussi bien dans ce cas et même dans certains cas où  $\mathbb{R} \times X$  est remplacé par un ouvert non cylindrique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Remarque 4.2. - Le cas où  $g$  n'est plus nécessairement à support compact introduit deux types de difficultés nouvelles. On doit d'une part résoudre le problème des rayons "glissants" sur le bord et d'autre part les conditions de compatibilité ne



se laissent plus si facilement exorciser. En collaboration avec A. Hirschowitz et A. Piriou, on a obtenu quelques résultats à propos de la deuxième difficulté.

Remarque 4.3. - On trouvera dans la thèse de Nosmas [11] une adaptation de la méthode utilisée dans ce travail à l'étude de certains problèmes de transmission pour l'équation des ondes.

Jacques CHAZARAIN  
Département de Mathématiques  
Université de Nice  
Parc Valrose  
06034 NICE CEDEX

RÉFÉRENCES

- [1] J. CHAZARAIN - Construction de la paramétrix du problème mixte hyperbolique pour l'équation des ondes. CRAS t 276 (1973) p 1213 et Séminaire Bourbaki, lect. Notes n° 383 p. 277-285.
- [2] J. CHAZARAIN - Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante. Ann. Inst. Fourier t. 24 (1974) p. 173-202.
- [3] J.J. DUISTERMAAT - Fourier Integral Operators II, Acta Math. 128 (1972) p. 183-269.
- [4] J.J. DUISTERMAAT - Fourier Integral Operators. Lecture Notes Courant Institute New-York (1973).
- [5] G. FRIEDLANDER - The wave front set of the solution of a simple initial boundary value problem with glancing rays (preprint).
- [6] L. HORMANDER - Fourier Integral Operators I. Acta Math. 127 (1971) p. 79-183.
- [7] J. KATO - Mixed problems of hyperbolic equations in a general domain. Jap. Acad. 47 (1971) p. 67-70.
- [8] A. MADJA - Reflection of singularities at the boundary (preprint).
- [9] S. OSHER - Reflection of singularities at the boundary (preprint).
- [10] R. MELROSE - Microlocal Parametrix for diffractive boundary value problems (preprint).
- [11] L. NIRENBERG - Lectures on Linear Partial Differential Equations. Regional Conf. Series in Maths n° 17, A.M.S. (1973).
- [12] J.C. NOSMAS - Paramétrix du problème de transmission pour l'équation des ondes ; thèse 3ème cycle, Univ. de Nice (Mai 1975).
- [13] A. POVZNER - Discontinuities of the Green's function of a mixed problem for the wave equation. Mat. Sb. 51 (1960) p. 3-26. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 47, p. 131-156.
- [14] I. SUHAREVSKII - Discontinuities of the Green's function of a mixed problem for the wave equation. Mat. Sb. 51 (1960) p. 3-26. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 47, p. 131-156.
- [15] M. TAYLOR - Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations (preprint).
- [16] M. TAYLOR - Grazing rays and reflection of singularities of solutions to wave equations (preprint).