JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

SERGE ALINHAC

Paramétrix et propagation des singularités pour un problème de Cauchy à multiplicité variable

Journées Équations aux dérivées partielles (1975), p. 3-26

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1975____3_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 34-35 (1976) p.3-26

PARAMÉTRIX ET PROPAGATION DES SINGULARITÉS POUR UN PROBLÈME DE CAUCHY A MULTIPLICITÉ VARIABLE.

par S. ALINHAC.

INTRODUCTION .

L'article étudie la construction et les singularités d'une paramétrix du problème de Cauchy pour l'opérateur

$$P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - A^2(t)t^{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_o(t) \frac{\partial}{\partial t} + a_1(t) \frac{\partial}{\partial x} + b(t)$$

dans le plan ou dans une bande $t \in I$ du plan (où I est un intervalle de R contenant 0).

Cette équation, qui intervient en Physique [4], a été l'objet de nombreux travaux qui ont fourni diverses conditions suffisantes pour la correction du problème de Cauchy. Quelques uns d'entre eux sont mentionnés aux numéros [3], [4], [5], [6], [13], [14], [15] et [17] de la bibliographie.

Dans le cas présent, où l'on suppose les coefficients de P de classe C^∞, on sait (voir par exemple Ivry [9] et Oleinik [14]) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy soit bien posé est que $a_1(t)=0(t^{k-1})$ près de t=0.

Supposant cette condition remplie, il n'est pas possible, en dehors du cas où P est strictement hyperbolique (k=0), de construire une paramétrix sous la forme intégrale de Fourier usuelle, parce que le champ hamiltonien du symbole principal de P est nul au-dessus de t=0. On y parvient ici en utilisant une forme généralisée de ces intégrales, où l'exponentielle qui contient la phase est remplacée par une "fonction spéciale" convenable, dont le type dépend de k (c'est une exponentielle pour k=0, une fonction cylindrique de Weber pour k=1, etc...)

C'est là un procédé assez répandu en Physique (considérer, par exemple, l'usage de la fonction d'Airy dans la résolution de divers problèmes de diffraction, etc etc...). Son champ d'application ne semble du reste nullement limité aux problèmes hyperboliques.

La description détaillée de la paramétrix montre que sa régularité dépend de façon essentielle des valeurs de $a_1(t)$ (cette description fait l'objet du théorème II.2). Ce phénomène avait déjà été pressenti par divers auteurs (voir par exemple Oléinik [14] et la bibliographie donnée dans cet article). Les notions d'opérateurs "régulièrement hyperboliques" et complètement régulièrement hyperboliques" élaborées par Ivry et Piet kov [10] en rendent compte de façon précise lorsque k=1 (l'opérateur P étant alors l'exemple type de leur distinction). Il est ici quantitativement décrit par les théorèmes I.3.1. et I.3.2..
Le premier indique la régularité globale des solutions obtenues (c'est-à-dire dans un domaine contenant t=0), tandis que le second montre que ces solutions peuvent s'écrire, en dehors de t=0, à l'aide de noyaux-distributions de Fourier d'ordres $m=-\frac{1}{4}-\frac{k}{2(k+1)}-\frac{1}{2(k+1)}\left|\mathrm{Re}\,\frac{(a_1(t)/t^{k-1})(0)}{A(0)}\right|$ et $m-\frac{1}{k+1}$,

Enfin, dans le cas général où les coefficients de P peuvent dépendre de x, on démontre (Théorème I.3.3) que le front d'onde de la solution est formé d'arcs de bicaractéristiques" aboutissant" aux singularités des données, généralisant ainsi le résultat bien connu dans le cas strictement hyperbolique.

I - POSITION DU PROBLÈME ET PRINCIPAUX RÉSULTATS.

1) <u>Généralités, notations</u>.
On considère l'opérateur
$$P=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-A^2(t)\,t^{2k}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_0(t)\,\frac{\partial}{\partial t}+a_1(t)\,\frac{\partial}{\partial x}+b(t),$$
où A, a_0, a_1 et b sont de classe C^∞ dans un intervalle I ouvert, borné ou non, contenant 0, avec de plus $A(t)>0$ sur I (k entier ≥ 0). On se propose de décrire la paramétrix du problème de Cauchy
$$\begin{cases} Pu=0 \\ u|_{t=0}=\varphi \\ u'_t|_{t=0}=\psi \end{cases}$$
dans la bande du plan $\{(x,t),\ t\in I\}$.
La valuation de $a_1(t)$ sera notée μ:
$$\mu=1+\sup\{\ell;\ a_1^{(\ell)}(0)=0\}.$$

2) <u>Une condition nécessaire et suffisante</u> pour la correction du problème de Cauchy.

C'est la condition $\mu \geq k - 1$.
Sa nécessité a été prouvée par V. Ivry [9], à partir d'une notion très large de "correction" du problème de Cauchy. Néammoins, la preuve est peu constructive, car elle fait intervenir un changement de variables asymptotique qui transforme toutes les variables.
C'est pourquoi on indique brièvement dans la partie III comment on peut retrouver ce résultat en utilisant le matériel de la partie II.

Sa suffisance est bien connue, et suit, par exemple, des résultats d'Oleinik [14].

Il importe de noter ici que lorsque $\mu = k-1$, la régularité de la Solution du problème de Cauchy ne dépend pas seulement de celle des données, mais aussi des valeurs du coefficient a_1, à la différence de ce qui se produit dans le cas strictement hyperbolique ($k=0$). Les théorèmes qui suivent précisent quantitativement ce phénomène.

3) Trois théorèmes sur les singularités de la paramétrix ($\mu \geq k - 1$).

THÉORÈME 1.3.1. - Posons

$$m = \sup\left(0, -\frac{k}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+1)}\left| \operatorname{Re} \frac{(a_1(t)/t^{k-1})^{(0)}}{A(0)} \right|\right)$$

On construit des opérateurs M et N de $\varepsilon'(R)$ dans $C^\infty(I; \mathcal{S}')$ avec les propriétés suivantes :

i) Si φ et ψ sont des distributions à supports compacts alors $u = N\varphi + M\psi$ est telle que

$$\{Pu \equiv 0, \quad u|_{t=0} \equiv \varphi, \quad u'_t|_{t=0} \equiv \psi, \text{ le signe } \equiv$$

signifiant que les égalités s'entendent modulo C^∞.

ii) Si $u \in H_s$ compact, alors

$$\forall \ell \quad N, \; Nu \in C^\ell(I; H_{s-m-\ell}),$$
$$\forall \ell \quad N, \; Mu \in C^\ell(I; H_{s+\frac{1}{k+1}-m-\ell}).$$

Le théorème suivant implique qu'en un certain sens, le théorème 1.3.1 est optimal.

THÉORÈME 1.3.2. - Soit $t_0 > 0$. Il existe alors des opérateurs régularisant $R_1(t_0)$ et $R_2(t_0)$ tels que

i) Restreint à $t > t_0$, $N - R_1$ s'écrit comme somme de deux opérateurs intégraux de Fourier de phases $(x-y,\xi) \pm \frac{\varphi(t)^{k+1}}{k+1}|\xi|$, et d'ordre

$$-\frac{1}{4} - \frac{k}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+1)}\left| \operatorname{Re} \frac{(a_1(t)/t^{k-1})(0)}{A(0)} \right| \quad \text{exactement.}$$

ii) Restreint à $t > t_0$, $M - R_2$ s'écrit comme somme de deux opérateurs intégraux de Fourier de phases $(x-y,\xi) \pm \frac{\varphi(t)^{k+1}}{k+1}|\xi|$ et d'ordre exactement

$$-\frac{1}{4} - \frac{k+2}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+1)}\left| \operatorname{Re} \frac{(a_1(t)/t^{k-1})(0)}{A(0)} \right|$$

On a posé ici $\varphi(t) = t\left(\frac{k+1}{t^{k+1}}\int_0^t A(s)s^k ds\right)^{1/k+1}$

Le troisième théorème présente une analyse micro-locale de la propagation des singularités pour le problème de Cauchy étudié. Comme les deux précédents, c'est une conséquence de la construction de la paramétrix effectué dans la partie II. Il peut néanmoins s'étendre au cas où les coefficients de P dépendent également de x : nous l'énoncerons donc dans ce cas et le prouverons à part dans la partie IV.

THÉORÈME 1.3.3. - <u>On suppose que les coefficients</u> A, a_0, a_1 <u>et</u> b <u>de</u> P <u>sont des fonctions</u> C^∞ <u>de</u> x <u>et</u> t, <u>avec comme précédemment</u> $A(x,t) > 0$ <u>et</u>, <u>pour tout</u> x, $\mu \geq k-1$.

On suppose de plus que l'unicité du problème de Cauchy pour P dans les distributions est vraie localement (c'est le cas, par exemple, lorsque les coefficients dépendent analytiquement de x, cf. [2]).

Soit $u \in C^\infty(I; \mathcal{D}')$ telle que

$Pu=0$, $u|_{t=0} = \varphi$, $u'_t|_{t=0} = \psi$. Alors le front d'onde de u (note WF(u)) est constitué d'arc de bicaractéristiques nulles aboutissant aux singularités des données, à raison d'au moins un arc vers chaque point $(y,0,\xi,0)$ tel que $(y,\xi) \in WF(\varphi)$ ou $WF(\psi)$, et au-dessus de chaque demi-plan $t > 0$ ou $t < 0$.

Ces théorèmes seront prouvés à la fin de la partie II, paragraphes 3 et 4.

II - DESCRIPTION DE LA PARAMÉTRIX.

On va montrer dans cette partie comment la paramétrix peut s'écrire à l'aide de noyaux-distributions définis par des intégrales oscillantes de la forme

$$\int e^{i(x-y,\xi)} \mathcal{V}(\xi, \varphi(t)|\xi|^{1/k+1})\, S(t,\xi)\, d\xi ,$$

où S est un symbole ordinaire et $\mathcal{V}$ une "fonction spéciale" dont le type dépend de k. Avant de formuler un énoncé précis, qui fait l'objet du théorème II.2, indiquons comment sont choisies ces "fonctions spéciales".

1) <u>Un résultat auxiliaire : la notion de solution sous-dominante.</u>

a) Résumons ici un résultat dû à P.F. Hsieh et Y.Sibuja [8] :

PROPOSITION II.1. - <u>Soit une équation différentielle du type</u>

$$\frac{d^2y}{dz^2} - P(z,c_1, \ldots, c_m)\, y = 0, \text{ \underline{où}}$$

$$P(z,C) = (z-C_1) \ldots (z-C_m), \; C_i \in \mathbb{C}.$$

<u>Posons</u> $(z^{-m}P(z,c)))^{1/2} = 1 + \sum_{h \geq 1} b_h z^{-h}$.

Il existe une unique solution y_m de l'équation donnée telle que

i) $y_m(z,C)$ est une fonction entière de z et c.

ii) Pour tout $\delta_0 > 0$,, lorsque $z \to \infty$ dans le secteur $|\arg z| \leq \frac{3\pi}{m+2} - \delta_0$, on a les estimations asymptotiques

$$(\text{II.1})\quad y_m(z)=z^{r_m}(1+O(z^{-1/2}))\exp.\{-\frac{z^{m/2+1}}{m/2+1}-\sum_{1<h\leq \frac{M}{2}+1}\frac{2b_h}{m+2-2h}\, z^{\frac{m+2-2h}{2}}\}.$$

$$(\text{II.1})'\quad y'_m(z)=z^{m/2+r_m}(-1+O(z^{-1/2}))\exp.\ \{-\frac{z^{m/2+1}}{m/2+1}-\sum_{1\leq h<\frac{m}{2}+1}\frac{2b_h}{m+2-2h}\,\frac{m+2-2h}{z^2}\}$$

Les O étant uniformes pour c dans un compact de C^m, et $r_m= -\frac{m}{4}-b_{\frac{m}{2}+1}$.

En fait, on a même un résultat plus précis :
pour tout $r>0$ et $\delta>0$, il existe $N_{r,\delta}$ et $p(\xi,c)$ tels que p soit holomorphe de (ξ, c) pour $|\xi|>N_{r,\delta}$, $|c|^2<r$, $|\arg\xi|<\frac{3\pi}{2(m+2}-\delta$., $p(\xi)\sim\sum_{N=1}^{\infty}p_N\,\xi^{-N}$, et tels que les estimations (II.1), (II.1)' soient valables avec $O(z^{-1/2})$ remplacé par $p(z^{1/2})$.

On dira que y_m est la solution sous dominante de l'équation différentielle donnée.

b) **Une définition**

Considérons maintenant une équation différentielle du type

$$\frac{d^2y}{dz^2}+Q(z,c)y=0,\ \text{où}$$

$Q(z,c)=(z-c_1)\ \dots\ (z-c_m)$, $c_i\in\mathbb{C}$.

Pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $\lambda^{m+2}=-1$, le changement de variables $z=\lambda z'$ transforme l'équation donnée en une équation du type mentionnée en a); soit y_λ sa solution sous dominante : alors $y(z)=y_\lambda\ (z/\lambda)$ est solution de l'équation donnée.

Par définition, on dira que les deux solutions de l'équation obtenues pour les choix $\lambda_1=e^{i\frac{\pi}{m+2}}$ et $\lambda_2=e^{-i\frac{\pi}{m+2}}$ comme il vient d'être indiqué sont les deux solutions sous-dominantess primitives de l'équation

$$\frac{d^2y}{dz^2}+Q(z,c)\ y=0.$$

2) La forme explicite de la paramétrix.

THÉORÈME II.2.- On suppose $\mu\geq k-1$.

On peut construire alors

. 2k symboles pseudo-différentiels $\Gamma^j(\xi)$ tels que pour j=0, ..., k-2 $\Gamma^j\in S^{\frac{-2-j}{k+1}}$, pour $j=k-1, \dots, 2k-1$, $\Gamma^j \in S^{\frac{k-1-j}{k+1}}$

On note $\mathcal{V}^i(\xi, \mathcal{J})$ $(i=1,2)$ les deux solutions sous-dominantes primitives (au sens de la définition II.1.b·) de l'équation auxiliaire.

$$\mathcal{V}''(\mathcal{J}) + (\mathcal{J}^{2k} + \sum_{j=0}^{2k-1} \Gamma^j(\xi)\, \mathcal{J}^j)\, \mathcal{V}(\mathcal{J}) = 0 \text{ qu'ils déterminent.}$$

Des symboles $c(t,\xi)$, $d(t,\xi)$, $\sigma_1(\xi)$, $\sigma_2(\xi)$, d'ordre zéro, $\sigma_3(\xi)$ et $\sigma_4(\xi)$, d'ordre $\frac{-1}{k+1}$.

Tous ces symboles sont supposés définis pour $|\xi| > M_0$; pour tout $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \geq M_0 + 2$, $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq M_0+1$, on définit deux fonctions.
$\{N(t,\xi) = \chi(\sigma_1 \mathcal{U}_1 + \sigma_2 \mathcal{U}_2)$, $M(t,\xi) = \chi(\sigma_3 \mathcal{U}_1 + \sigma_4 \mathcal{U}_2)$ à l'aide de

$\mathcal{U}_i(t,\xi) = c(t,\xi)\mathcal{V}^i(\xi, \varphi(t)|\xi|^{1/k+1}) + d(t,\xi)|\xi|^{-\frac{k}{k+1}} \mathcal{V}'^i_{\mathcal{J}}(\xi, \varphi(t)|\xi|^{1/k+1})$ (où

$\varphi(t) = t\, (\frac{k+1}{t^{k+1}} \int_0^t A(s)s^k ds)^{1/k+1})$. Ces deux fonctions jouissent des propriétés suivantes :

i) les expressions $Nu = \mathcal{F}^{-1}(N \mathcal{F} u)$, $Mu = \mathcal{F}^{-1}(M \mathcal{F} u)$ (où $\mathcal{F}u$ désigne la transformée de Fourier partielle de u par rapport à la variable tangentielle) définisssent des opérateurs continus de $\varepsilon'(R)$ dans $C^\infty(I; \mathcal{S}')$,

ii) Pour φ, $\psi \in \varepsilon'(R)$, $u = N\varphi + M\psi$ est telle que

$$\{Pu \equiv 0, \quad u|_{t=0} \equiv \varphi, \quad u'_t|_{t=0} \equiv \psi.$$

La preuve de ce théorème occupe les paragraphes 3) abc et d.

a) Un changement de fonctions asymptotique.

En effectuant une transformation de Fourier partielle en x, l'opérateur P devient

$$P = \frac{d^2}{dt^2} + a_0(t)\frac{d}{dt} + A^2(t)t^{2k}\xi^2 + ia_1(t)\,\xi + b(t),$$

que nous considérons comme une équation différentielle avec un grand paramètre. Il est possible, par un changement de fonctions dépendant de ξ, de se ramener au cas où les coefficients de $\hat{P}$ sont des polynômes en t de degré au plus 2k.

Dans le cas particulier de $\hat{P}$, nous explicitons ce changement dans la proposition II.3.a, renvoyant le lecteur à .R.Y.S. Lynn et J.B. Keller [12] pour un traitement plus général.

PROPOSITION II.3.a. - Soit l'équation différentielle

$$\hat{P} = \frac{d^2}{dt^2} + a_0(t)\frac{d}{dt} + \xi^2(A^2(t)t^{2k} + \frac{ia_1(t)}{\xi} + \frac{b(t)}{\xi^2}) = 0.$$

Il existe :

. 2k symboles pseudo - différentiels $\Gamma^j(\xi)$ tels que pour $j=0, \ldots, k-2$, $\Gamma^j \in S^{-2-j/k+1}$

pour $j=K-1, \ldots, 2k-1$, $\Gamma^j \in S^{\frac{k-1-j}{k+1}}$, et de plus

$$\Gamma^{k-1}(\xi)_{\zeta \to \pm\infty} \to \Gamma_\pm = \begin{cases} 0 \text{ si } \mu > k-1 \\ \pm i \dfrac{(a_1(t)/_t k-1)(0)}{A(0)} \quad \text{si } \mu = k-1. \end{cases}$$

Deux symboles $c(t,\xi)$ et $d(t,\xi)$, d'ordre zéro, avec $d(0,\xi)=0$, tandis que $c(0,\xi)$ peut être choisi arbitraire d'ordre zéro.

Deux symboles $\nu(t,\xi)$ et $\mu(t,\xi)$ régularisants, tels que pour toute solution $\mathcal{V}(\xi,\mathcal{S})$ de l'équation $\mathcal{V}''(\mathcal{S}) + (\mathcal{S}^{2k} + \sum_{j=0}^{2k-1} \Gamma^j(\xi)\,\mathcal{S}^j)\,\mathcal{V}(\mathcal{S}) = 0$, la fonction

$$\mathcal{U}(t,\xi) = c(t,\xi)\,\mathcal{V}(\xi,\varphi(t)|\xi|^{1/k+1}) + \frac{d(t\,\xi)}{|\xi|^{k/k+1}}\,\mathcal{V}'_{\mathcal{S}}(\xi,\varphi(t)|\xi|^{1/k+1})$$

vérifie $\hat{P}\,\mathcal{U} = \nu(t,\xi)\,\mathcal{V}(\xi,\varphi(t)|\xi|^{1/k+1}) + \mu(t,\xi)\,\mathcal{V}'_{\mathcal{S}}(\xi,\varphi(t)|\xi|^{1/k+1})$.

<u>preuve</u> : α) Limitons nous d'abord au cas $\xi > 0$, et montrons qu'il est possible de trouver des polynômes $\pi_0(\eta) = \eta^{2k}$, $\pi_1(\eta)$, $\pi_2(\eta)$, etc.(les $\pi_i(\eta)$, $i \geq 1$, sont de degrés $\leq 2k-1$) et des fonctions $c_i(t)$, $D_i(t)$ (pour i entier > 0) telles que pour toute solution de l'équation

$$\frac{d^2\mathcal{U}}{d\eta^2} + \xi^2(\pi_0(\eta) + \frac{\pi_1(\eta)}{\xi} + \ldots)\mathcal{U} = 0, \text{ la fonction}$$

$$u(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t a_0(s)\,ds}\,\{ (c_0(t) + \frac{c_1(t)}{\xi} + \ldots)\mathcal{U}(\varphi(t)) +$$

$$+ \frac{1}{\xi}(D_0(t) + \frac{D_1(t)}{\xi} + \ldots)\,\mathcal{U}'(\varphi)$$

est solution formelle de l'équation $\hat{P}u=0$.

La substitution $u = \exp(-\frac{1}{2}\int_0^t a_0(s)\,ds)v$ remplace P par l'équation

$$Qv = \frac{d^2v}{dt^2} + \xi^2(A^2(t)t^{2k} + \frac{ia_1(t)}{\xi} + \frac{\delta(t)}{\xi^2}) = 0, \text{où}$$

$$\delta(t) = b(t) - \frac{a_0^2(t)}{4} - \frac{a'_0(t)}{2}.$$

Supposant les polynômes π_i connus, on cherche une solution formelle de Q sous la forme indiquée :

$$v'_t = c'\,\mathcal{U}(\varphi) + c\,\mathcal{U}'(\varphi)\,\varphi' + \frac{D'}{\xi}\,\mathcal{U}'(\varphi) + \frac{D}{\xi}\,\mathcal{U}''\,\varphi'$$

$$v'' = c''\mathcal{U} + 2c'\,\mathcal{U}'\,\varphi' + c\,\mathcal{U}''\,\varphi'^2 + c\,\mathcal{U}'\,\varphi'' + \frac{D''}{\xi}\,\mathcal{U}'$$

$$+ \frac{2b'\,\mathcal{U}''}{\xi}\,\varphi' + \frac{D}{\xi}\mathcal{U}'''\,\varphi'^2 + \frac{D}{\xi}\,\mathcal{U}''\,\varphi''.$$

Compte tenu de l'équation satisfaite par $\mathcal{U}$, on obtient, en remplaçant dans Q la fonction v et ses dérivées par leurs valeurs, une expression de la forme

$$G\,\mathcal{U}(\varphi) + H\,\mathcal{U}'(\varphi), \text{ où}$$

$$G = \xi^2\left(A^2t^{2k} + \frac{ia_1}{\xi} + \frac{\delta}{\xi^2}\right)c + c'' - \xi^2 c\,\varphi'^2\left(\varphi^{2k} + \frac{\pi_1(\varphi)}{\xi} + \dots\right)$$
$$-2\xi D'\,\varphi'\left(\varphi^{2k} + \frac{\pi_1(\varphi)}{\xi} + \dots\right) - \xi\varphi'' D\left(\varphi^{2k} + \frac{\pi_1(\varphi)}{\xi} + \dots\right)$$
$$-\xi D\varphi'^2\left(2k\varphi^{2k-1} + \frac{\pi'_1(\varphi)}{\xi} + \dots\right)$$

$$H = \xi\left(A^2t^{2k} + \frac{ia_1}{\xi} + \frac{\delta}{\xi^2}\right)D + 2\varphi'c' + c\varphi'' + \frac{D''}{\xi} - \xi D\varphi'^2\left(\varphi^{2k} + \frac{\pi_1(\varphi)}{\xi} + \dots\right)$$

On va chercher à annuler G et H à un ordre arbitraire en $1/\xi$: les termes de plus hauts degrés en ξ de G et H sont respectivement

$$\xi^2(A^2(t)t^{2k} - \varphi'^2\varphi^{2k})c_0,\quad \xi(A^2(t)t^{2k} - \varphi'^2\varphi^{2k})\,D_0.$$

On prend donc φ telle que $\varphi'^2\varphi^{2k} = A^2(t)t^{2k}$

Soit la fonction $\varphi(t) = t\left(\frac{k+1}{t^{k+1}}\int_0^t A(s)s^k ds\right)^{1/k+1}$.

Notons ici que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = (A(0))^{1/k+1}$.

Les coefficients de ξ dans G (resp. de ξ° dans H) sont alors

$$(*)\ -2D'_0\,\varphi'\,\varphi^{2k} + c_0(ia_1(t) - \pi_1(\varphi)\,\varphi'^2) - D_0(\varphi''\varphi^{2k} + 2k\varphi'^2\,\varphi^{2k-1})$$

$$(**)\ 2\varphi' c'_0 + \varphi'' c_0 + (ia_1(t) - \pi_1(\varphi)\,\varphi'^2)D_0.$$

Annuler ces coefficients, c'est chercher une solution non triviale et régulière (c_0, D_0) du système

(II.3) $\{(*) = 0,\quad (**) = 0.$

On peut obtenir une solution non triviale sous la forme

$$C_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\varphi'}}\cos\Theta,\ D_0(t) = \frac{\sin\Theta}{\varphi^k},\ \text{où}$$
$$\Theta = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ia_1(s) - \pi_1(\varphi)\,\varphi'^2}{A(s)s^k}\,ds\ .$$

Cette solution est régulière si $ia_1(t) - \pi_1(\varphi)\,\varphi'^2 = 0(t^{2k})$ près de $t=0$, ce qu'on peut réaliser par un choix convenable de $\pi_1(\eta)$. Posons en effet $\pi_i(\eta) = \sum_{j=0}^{2k-1}\gamma_i^j\eta^j$; on devra choisir $\gamma^\circ_1 = \dots = \gamma_1^{\mu-1} = 0$ (μ désigne la valuation de a_1), et en particulier

$$\gamma_1^\mu = i\,\frac{(a_1(t)/t^\mu)(0)}{(\varphi'(0))^{\mu+2}}$$

Le calcul des coefficients suivants c_i, D_i $(i > 1)$ conduit à résoudre le même système (II.3) que précédemment, mais cette fois avec des seconds membres déjà calculés $(j < i)$ et des π_j déjà déterminés $(j \leq i)$. Cette résolution est possible dans les fonctions régulières pourvu que le second membre de la première équation de (II.3) s'annule au moins à l'ordre $2k$ sur $t=0$; il est facile de voir, en explicitant ce second membre, que l'on peut réaliser cette condition par un choix convenable de π_{i+1}. Ce choix étant supposé réalisé, on devra prendrealors $D_i(0)=0$, $C_i(0)$ étant arbitraire.

β) Toujours dans le cas $\xi > 0$, montrons comment on peut remplacer la solution formelle u du point α) par une vraie solution. Choisissons en effet des fonctions $\gamma^j \in C$ telles que

$$\gamma^j(\xi) \sim \frac{\gamma_1^j}{\xi} + \frac{\gamma_2^j}{\xi^2} + \ldots \text{ lorsque } \xi \to +\infty \quad (j=0, \ldots, 2k-1),$$

et des fonctions $c(t,\xi)$ et $d(t,\xi)$, de classe C^∞, telles que

$$c(t,\xi) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t a_0(s)ds\right)\left(D_0(t) + \frac{D_1(t)}{\xi} + \ldots\right),$$

$$d(t,\xi) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t a_0(s)\,ds\right)\left(D_0(t) + \frac{D_1(t)}{\xi} + \ldots\right),$$

où les équivalences ont lieu pour $\xi \to +\infty$ et sont uniformes sur tout compact de I.

Les calculs faits au point α) montrent alors que pour toute solution de l'équation

$$\frac{d^2\mathcal{U}}{d\eta^2} + \xi^2\left(\eta^{2k} + \sum_{j=0}^{2k-1} \gamma^j(\xi)\,\eta^j\right) = 0,$$

la fonction $u(t,\xi) = c(t,\xi)\,\mathcal{U}(\varphi(t)) + \frac{1}{\xi}\,d(t,\xi)\,\mathcal{U}'(\varphi(t))$ vérifie $\hat{P}u = G\,\mathcal{U}(\varphi) + H\,\mathcal{U}'(\varphi)$, avec cette fois $G \sim 0$, $H \sim 0$ lorsque $\xi \to +\infty$, uniformément sur tout compact de I (le signe ~ 0 indique la décroissance rapide à l'infini).

γ) Pour achever la preuve de la proposition II.3a, il suffit d'appliquer deux fois le point β).

Lorsque $\xi > 0$, on désigne par γ_+^j, c_+ et d_+ les fonctions définies au point précédent; lorsque $\xi < 0$, on pose $\xi = -\tau$, et l'on effectue sur l'opérateur ainsi déduit de $\hat{P}$ les calculs du point β), ce qui donne des fonctions $\gamma_-^j(-\xi)$, $c_-(t,-\xi)$, $d_-(t,-\xi)$. On note alors :

$$\tilde{\gamma}^j(\xi) = \begin{cases} \gamma_+^j(\xi) & \text{si } \xi \geq 1 \\ \gamma_-^j(-\xi) & \text{si } \xi \leq -1 \end{cases}$$

, et de même on définit $\tilde{c}(t,\xi)$ et $\tilde{d}(t,\xi)$ à partir de c_+, c_-, d_+, d_-.

Reste enfin à donner à l'équation auxiliaire

$$\frac{d^2\mathcal{U}}{d\eta^2} + \xi^2\left(\eta^{2k} + \sum_{j=0}^{2k-1} \tilde{\gamma}^j(\xi)\,\eta^j\right)\mathcal{U} = 0,$$

la forme qu'elle revêt dans l'énoncé de la proposition et dont l'intérêt est que le coefficient du terme de plus haut degré η^{2k} est constant ; pour cela, il suffit de poser $\mathcal{G}= \eta|\xi|^{1/k+1}$ et $\Gamma^j(\xi) = \tilde{\gamma}^j(\xi)|\xi|^{\frac{2k-j}{k+1}}$.

On pourra alors prendre pour les symboles c et d de la proposition les symboles $\tilde{c}$ et $\tilde{d}$ que l'on vient de construire, tandis que ν et μ proviennent des recollements des G et H relatifs à $\xi > 0$ et $\xi < 0$.

Les propriétés des symboles $\Gamma^j(\xi)$ découlent du fait observé au point α) que $\overset{\circ}{\gamma}_1 = \dots = \gamma_1^{\mu-1} = 0$ et $\gamma_1^{\mu} = i \dfrac{(a_1(t)/_t\mu(0))}{(\varphi'(0))^{\mu+2}}$.

b) <u>Propriétés des solutions sous - dominantes primitives</u>.

On a vu au point a) comment la recherche de solutions dans le noyau de P pouvait se ramener asymptotiquement à celle de solutions de l'équation auxiliaire.

(II.3.b) $$v''(\mathcal{G}) + (\mathcal{G}^{2k} + \sum_{j=0}^{2k-1} \Gamma^j(\xi)\,\mathcal{G}^j)v(\mathcal{G}) = 0,$$

précisée à la proposition II.3.a.

Le lemme suivant précise le comportement des deux solutions sous-dominantes primitives de (II.3.b) (au sens de la définition II.1.b.).

LEMME II.3.b. - <u>Soit l'équation différentielle</u>

(II.3.b.) $v''(\mathcal{G}) + (\mathcal{G}^{2k} + \sum_{j=0}^{2k-1} \Gamma^j(\xi)\,\mathcal{G}^j)v(\mathcal{G}) = 0$, <u>où les</u> Γ^j <u>sont des symboles d'ordres</u> $\frac{-2-j}{k+1}$ (<u>pour</u> $j=0, \dots, k-2$) <u>et</u> $\frac{k-1-j}{k+1}$ (<u>pour</u> $j=k-1, \dots, 2k-1$), <u>avec en plus</u> $\Gamma^{k-1}(\xi) \xrightarrow[\xi \to \pm\infty]{} \Gamma_{\pm}$.

Alors les deux solutions sous-dominantes primitives $v^1(\xi,\mathcal{G})$ et $v^2(\xi,\mathcal{G})$ de (II.3.b) (cf. définition II.1.b) jouissent des propriétés suivantes :

i) $v^i(\xi,\mathcal{G})$ est C^∞ en $(\xi,\mathcal{G})$ pour $|\xi|$ grand, $\mathcal{G}\in\mathbb{C}$, $i=1,2$.

ii) Pour tout ξ fixé, $|\xi|$ grand, $v^1(\xi,\mathcal{G})$ et $v^2(\xi,\mathcal{G})$ sont deux solutions linéairement indépendante de (II.3.b.).

iii) Lorsque $\xi \to +\infty$, les $v^i(\xi,\mathcal{G})$ convergent (uniformément sur tout compact en $\mathcal{G}$ ainsi que leurs dérivées) vers des solutions indépendantes $v^i(\pm\infty,\mathcal{G})$ de l'équation limité

$$v''(\mathcal{G}) + (\mathcal{G}^{2k} + \Gamma_{\pm}\mathcal{G}^{k-1})v(\mathcal{G}) = 0.$$

iv) Posons

$$m = \sup\left(0, -\frac{k}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+1)}\left|\operatorname{Re}\frac{(a_1(t)/_{t^{k-1}})(o)}{A(0)}\right|\right).$$

Il existe M > 0 telle que, pour tout c > 0, il existe c'> 0 avec les propriétés :

$$\forall x \text{ réel}, |x| \le C, \forall\xi, |\xi| > M, i = 1,2,$$

$$|\mathcal{V}^i(\xi, x|\xi|^{1/k+1})| \le c'(1+|\xi|)^m,$$
$$|\mathcal{V}^{i'}_{\mathcal{Y}}(\xi, x|\xi|^{1/k+1})| \le c'(1+|\xi|)^{m+k/k+1}.$$

preuve : on rappelle que $\mathcal{V}^1(\mathcal{Y}) = y_{\lambda_1}(\mathcal{Y}/_{\lambda_1})$,

$$\mathcal{V}^2(\mathcal{Y}) = y_{\lambda_2}(\mathcal{Y}/_{\lambda_2}),\ \text{où}\ \lambda_1 = e^{i\frac{\pi}{2k+2}},\quad \lambda_2 = e^{-i\frac{\pi}{2k+2}}.$$

i) Le point i) de la proposition II.1. implique que les $\mathcal{V}^i(\xi, \mathcal{Y})$ sont des fonctions entières de $\mathcal{Y}$ et des $\Gamma^j(\xi)$.

ii) Lorsque $\mathcal{Y} \to +\infty$, $|\arg \mathcal{Y}/_{\lambda_i}| = \frac{\pi}{2k+2}$; les expressions asymptotiques (II.1) de la proposition II.1 sont donc valables et fournissent ici.

$$y_\lambda(\mathcal{Y}/_\lambda) = (\mathcal{Y}/_\lambda)^{r_{2k}(\lambda)}(1+O((\mathcal{Y}/_\lambda)^{-1/2}))\exp\{-\frac{\mathcal{Y}^{k+1}}{k+1}\ \frac{1}{\lambda^{k+1}} + \dots$$

où les points désignent des termes comprenant uniquement des puissances de $\mathcal{Y}$ strictement inférieures à k+1. Les termes "oscillants" principaux $\mathcal{V}^1$ et $\mathcal{V}^2$ lorsque $\mathcal{Y} \to +\infty$ sont donc respectivement $e^{i\frac{\mathcal{Y}^{k+1}}{k+1}}$ et $e^{-i\frac{\mathcal{Y}^{k+1}}{k+1}}$, ce qui prouve l'indépendance de ces solutions et ii).

iii) Lorsque $\xi \to +\infty$, tous les coefficients de l'équation (II.3.b) tendent vers des limites. Or $y_\lambda(z)$ est une fonction entière de ces coefficients et de z: lorsque $\xi \to +\infty$, elle converge comme indiqué vers la solution sous dominante de l'équation limite. L'indépendance des solutions limites $\mathcal{V}^i(\pm\infty, \mathcal{Y})$ est prouvée comme au point ii).

iv) Lorsque $z \to \infty$ dans la direction de $1/\lambda_i$ (i=1,2), précisons le comportement asymptotique de $y_{\lambda_i}(z)$:

$$y_{\lambda_i}(z) = z^{r_{2k}(\lambda_i)}(1+O(z^{\frac{1}{2}}))\exp.\{-\frac{z^{k+1}}{k+1} - \sum_{h=1}^{k-2} \frac{b_h}{k+1-h} z^{k+1-h}\}.$$

Rappelons la définition des b_h: en désignant par X la quantité

$$X = \sum_{j=0}^{2k-1} \Gamma^j(\xi)\, \lambda_i^{j+2}\, z^{j-2k},\ \text{on a}\ (1-X)^{1/2} = 1 + \sum_{h\ge 1} b_h z^{-h}.\ \text{Or}$$

$$X^p = p! \sum_{p_o + \dots + p_{2k-1} = p} \frac{(\Gamma^o(\xi)\lambda_i^2 z^{-2k})^{p_o} \dots (\Gamma^{2k-1}(\xi)\lambda_i^{2k+1} z^{-1})^{p_{2k-1}}}{p_o! \dots p_{2k-1}!}$$

soit, en posant $S(p_i) = \sum_{j=o}^{2k-1} j p_j$.

$$X^p = p! \sum_{p_o + \dots + p_{2k-1} = p} \frac{(\Gamma^o(\xi))^{p_o} \dots (\Gamma^{2k-1}(\xi))^{p_{2k-1}} \lambda_i^{2p+S(p_i)} z^{-2kp+S(p_i)}}{p_o! \dots p_{2k-1}!}$$

Comme $(1-X)^{1/2}=1+\frac{1}{2}(-X)+\dots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-p+1)\frac{(-X)^p}{p!}+\dots$ le coefficient b_h vaut, pour $h \geq 1$:

$$b_h=\sum_{p=1}^{h}\ \sum_{\substack{p_0+\dots+p_{2k-1}=p\\ S(p_i)=2kp-h}} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-p+1)(-1)^{p^2 p(k+1)-h}}{p_0!\dots p_{2k-1}!}\ \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{2k-1}(\Gamma^j(\xi))^{p_j}$$

Comme par hypothèse $|\Gamma^j(\xi)| < C_j(1+|\xi|)^{\frac{k-1-j}{k+1}}$, on a

$$\left|\prod_{j=0}^{2k-1}\Gamma^j(\xi))^{p_j}\right| \leq \text{cte}\ (1+|\xi|)^{\frac{(k-1)p-S(p_i)}{k+1}}\ , \text{ et ,}$$

pour p fixé, la deuxième somme écrite dans l'expression de b_h est majorée en module par $\text{cte}\ (1+|\xi|)^{\frac{h}{k+1}-p}$. Donc $|b_h| \leq \text{cte}\ (1+|\xi|)^{\frac{h}{k+1}-1}$.

Calculons tout particulièrement b_{k+1}, qui permet de préciser la valeur de $r_{2k}(\lambda_i)=-\frac{k}{2}-b_{k+1}$. On sait déjà que $|b_{k+1}| < \text{cte}$. Le seul terme $\Gamma^j(\xi)$ qui ne tend pas nécessairement vers zéro lorsque $|\xi|\ +\infty$ est $\Gamma^{k-1}(\xi)$, et donc les termes dans l'expression de b_{k+1} qui ne tendent pas nécessairement vers zéro avec $\frac{1}{\xi}$ sont ceux pour lesquels $p_0=\dots=p_{k-2}=p_k=\dots=p_{2k-1}=0$, $p_{k-1}=p$. Comme alors $S(p_i)=(k-1)p$, la condition $S(p_i)=2kp-(k+1)$ implique $p=1$, et le terme correspondant dans b_{k+1} est $-\frac{1}{2}\Gamma^{k-1}(\xi)\lambda_i^{k+1}$. D'où $b_{k+1}=-\frac{1}{2}\Gamma^{k-1}(\xi)\lambda_i^{k+1}+\dots$, où les points désignent des termes qui tendent vers zéro avec $\frac{1}{\xi}$.

Supposons maintenant $0 \leq x \leq C$:

Pour $|\xi| > M$, les $\Gamma^j(\xi)$ restent dans un borné, donc il existe $N > 0$ tel que si $\mathcal{Y} > N$, on a :

$$y_{\lambda_i}(\mathcal{Y}/_{\lambda_i}) = (\mathcal{Y}/_{\lambda_i})^{r_{2k}(\lambda_i)}(1+p((\mathcal{Y}/_{\lambda_i})^{\frac{1}{2}}))\ \exp.\{\qquad\}\ , \text{ et}$$

$$|p(\mathcal{Y})| < \text{cte}/_{|\mathcal{Y}|}\ .$$

Avec $\mathcal{Y}=x|\xi|^{1/k+1}$, on a

$$\exp.\{\quad\}=\exp.\{-\frac{x^{k+1}|\xi|}{(k+1)\lambda_i^{k+1}}-\sum_{h=1}^{k-2}\frac{b_h(\xi)}{k+1-h}\ \frac{x^{k+1-h}|\xi|^{\frac{k+1-h}{k+1}}}{\lambda\lambda_i^{k+1-h}}\},$$

$$\text{et}\quad |b_h(\xi)|\xi|^{\frac{k+1-h}{k+1}}| \leq \text{cte}(1+|\xi|)^{\frac{h}{k+1}-1+1-\frac{h}{k+1}} = \text{cte}.$$

Comme λ_i^{k+1} est imaginaire pur et $x \leq C$, on a donc

$$|\exp.\{\quad\}| \leq \text{cte}, \text{ et } |y_{\lambda_i}\left(\frac{x|\xi|^{\frac{1}{k+1}}}{\lambda_i}\right)| \leq \text{cte}\ (1+|\xi|)^m \text{ si}$$

$x\,|\xi|^{\frac{1}{k+1}}$ est assez grand, car

$$\operatorname{Re} r_{2k}(\lambda_i) \leq (k+1)\,m \text{ pour } i=1,2\ ,\ \xi = \pm\infty\ .$$

Par ailleurs, si $x\,|\xi|^{\frac{1}{k+1}} \leq \text{cte}$, $|y_{\lambda_i}\left(\frac{x|\xi|^{\frac{1}{k+1}}}{\lambda_i}\right)|$ est bornée, comme fonction continue sur un compact. Cela prouve iv) dans le cas $0 < x < c$.

Considérons maintenant le cas $-c \leq x \leq 0$: l'expression asymptotique de $y_{\lambda_i}(\mathscr{S}/\lambda_i)$, utilisée lorsque $\mathscr{S}$ est grand positif, n'est plus valable lorsque $\mathscr{S}$ est grand négatif.

Notons $\mathcal{V}^3$ et $\mathcal{V}^4$ les solutions de (II.3.b) obtenue comme expliqué en II.1.b. pour les choix $\lambda_3 = -\lambda_1$, $\lambda_4 = -\lambda_2$ de λ. Ces solutions ont, lorsque $\mathscr{S} \to -\infty$, un comportement de même type que $\mathcal{V}^1$ et $\mathcal{V}^2$ lorsque $\mathscr{S} \to +\infty$. De plus, la matrice

$$\begin{pmatrix} v^3(0) & v^4(0) \\ v^{3'}(0) & v^{4'}(0) \end{pmatrix} \text{ tend, lorsque } \varepsilon \to \pm\infty\ ,$$

vers une matrice inversible (grâce à l'analogue pour $\mathcal{V}^3$ et $\mathcal{V}^4$ du point iii) du lemme II.3.b), en sorte qu'on peut exprimer $\mathcal{V}^1$ et $\mathcal{V}^2$ comme des combinaisons linéaires de $\mathcal{V}^3$ et $\mathcal{V}^4$ à coefficients bornés pour $|\xi|$ grand. On en déduit les inégalités lorsque $-c \leq x \leq 0$.

Enfin, en utilisant les estimations asymptotiques (II.1)', on obtient comme précédemment les inégalités voulues pour $\mathcal{V}_{\mathscr{S}}^{i'}$.

c) La question des traces.

En gardant les notations de a) et b), on pose

$$\mathcal{U}_i(t,\xi) = c(t,\xi)\,\mathcal{V}^i(\xi, \varphi(t)|\xi|^{\frac{1}{k+1}}) + \frac{d(t,\xi)}{|\xi|^{k/k+1}}\,\mathcal{V}_{\mathscr{S}}^{i'}(\xi, \varphi(t)|\xi|^{\frac{1}{k+1}}), \text{ pour}$$

$i=1,2$.

LEMME II.3.c. - Il existe $M_0 > 0$ et des symboles $\sigma_1(\xi)$ et $\sigma_2(\xi)$ (d'ordre zéro), $\sigma_3(\xi)$ et $\sigma_4(\xi)$ (d'ordre $\frac{-1}{k+1}$), tous définis pour $|\xi| > M_0$, tels que pour toute fonction $\chi \in C^\infty(R)$, $\chi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \geq M_0+2$, $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq M_0+1$, les fonctions définies par

$$\{N = \chi(\sigma_1\,\mathcal{U}_1 + \sigma_2\,\mathcal{U}_2),\quad M = \chi(\sigma_3\,\mathcal{U}_1 + \sigma_4\,\mathcal{U}_2)$$

satisfont aux conditions de traces

$$\begin{cases} N(0,\xi) = \chi(\xi) \\ N'_t(0,\xi) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} M(0,\xi)=0 \\ M'_t(0,\xi) = \chi(\xi). \end{cases}$$

Preuve : on a

$$\mathcal{U}_i(0,\xi) = c(0,\xi)\mathcal{V}^i(0) + \frac{d(0,\xi)}{|\xi|^{+k/k+1}}\mathcal{V}^{i'}_{\mathcal{G}}(0) \text{ et}$$

$$\mathcal{U}'_{i_t}(0,\xi) = (c'_t(0,\xi) - \Gamma^\circ(\xi)\, d(0,\xi)\,\varphi'(0)|\xi|^{\frac{1-k}{k+1}})\mathcal{V}^i(0) +$$

$$+(c(0,\xi)\,\varphi'(0)|\xi|^{\frac{1}{k+1}} + d'_t(0,\xi)|\xi|^{-k/k+1}\mathcal{V}^{i'}_{\mathcal{G}}(0).$$

La matrice $\mathcal{U}=\begin{pmatrix}\mathcal{U}_1(0) & \mathcal{U}_2(0)\\ \mathcal{U}'_1(0) & \mathcal{U}'_2(0)\end{pmatrix}$ des traces des $\mathcal{U}_i$.

vaut donc $\mathcal{U}=T\mathcal{V}$, où $\mathcal{V}=\begin{pmatrix}\mathcal{V}^1(0) & \mathcal{V}^2(0)\\ \mathcal{V}^{1'}(0) & \mathcal{V}^{2'}(0)\end{pmatrix}$, et

$$T=\begin{pmatrix}\alpha(\xi) & \beta(\xi)\\ \gamma(\xi) & \delta(\xi)\end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha(\xi) = c(0,\xi),$$

$$\beta(\xi) = d(0,\xi)|\xi|^{-k/k+1},\ \gamma(\xi)=c'_t(0,\xi) - \Gamma^\circ(\xi)d(0,\xi)|\xi|^{\frac{-k+1}{k+1}}\varphi'(0).$$

$$\text{et } \delta(\xi) = c(0,\xi)\,\varphi'(0)|\xi|^{\frac{1}{k+1}} + d'(0,\xi)|\xi|^{-\frac{k}{k+1}}.$$

On suppose maintenant que les $c_i(t)$ calculés dans la proposition II.3.a, α), sont choisis en sorte que $c_0(0)=1$, $c_i(0)=0$ pour $i \geq 1$. On a alors $c(0,\xi)=1+R(\xi)$, où $R \in S^{-\infty}$, et $d(0,\xi) \in S^{-\infty}$; de plus $\gamma(\xi) \in S^\circ$, tandis que δ est elliptique d'ordre $1/k+1$
Donc det T est elliptique d'ordre $1/k+1$, et pour $|\xi|$ grand, T est inversible :

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}\tilde\alpha & \tilde\beta\\ \tilde\gamma & \tilde\delta\end{pmatrix}, \text{ avec } \tilde\alpha(\xi) = 1 + \dots,\ \tilde\beta\ \ S^{-\infty},$$

$$\tilde\gamma \in S^{-1/k+1},\ \tilde\delta \text{ elliptique d'ordre } \frac{-1}{k+1}$$

(on utilise ici abondamment la proposition 1.1.8 de Hörmander [7]).
Grâce au point iii) du lemme II.3.b), on sait que la matrice $\mathcal{V}$, dont les éléments sont des symboles d'ordre zéro, tend vers une matrice inversible lorsque $\xi \to \pm\infty$.
Donc det $\mathcal{V}$ est un symbole elliptique d'ordre zéro, et $\mathcal{V}^{-1}$, qui existe pour $|\xi|$ grand, est formée de symboles d'ordre zéro.
On pose donc $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{V}^{-1}\,T^{-1} = \begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_3\\ \sigma_2 & \sigma_4\end{pmatrix}$, pour $|\xi|$ assez grand,

les σ_j ainsi définis satisfaisant clairement la propriété du lemme.

d) Fin de la preuve du théorème II.2. et preuve du théorème 1.3.1. :

Soit $u \in H_s^{compact}$; alors $\hat{u}(\xi)$ est une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $(1+|\xi|^2)^{s/2}u(\xi) \in L_2(\mathbb{R})$. Le point iv) du lemme II.3.b montre alors que

$$N(t,\xi)\hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{s-m}{2}} \quad \text{et } M(t,\xi)\hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{s+\frac{1}{k+1}-m}{2}} \quad \text{sont}$$

des fonctions dans $L_2(\mathbb{R})$. De plus, elles dépendent continuement de t dans I, car les majorations du lemme II.3.b. sont uniformes pour t dans un compact de I.

On raisonne de même pour la dérivée première $\frac{\partial N(t,\xi)}{\partial t}$: cette dernière est bornée, uniformément pour t dans un compact de I, par cte $(1+|\xi|)^{m+1}$, donc on peut dériver dans H_{s-m-1} et ainsi de suite sans difficulté.

Pour M, on fait la même démonstration, en notant toutefois que σ_3 et σ_4 sont d'ordre $\frac{-1}{k+1}$.

Cela prouve que les opérateurs M et N opèrent de $\varepsilon'(R)$ dans $C^\infty(I;\mathcal{S}')$, ainsi que le point ii) du théorème I.3.1. et le point i) du théorème II.2.

Enfin la proposition II.3.a, combinée aux estimations du lemme II.3.b, montre que $\hat{P}N$ et $\hat{P}M$ décroissent plus vite que toute puissance de $\frac{1}{|\xi|}$ lorsque $|\xi|\to+\infty$, de même que toutes leurs dérivées par rapport à t, et cela uniformément pour t dans un compact de I. Donc $P(N\varphi+M\psi)\in C^\infty(I\times\mathbb{R})$, et le lemme II.3.c implique immédiatement que N et M ont les "bonnes" traces ce qui achève les preuves des théorèmes.

4) Preuve du théorème I.3.2. :

Rappelons que l'on a

$$N=\chi(\sigma_1\mathcal{U}_1+\sigma_2\mathcal{U}_2)=\chi\{\sigma_1(c\mathcal{V}^1+d\,|\xi|^{-\frac{k}{k+1}}\mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{1'})+\sigma_2(c\mathcal{V}^2+d\,|\xi|^{-\frac{k}{k+1}}\mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{2'})$$

Pour $t>t_0$, $\exists\,\alpha_0>0$ tel que $\varphi(t)\geq\alpha_0$. La version précisée de la proposition II.1 nous indique alors qu'il existe $A(t_0)>0$ tel que si $|\xi|>A(t_0)$, on a

$$\mathcal{V}^i(\xi,\varphi(t)|\xi|^{\frac{1}{k+1}})=\left(\frac{\varphi(t)|\xi|^{1/k+1}}{\lambda_i}\right)^{r_{2k}(\lambda_i)}\left(1+p\left(\left(\frac{\varphi(t)|\xi|}{\lambda_i}^{\frac{1}{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)\times$$

$$\times\exp.\left\{-\frac{\varphi(t)^{k+1}|\xi|}{(k+1)\lambda_i^{k+1}}-\sum_{h=1}^{k-2}\frac{b_h(\xi)}{k+1-h}\,\frac{\varphi(t)^{k+1-h}}{\lambda_i^{k+1-h}}\,|\xi|^{\frac{k+1-h}{k+1}}\right\},$$

où $p(\vartheta)$ est holomorphe, et $r_{2k}(\lambda_i)=\frac{k}{2}-b_{k+1}(\xi,\lambda_i)$ avec (voir preuve du lemme II.3.b.)

$$\lambda_1^{k+1}=i\ ,\ \lambda_2^{k+1}=-i,\ b_{k+1}(\xi,\lambda_i)=-\frac{1}{2}\Gamma^{k-1}(\xi)\,\lambda_i^{k+1}+\ldots$$

Vues les estimations du lemme II.3.b, la somme $\sum_{h=1}^{k-2}\ldots$ qui apparaît dans l'exponentielle ci-dessus est un symbole d'ordre zéro, de même que $\left(\frac{\varphi(t)}{\lambda_i}\right)^{r_{2k}(\lambda_i,\xi)}$.

La fonction $1+p\left(\left(\frac{\varphi(t)|\xi|^{1/k+1}}{\lambda_i}\right)^{1/2}\right)$ est aussi un symbole d'ordre zéro, car $p(\mathcal{S}) \sim \sum_{N\geq 1} p_N \mathcal{S}^{-N}$.

Ces trois symboles sont elliptiques d'ordre zéro.

Reste $|\xi|^{\frac{r_{2k}(\lambda_i,\xi)}{k+1}} = |\xi|^{-\frac{k}{2(k+1)} + \frac{1}{2}\lambda_i^{k+1}\frac{\Gamma^{k-1}(\xi)}{k+1} + \ldots}$

Comme $\Gamma^{k-1}(\xi) \to \Gamma_{\pm} = \pm i \frac{(a_1(t)/t^{k-1})(0)}{A(0)}$ lorsque $\xi \to \pm\infty$, $|\xi|^{r_{2k/k+1}}$ est un symbole d'ordre $-\frac{k}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+1)}\left|\operatorname{Re}\frac{(a_1(t)/t^{k-1}(0)}{A(0)}\right|$. On a un calcul analogue utilisant l'estimation (II.1)' pour $|\xi|^{-k/k+1}\mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{1'}(\varphi(t)|\xi|^{1/k+1})$, et pour $\mathcal{V}^2$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}^{2'}$ en changeant i en -i, ainsi que pour M.

Les opérateurs régularisants $R_1(t_0)$ et $R_2(t_0)$ sont associés aux fonctions $\chi_1(\xi)\, N(t,\xi)$ et $\chi_2(\xi)\, M(t,\xi)$, les χ_i étant des fonctions C^∞ nulles hors du compact $|\xi| \leq A(t_0)+1$, par exemple, et valant 1 pour $|\xi| \leq A(t_0)$.

Le terme $-\frac{1}{4}$ qui apparaît dans les ordres des opérateurs intégraux cités au théorème I.3.2. provient de la normalisation habituelle (cf. Hörmander[7]).

III - LA CONDITION NÉCESSAIRE $\mu \geq k-1$.

Notons $C_p^\infty(D)$ l'espace des fonctions C^∞ dans le domaine D et "plates" sur t=0 (c'est-à-dire nulles ainsi que toutes leurs dérivées). Rappelons alors la

DÉFINITION (cf.[1]). - Soit D un voisinage de zéro dans le demi-plan $H=\{(x,t),\ t\geq 0\}$. Supposons que

i) Pour toute $f\in C_p^\infty(D)$, il existe un unique $u\in C_p^\infty(D)$, tel que $Pu=f$.

ii) Pour tout voisinage V de 0 dans $\bar{H}$, $V\subset D$ et toute $u\in C_p^\infty(V)$, telle que $Pu=0$, alors $u=0$ dans V.

On dit alors que le problème de Cauchy plat avec unicité est bien posé dans D.

Dans les hypothèses générales I.1 faites sur P, on a la proposition III.1. : Si le problème de Cauchy plat avec unicité est bien posé dans D pour l'opérateur P (au sens de la définition ci-dessus), alors la valuation μ du coefficient $a_1(t)$ (définie en I.1) est supérieure ou égale à k-1.

preuve : Soit K un voisinage compact de 0 dans $\bar{H}$, $K\subset D$. Il existe $q\in\mathbb{N}$ et $C>0$ tels que l'on ait l'inégalité à priori

$$\forall u\in C_p^\infty(K),\quad \sup_{(x,t)\in K}|u(x,t)| \leq C\,\|Pu\|_{K,q} \qquad \text{(III.1)}$$

(On note $\|v\|_{K,q} = \sum_{|\alpha|\leq q}\sup_K |D^\alpha v|$).

.En supposant $\mu < k-1$, on va mettre en défaut (III.1) en choisissant $u(x,t,\tau) = e^{i\tau x}v(t,\tau)$, où v est une solution approchée de l'équation

$$v''+a_0v'+\tau^2(A^2t^{2k}+\frac{ia_1}{\tau}+\frac{b}{\tau^2})\,v=0,$$

τ étant un grand paramètre positif.

De la preuve des points α) et β) de la proposition II.3.a il suit que l'on peut prendre

$$v(t,\tau)=c(t,\tau)\,\mathcal{V}(\tau,\varphi(t)\,\tau^{\frac{1}{k+1}})+\frac{d(t,\tau)}{\tau^{k/k+1}}\,\mathcal{V}'_{\mathcal{J}}(\tau,\varphi(t)\,\tau^{1/k+1}),$$

où $\mathcal{V}$ est une solution de l'équation auxiliaire.

(II.3.b) $\mathcal{V}''(\mathcal{J})+(\mathcal{J}^{2k}+\sum_{j=0}^{2k-1}\Gamma^j(\tau)\,\mathcal{J}^j)\,\mathcal{V}(\mathcal{J})=0$, mais ici l'hypothèse $\mu < k-1$ implique.

pour $j=0,\ \dots,\ \mu-1$, Γ^j d'ordre $\frac{-2-j}{k+1}$

pour $j=\mu,\ \dots,\ 2k-1$, Γ^j d'ordre $\frac{k-1-j}{k+1}$, en particulier

Γ^μ est elliptique d'ordre $\frac{k-1-\mu}{k+1} > 0$.

Par un changement de variable (complexe) convenable on va rendre "dominant" le terme en $\Gamma^\mu(\tau)$, on pose $\sigma=K\tau^{\alpha}\mathcal{J}$, où $\alpha=\frac{(k-1-\mu)-1}{(\mu+3)(k+1)} \geq 0$, K à choisir tel que $K^{\mu+2}=-\gamma_1^\mu$.

La nouvelle équation auxiliaire est alors

$$\text{(III.1)}'\quad W''(\sigma)+(-\tau^{\frac{1}{\mu+3}}\sigma^\mu+\dots)\,W(\sigma)=0,$$

où les points désignent des termes polynomiaux en σ, de degrés $\leq 2k$ faisant intervenir des puissances négatives ou nulles de τ. La substitution $\Theta^2=\tau^{\frac{1}{(\mu+3)(k+1)}}$ $(\Theta > 0)$ fournit une équation où le paramètre n'intervient que par des puissances entières et dont on peut trouver une solution approchée sous la forme

$$W(\sigma)=A(\sigma,\Theta)\,X(\Theta^{\frac{2(k+1)}{\mu+2}}\sigma)+B(\sigma,\Theta)\,\Theta^{-\frac{(k+1)\mu}{\mu+2}}X'(\Theta^{\frac{2(k+1)}{\mu+2}}\sigma)$$

(en procédant comme au point α) de la proposition II.3.a), la fonction X(s) étant une solution de l'équation auxiliaire.

(III.1)" $X''(s)+(-s^\mu+\dots)\,X(s)=0$, où les points désignent des termes contenant des puissances négatives de Θ.

On choisit alors pour X la solution sous dominante de (III.1)" (au sens de la proposition II.1.).

Lorsque $\tau\to+\infty$, $S\to\infty$ dans la direction de K, et le terme dominant du développement de X selon la formule (II.1) est exp. $(-\frac{s^{\frac{\mu+2}{2}}}{\frac{\mu+2}{2}})$, pourvu que $|\arg K|<\frac{3\pi}{\mu+2}$. Notons

$\varphi_0=\arg(-\gamma_1^\mu)$; quitte à changer x en -x (ce qui change a_1 en $-a_1$), on peut toujours supposer que $|\varphi_0| < M$; on prend alors pour K la racine $(\mu+2)^{\text{ième}}$ de $-\gamma_1^\mu$ qui a pour argument $\arg K = \frac{\varphi_0}{\mu+2} + \frac{2\pi}{\mu+2}$. On a bien $|\arg K| < \frac{3\pi}{\mu+2}$, et de plus, ce qui est essentiel dans la preuve, $\mathrm{Re}(-K^{\frac{\mu+2}{2}}) > 0$.

Dans l'expression initiale de la fonction v intervient

$$(\tau, \varphi(t)\, \tau^{1/k+1}), \text{ en sorte qu'ici } \sigma=K\tau^{1/\mu+3}\varphi(t).$$

Choisissons alors $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi \geq 0$, telle que

$$\chi(t) = 0 \text{ si } t \leq 1,\ \chi(t) = 1 \text{ si } t \geq \frac{3}{2}, \text{ et}$$

$\varepsilon_0 > 0$ tel que $A_0(k_\varepsilon)$ et $B_0(K_\varepsilon)$ soient respectivement très proches de 1 et de 0 pour $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ ($A_0(\sigma)$ et $B_0(\sigma)$ sont les "termes principaux" de $A(\sigma,\Theta)$ et $B(\sigma,\Theta)$ lorsque $\Theta \to +\infty$). La fonction $\psi = \chi\left(\frac{2\tau^{1/\mu+3}\varphi(t)}{\varepsilon_0}\right) v(t,\tau)$, considérée dans un petit rectangle R_τ de K défini par

$$R_\tau = \{(x,t),\ x_0 \leq x \leq x_1,\ 0 \leq t \leq \varphi^{-1}\left(\frac{\varepsilon_2}{\tau^{1/\mu+3}}\right)\}$$

croit exponentiellement en τ lorsque $\tau \to +\infty$.

On termine alors la preuve comme dans Lax [11] (voir aussi [1]), en prolongeant hors de R_τ la fonction $\tilde{P}\psi$ en une $P\psi \in C_p^\infty(K)$, dont la norme n'est pas plus grande que $C\|P\psi\|_{R_\tau,q}$ (où C ne dépend pas de τ), puis en choisissant $\tilde{\psi} \in C_p^\infty(K)$ telle que $P\tilde{\psi} = P\tilde{\psi}$. Il est facile de prouver que, lorsque $\tau \to +\infty$, la famille des fonctions $\tilde{\psi}$ contredit l'inégalité (III.1.).

IV - PROPAGATION DES SINGULARITÉS.

1) Géométrie des caractéristiques.

Le symbole principal de l'opérateur P est

$$p(x,t,\xi,\tau) = \tau^2 - A^2(t)t^{2k}\xi^2.$$

.En un point $(x,0,\xi,0)$, l'hamiltonien Hp est nul, et la bicaractéristique nulle issue de ce point est réduite à ce point.

.D'un point caractéristique $(x_0, t_0, \xi_0, \varepsilon\xi_0 t_0^k A(t_0))$ (où $\varepsilon = \pm 1$) est issue une bicaractéristique nulle, qui se projette sur la courbe $x=-\varepsilon\frac{\varphi(t)^{k+1}}{k+1} + \varepsilon\frac{\varphi(t_0)^{k+1}}{k+1} + x_0$ du plan. Lorsque $t \to 0$,

$$x \to x_0 + \varepsilon\frac{\varphi(t_0)^{k+1}}{k+1} = y_0.$$

On dira que l'arc de bicaractéristique envisagé "aboutit" au point $(y_0,0,\xi_0,0)$.

.Pour un point $(y_0,0,\xi_0,0)$ donné, il existe quatre arcs de bicaractéristiques nulles aboutissant à ce point. Ils se projettent sur les courbes intégrales des champs $\frac{\partial}{\partial t} \pm t^k A \frac{\partial}{\partial x}$, issues de $(y_0,0)$.

2) Preuve du théorème 1.3.3.

Comme on l'a déjà noté, dans le cas particulier où les coefficients de P ne dépendent pas de x, le théorème 1.3.2. et le théorème II.2 permettent de prouver aisément la majeure partie du théorème 1.3.3.

Nous donnons ici une preuve indépendante, plus générale :

Désignons par γ_1 et γ_2 les deux arcs de caractéristiques "issus de $(y_0,0)$ dans le demi-plan $t > 0$. On a le

LEMME II.2.1. - S'il existe, sur γ_i (i=1,2), un point hors de supp. sing u, alors u est C^∞ au voisinage de $(y_0,0)$, jusqu'au bord t=0.

Admettons provisoirement ce lemme.

Remarquons que si φ et ψ sont C^∞ au voisinage de y_0, u est C^∞jusqu'au bord t=0, près de y_0; en effet, en prolongeant, par rapport à x, les fonctions φ,ψ et les coefficients de P à R tout entier de façon convenable, puis en résolvant le problème $Pu=0$, $u|_{t=0}=\varphi$, $u'_t|_{t=0}=\psi$ dans une bande fermée $0 \le t \le t_0$ (voir [14]), on obtient une solution u, C^∞ jusqu'au bord t=0, qui, grâce à l'unicité locale, coïncide avec u près de $(y_0,0)$.

On peut en fait "microlocaliser" cet argument de la façon suivante: on va montrer que si Pu=0 et $(y_0,0,\ \xi_0,0) \in WF(u)$, alors $(y_0,\xi_0) \in WF(\varphi)$ ou $WF(\psi)$. On peut toujours supposer u à support compact près de $(y_0,0)$; comme Pu=0, près de $(y_0,0)$, WF(u) est formé de points (x,t,η,τ) avec (x,t) voisin de $(y_0,0)$ et $|\tau/\eta|$ petit. Plus précisément, soient $\varepsilon > 0$ et $\theta > 0$ petit tels que $(x,t) \in B((y_0,0),\varepsilon)$ et $(x,t,\eta,\tau) \in WF(u)$ impliquent $|\tau/\eta| < \theta$. Choisissons alors un opérateur pseudo-différentiel A, de symbole $a(x,t,\xi,\tau)$ tel que $a \equiv 1$ dans un voisinage conique $\mathcal{V}$ de $(y_0,0,\xi_0,0)$ contenant $\bar{B}((y_0,0),\varepsilon) \times \{(\eta,\tau),\ |\tau/\eta| \le \theta,\ \eta$ du signe $\xi_0\}$, tandis que $a \equiv 0$ hors d'un autre voisinage conique W, $W \supset \mathcal{V}$, dans lequel η est du signe de ξ_0.

On a alors $PAu \in C^\infty$ au voisinage de $(y_0,0)$: en effet, $PAu=APu + [P,A]u$; Pu=0 et, au dessus de $B((y_0,0),\varepsilon)$, $WF([P,A]u) \subset WF(u) \cap \complement\mathcal{V} = \emptyset$. Donc les traces $Au|_{t=0}$ ou $(Au)'_t|_{t=0}$ ne peuvent être toutes deux C^∞ près de y_0 (P étant non caractéristique, $Au \in C^\infty(D')$). Supposons par exemple $(y_0,\eta) \in WF(tr(Au))$ (on note $tru = u|_{t=0}$). On en déduit : $\exists \tau$, $(y_0,0,\eta,\tau) \in WF(Au)$, donc $\eta=\xi_0$. Enfin, on a $tr(u) = tr(Au) + tr((1-A)u)$; si $(y_0,\xi_0) \in WF\ tr((1-A)u)$, $\exists\tau$, $(y_0,0,\xi_0,\tau) \in WF(1-A)u)$, ce qui est impossible; donc $(y_0,\xi_0) \in WF(\ tr\ u) = WF(\varphi)$; dans le cas $(y_0,\eta) \in WF(tr\ Au'_t)$ on obtient $(y_0,\xi_0) \in WF(\psi)$.

En utilisant le fait fondamental que, pour $t \neq 0$, l'opérateur P est strictement hyperbolique et donc que les singularités se propagent, on raisonne comme suit :

.Soit $(x,t,\xi,\tau) \in WF(u)$: tous les points de la bicaractéristique nulle issue de ce point sont aussi dans $WF(u)$, et aussi le point limite $(y_0, 0, |\xi|/\xi, 0)$ car $WF(u)$ est fermé. On en déduit que $(y_0$, signe $\xi) \in WF(\varphi)$ ou $WF(\psi)$.
.Inversement, notons $a_+(\xi,\tau)$ et $a_-(\xi,\tau)$ deux fonctions homogènes de degré zéro, de somme 1 sur le cercle unité, a_+ valant 1 dans un voisinage conique de $(1,0)$ (resp.a vaut 1 près de $(-1,0)$). On note A_+(resp.A_-) le pseudo-différentiel de symbole a_+(resp.a_-); et $u_{\pm} = A_{\pm} u$. On a alors $Pu = Pu_+ + Pu_- = 0$, donc Pu_+ est C^∞ au voisinage de $(y_0,0)$. On va raisonner séparément sur u_+ et u_- (de tracés $\varphi_{\pm}$, $\psi_{\pm}$) et montrer que si $(y_0,+1) \in WF(\varphi_+)$ (par exemple), tout un arc de bicaractéristique nulle aboutissant à $(y_0,+1)$ est dans $WF(u_+)$. Cela achèvera la preuve du théorème.

Selon le lemme IV.2.1, l'un des arcs γ_1 ou γ_2, mettons γ_2, appartient entièrement à supp. sing u_+.

Supposons qu'il existe un point $(x,t,-1,\tau)$, $(x,t) \in \gamma_2$, tel que l'arc de bicaractéristique qui le traverse se projette sur γ_2, et $(x,t,-1,\tau) \in WF(u_+)$. Cela impliquerait $(y_0,-1) \in WF(\varphi_+)$ ou $WF(\psi_+)$ ou $WF(\psi_+)$, ce qui est impossible par construction.

Supposons que dans tout voisinage de $(y_0,0)$ il y ait un point $(x,t) \in \gamma_2$ pour lequel, pour un certain τ, $(x,t,-1,\tau) \in WF(u_+)$, l'arc passant par $(x,t,-1,\tau)$ ne se projettant pas sur γ_2. Cela signifierait qu'il y a des points y arbitrairement proches de y_0 et tels que $(y-1) \in WF(\varphi_+)$ ou $WF(\psi_+)$, ce qui est impossible.

Il existe donc un voisinage V de $(y_0,0)$ tel que les singularités de u_+ au-dessus de $\gamma_2 \cap V$ soient uniquement du type $(x,t,+1,\tau)$.

Supposons qu'il existe un point $(x,t,+1,\tau)$, $(x,t) \in \gamma_2 \cap V$, $(x,t,+1,\tau) \in WF(u_+)$ et l'arc passant par $(x,t,+1,\tau)$ se projette sur γ_2. Cela implique qu'il aboutit à $(y_0,0,+1,0)$, ce qui est la conclusion cherchée.

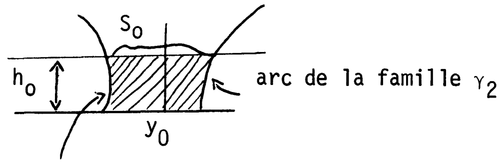
Reste le cas où tous les points $(x,t,+1,\tau) \in WF(y)$, $(x,t) \in \gamma_2 \cap V$, sont traversés par des arcs de bicaractéristique dont aucun ne se projette sur γ_2. Ces arcs sont arbitrairement proches de l'arc qui aboutit à $(y_0,0,1,0)$ et se projette sur γ_1. Donc ce dernier est contenu dans $WF(u_+)$.

.preuve du lemme IV.2.1. Soient $p_1 \in \gamma_1$ $p_2 \in \gamma_2$, $p_i \notin$ supp. sing u. Pour $\eta_0 > 0$ assez petit, les caractéristiques "issues" de $(y,0)$, avec $|y - y_0| \leq \eta_0$, rencontrent l'un des disques $B(p_i,r)$, où $r > 0$ est choisi en sorte que $u \in C^\infty(B(p_i,r))$.

On note $\mathscr{C}_1$(resp.$\mathscr{C}_2$) le "tube" formé par les arcs de caractéristiques de la famille de γ_1 (resp. de γ_2) qui rencontrent $B(p_1, r)$ (resp.$B(p_2,r)$).

Montrons que $u \in C^\infty(\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 \cap \{t > 0\})$: si un point (x,t) du domaine indiqué était dans supp. sing u, l'une des caractéristiques au moins issue de ce point serait entièrement contenue dans supp. sing u, ce qui est incompatible avec les définitions de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Soit alors Δ un domaine de la forme suivante,



arc de la famille γ_1
contenu dans $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \{t > 0\}$.

On pose $u|_{S_0} = \varphi_0$, $u'_t|_{S_0} = \psi_0$, et soient $\tilde{\varphi}_0$, $\tilde{\psi}_0$ des prolongements C^∞ à supports compacts de φ_0 et ψ_0 a tout $\mathbb{R}$, hors de S_0.

.Citons une forme simplifiée d'un résultat d'Oleinik ([14]) que nous allons utiliser :

Soit l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (a^{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + b^i u_{x_i} + b^\circ u_t + cu = f,$$

dans une bande $0 \leq t \leq T$.

On suppose que les a^{ij}, b^i, b° et c sont C^∞, bornés dans la bande ainsi que toutes leurs dérivées, et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\alpha(T-t)(b^i\xi_i)^2 \leq A\, a^{ij}\xi_i\xi_j - a^{ij}_t\, \xi_i\xi_j + (\alpha(T-t))^{-1}\, a^{ij}\, \xi_i\xi_j$$

pour A = cte et $0 \leq t \leq T$.

Alors, pour toutes φ, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_0^\infty(\{0 \leq t \leq T\})$, il existe un unique u, C^∞ dans la bande fermée. Solution de l'équation donnée avec $u|_{t=0} = \varphi$, $u'_t|_{t=0} = \psi$.

.Plaçons nous dans la bande $0 \leq t \leq h_0$, et modifions, hors d'un domaine contenant Δ, les coefficients de P en sorte qu'ils vérifient les hypothèses du théorème cité, et que, de plus $A(x,t) \geq$ cte > 0, $|a_1(x,t)| \leq$ cte t^{k-1}.

Montrons alors que ce théorème peut être appliqué à P avec $t=h_0$ comme surface initiale. Posons $s=h_0-t$, $T=h$. L'inégalité à établir est $\exists\alpha > 0$ tel que

$$\alpha(h_0-s)(a_1(x,h_0-s)+2(h_0-s)^{2k}AA'_x)^2 < \text{cte } A^2(h_0-s)^{2k} + \frac{A^2(h_0-s)^{2k}}{\alpha(h_0-s)} +$$

$$2AA'_t(h_0-S)^{2k} + 2k\, A^2(h_0-s)^{2k-1}.$$

En divisant les deux membres par $(h_0-s)^{2k-1}$, il apparaît à droite $\frac{1}{\alpha} A^2(x,h_0-s)$ et des quantités bornées, et à gauche

$$\alpha\left(\frac{a_1(h_0-s)}{(h_0-s)^{k-1}} + 2\, AA'_x(h_0-s)^{k+1}\right)^2,$$ ce qui montre qu'on peut choisir $\alpha > 0$ de façon à assurer l'inégalité dans toute la bande.

. Soit donc u la fonction $C^\infty(\{0 \leq t \leq h_0\})$, solution $Pu=0$ avec $\tilde{u}|_{s=0} = \tilde{\varphi}_0$, $\tilde{u}'_s|_{s=0} = -\tilde{\psi}_0$.

On va montrer que u prolonge u hors de Δ dans $\{0 \leq t \leq h_0\}$. Prenons $\varepsilon > 0$, $\varepsilon > h_0$: les caractéristiques issues d'un point (x,ε) appartenant à Δ déterminent, avec le segment qu'elles découpent sur $t=h_0$, un "triangle". Les fonctions u et $\tilde{u}$ sont toutes deux C^∞ dans ce triangle, vérifient $Pu=P\tilde{u}=0$, et possèdent les mêmes traces sur la "base" du triangle (portée par $t=h_0$). On sait alors qu'elles sont égales dans tout le triangle. En faisant varier convenablement ε et x, on voit que tout point de Δ peut-être inclus dans un tel triangle, d'où le résultat.

3) Remarque sur la forme de la paramétrix.

Il est aisé, par une procédure analogue à celle de Hörmander ([7], prop.1.2.2), de définir les intégrales

$$\int e^{i(x-y,\xi)}\ \mathcal{V}^i(\xi,\varphi(t)|\xi|^{1/k+1})\ S(x,y,t,\xi)\ d\xi$$

qui apparaissent dans les paramétrixes N et M (voir théorème II.2) comme "intégrales oscillantes". Il est même possible d'établir, par un calcul direct utilisant l'équation auxiliaire à laquelle satisfait $\mathcal{V}$, que les noyaux définis par ces intégrales oscillantes sont C^∞ en dehors de l'ensemble

$$C=\{(x,t,y),\ x-y=\pm\frac{\varphi(t)^{k+1}}{k+1}\},$$ et plus généralement sont régularisant si S est plat sur C.

Ce faisant, on est amené, à faire jouer à l'expression $e^{i(x-y,\xi)}\mathcal{V}(\xi,\varphi(t)|\xi|^{1/k+1})$ le rôle de l'exponentielle dans la théorie classique des opérateurs intégraux de Fourier, tandis que S joue le rôle du symbole. En fait, le théorème 1.3.2 montrer que cette analogie est fragile, car une partie très significative du "symbole" se "cache" dans la fonction $\mathcal{V}$, et elle ne peut être séparée qu'en dehors d'une "couche" $|t| \leq$ cte $|\xi|^{-1/k+1}$; en particulier, ile ne semble pas possible de définir pour ces intégrales oscillantes une notion de "symbole principal" parallèle à celle que l'on connaît pour les intégrales de Fourier.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] Alinhac S. - Problèmes de Cauchy pour des opérateurs singuliers. Bulletin de la S.M.F., 102,1974.

[2] Baouendi M.S. et Goulaouic C. - Cauchy problêms with caracteristic initial hypersuface. Comm. on Pure and Applied Math.

[3] Berezin J.S. - On Cauchy's problem for linear equ. of the second order with initial cond. on a parabolic line. Mat. Sb. vol. 24, 1949.

[4] Bers L. - Mathematical aspects of Subsouic and transonic Gas Dynamics, John Wiley and Sons, New-York, 1958.

[5] Bitsadze A.V. - Equations of mixte type - Akad. Naud SSSR, 1959.

[6] Gellerstedt S. - Sur une équation linéaire aux dérivées partielles de type mixte, Arkiv. Mat. Astr. Fysik. Vol. 25A, 1937, n°29.

[7] Hörmander L. - Fourier integral operators I, Acta Mathematica, 127, 1971.

[8] Hsieh P.A. et Sibuya Y. - On the asympotic integration of second order linear ordinary differential equations with polynomial coefficients, J.Math.Anal.Appl. vol. 16, 1966.

[9] Ivry V. - Dokladi Akad. Naud. SSSR vol. 197, 1971.

[10] Ivry V. et Pietkov V. - Uspehi Mat. Nauk. 29,5,(1974.

[11] Lax P.D. - Duke Math. J. 24 n° 4, 1957.

[12] Lynn R.Y.S. et Keller J.B. - Comm. on Pure and Applied Math. 23, 1970.

[13] Nersesian A.B. - On the Cauchy Problem for degenerating hyperbolic second order equations, Dokladi Akad. Nauk. SSSR, vol. 166, n°6, 1966.

[14] Oléinik O.A. - Cauchy Problem for weakly hyperbolic equations, Comm. on Pure and Appl. Math., 23, n°4, 1970.

[15] Protter M.H. - The Cauchy problem for hyperbolic second order equation with data onthe parabolic line. Canadian J. of Math. vol. 6, 1954.

[16] Sibuya Y. - Subdominant solutions of the differential equation
$y - \lambda^2(x - a_1) - (x - a_m)\ y = 0.$
Acta Math. vol. 119, 1967.

[17] Tricomi F. - Sulle equazioni lineari allederivate partiali di 2è ordine di tipo misto, Att. Accad. Naz. Luicie vol. 14, 1923.

Serge ALINHAC
Mathématiques - Bâtiment 425
Université Paris XI
91405 ORSAY