JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PHAM THE LAI

Théorie spectrale d'une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques

Journées Équations aux dérivées partielles (1976), p. 1-59
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1976____A13_0>

THEORIE SPECTRALE
D'UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS HYPOELLIPTIQUES

Pham The Lai
Institut de Mathématiques et d'Informatique
Université de Nantes
B. P. 1044 - 44037 Nantes Cedex - France

§ 1. - INTRODUCTION

Nous considérons dans ce travail un operateur différentiel $a(x,D)$ d'ordre m défini sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^n$, dont les coefficients sont réguliers. Nous supposons que $a(x,D)$ appartient à une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques qui sont décrits au § 2 à l'aide d'une paire de fonctions poids introduite par R. Beals et C. Fefferman (3).

Nous supposons ainsi que $a(x,D)$ est formellement auto-adjoint et que, par normalisation, $\mathrm{Re}\, a(x,\xi) \to +\infty$ lorsque $|\xi| \to +\infty$ pour tout $x \in \Omega$.

Considérons une réalisation auto-adjointe A de $a(x,D)$ dans $L_2(\Omega)$ (semi-bornée ou non) et soit $A = \int t \, dE(t)$ sa résolution spectrale.

Nous montrons que, pour $t \in \mathbb{R}$, la projection orthogonale $E(t)$

a un noyau $e_t(x,y)$ qui est $\mathcal{C}^\infty(\Omega \times \Omega)$; ce noyau est la fonction spectrale ; nous décrivons pour simplifier sa restriction à la diagonale :

lorsque $t \to -\infty$, nous montrons que $e_t(x,x)$ est à décroissance rapide uniformément sur chaque compact de Ω,

lorsque $t \to +\infty$, nous la comparons avec la fonction :

$$e_{o,t}(x,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathrm{Re}\ a(x,\xi)\leq t} d\xi \tag{1.1}$$

qui sera le terme principal, le reste étant précisé à l'aide d'un réel $\delta > 0$ qui, en pratique, est déterminé par la donnée de $a(x,D)$ (δ est défini au § 2 par (2.8)).

Le résultat, lorsque $t \to +\infty$, est le suivant, valable pour tout $x \in \Omega$:

$$e_t(x,x) = (1 + t^{-\theta\delta}O(1))e_{o,t}(x,x) \qquad t \to \infty \tag{1.2}$$

pour tout $0 \leq \theta < 1/2$.

(1.1) est obtenu par la méthode de S. Agmon et Y. Kannai, qui consiste à étudier un développement asymptotique du noyau de la résolvante de A en dehors d'une région parabolique et en déduire (1.2) par une formule taubérienne de A. Pleijel.

Nous obtenons donc aussi dans ce travail un développement asymptotique concernant la résolvante. Il redonne, avec les mêmes précisions, les développements des cas connus elliptiques (cf. (1), (4), (12)) ou semi-elliptiques (cf. (7)).

Signalons que N. Nilsson dans (11) a obtenu (1.2), avec seulement un reste logarithmique, dans le cas où $a(x,D)$ est formellement hypoelliptique. Bien entendu, dans le cas elliptique, on sait que L. Hörmander (cf. (6)) a donné la meilleure estimation avec $\theta = 1$, δ étant égale à $1/m$ dans le cas elliptique.

Par nos méthodes, il n'est pas difficile de voir que (1.1) est valable pour $0 \leq \theta < 1$, si l'on suppose en plus que $\operatorname{Re} a(x,\xi)$ a des coefficients constants.

Le plan de ce travail est le suivant :

Au § 2, nous donnons une description de la classe d'opérateurs que nous considérons. Nous y donnons divers exemples permettant d'illustrer (1.2).

Au § 3, nous rassemblons les lemmes techniques concernant les majorations d'une paramétrix approchée de $A - \lambda$.

Au § 4, nous donnons le développement asymptotique du noyau de la résolvante $(A - \lambda)^{-1}$, lorsque λ parcourt hors d'une région parabolique.

Au § 5, nous donnons les résultats concernant la fonction spectrale. Le résultat (1.2) est le corollaire 5.4 de ce paragraphe.

Il y a deux appendices. L'appendice A sert à prouver un résultat de régularité locale d'une classe d'opérateurs (pseudo) différentiels à laquelle $a(x,D)$ appartient. L'appendice B rappelle un résultat de N. Nilsson concernant la fonction définie par (1.1) et prouve quelques résultats techniques d'une intégrale de Stieljès liée à la résolvante.

Nous remercions le "referee" de la communication du travail de

A. Tsutsumi (14) ; cet auteur étudie le noyau de la résolvante et la fonction spectrale d'une classe d'opérateur différentiel hypoelliptique proche de la classe (ρ,δ) de L. Hörmander et donne seulement un encadrement de la fonction spectrale.

§ 2. - UNE CLASSE D'OPERATEUR DIFFERENTIEL HYPOELLIPTIQUE

Nous considérons un opérateur différentiel d'ordre m, $a(x,D) = \Sigma\, a_\alpha(x) D^\alpha$ (*), défini sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^n$, dont les coefficients sont $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, bornés, ainsi que toutes les dérivées. Rappelons que, suivant L. Hörmander, $a(x,D)$ est dit hypoelliptique si

$$\text{supp sing } a(x,D)u = \text{supp sing } u \qquad u \in \mathcal{D}'(\Omega) .$$

Dans le cas d'un opérateur $P(D)$ à coefficients constants d'ordre m, on sait que l'hypoellipticité de $P(D)$ entraîne l'existence d'un réel δ vérifiant $0 < \delta \leq 1/m$ et une constante $C > 0$ tels que :

$$|D^\alpha P(\xi)| \leq C(|P(\xi)| + 1)^{1-\delta|\alpha|} \tag{2.1}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, α multi-indice.

Dans le travail (11) de N. Nilsson, cet auteur considère un opérateur $a(x,D)$ tel qu'il existe un polynôme $P(\xi)$ hypoelliptique de même force, au sens de L. Hörmander, que le polynôme en

(*) *Avec la notation usuelle*

$$D^\alpha = (-i\frac{\partial}{\partial X_1})^{\alpha_1} \ldots (-i\frac{\partial}{\partial X_n})^{\alpha_n} \quad \textit{pour} \quad \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

ξ , $a(x,\xi)$, pour tout $x \in \Omega$. Un tel opérateur est dit formellement hypoelliptique et de type P . On sait qu'il est hypoelliptique.

Nous considérons ici le cas où $a(x,D)$ n'est par nécessairement formellement hypoelliptique ; cela permet de traiter des opérateurs qui possèdent des types de dégénérescence forte (par exemple, voir l'exemple 4 de ce paragraphe).

Dans (2), R. Beals a prouvé l'hypoellipticité d'une classe d'opérateur pseudo-différentiel vérifiant des conditions de domination (analogues à celles de (2.1)) exprimées à l'aide d'une paire de fonctions poids ϕ , φ , introduites dans (3) par R. Beals et C. Fefferman.

Rappelons ici les hypothèses concernant ϕ , φ . Deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\phi(x,\xi)$, $\varphi(x,\xi)$, sont dites une paire de fonctions poids s'il existe des constantes $0 \leq \varepsilon < 1$, $0 < \mu \leq 1$, des constantes génériques c, C telles que :

(i) $c \leq \phi(x,\xi) \leq C\langle\xi\rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$; $c\langle\xi\rangle^{-\varepsilon} \leq \varphi(x,\xi) \leq C$

(ii) $c\langle\xi\rangle^{\mu} \leq \phi(x,\xi)\, \varphi(x,\xi)$

(iii) $\phi(x,\xi)/\varphi(x,\xi) \approx (y,\xi)/\varphi(y,\xi)$ lorsque $\langle\xi\rangle \approx \langle\eta\rangle$
(où $A \approx B$ signifie que $c \leq A/B \leq C$).

(iv) $\phi(x,\xi) \approx \phi(y,\eta)$ et $\varphi(x,\xi) \approx \varphi(y,\xi)$ lorsque
$|y - x| \leq c\,\varphi(x,\xi)$ et $|\eta - \xi| \leq C\phi(x,\xi)$.

A l'aide de ϕ, φ , nous faisons les hypothèses suivantes sur le symbole $a(x,\xi)$ de $a(x,D)$:

(I) Il existe $m' > 0$ tel que, pour tout compact $\sigma \subset \Omega$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$C\langle\xi\rangle^{m'} \leq |\mathrm{Re}\, a(x,\xi)|$$

pour $x \in \sigma$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq C$.

(II) Pour tout compact $\sigma \subset \Omega$, tout α, β multi-indice, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)| \leq C|\mathrm{Re}\, a(x,\xi)|\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|}$$

pour $x \in \sigma$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq C$.

Un tel opérateur est hypoelliptique d'après R. Beals.

Pour simplifier l'énoncé, nous dirons qu'*une propriété* $\mathcal{P}(x,\xi)$ *est vraie génériquement* si pour tout compact $\sigma \subset \Omega$, il existe $C > 0$ telle que $\mathcal{P}(x,\xi)$ soit vérifiée pour $x \in \sigma$, $|\xi| \geq C$. Si l'énoncé fait intervenir des constantes, ces constantes dépendent de σ.

REMARQUE. - Comme les résultats qui vont intéresser sont de caractère local, il est évidemment possible de considérer une paire de fonctions poids ϕ, φ, continues sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ et satisfaisant les hypothèses (i), (iv) génériquement. Mais une réduction classique (cf. (2)) du local au global montre que l'on peut se ramener à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Notons $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire dans $L_2(\Omega)$:

$$<u,v> = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx \ .$$

Nous ferons, dans toute la suite, l'hypothèse que $a(x,D)$ est formellement auto-adjoint, c'est-à-dire :

$$<a(.,D)u.v> = <u, a(.,D)v>$$

pour $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$ (*) .

On peut alors écrire :

$$a(x,D) = a_o(x,D) + a_1(x,D)$$

où le symbole de $a_o(x,D)$ est $a_o(x,\xi) = \mathrm{Re}\ a(x,\xi)$ et le symbole de $a_1(x,D)$ est :

(2.2) $$a_1(x,\xi) = i \ \mathrm{Im}\ a(x,\xi) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\neq o} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{a(x,\xi)} \ .$$

Alors, (2.2) et les hypothèses (i), (II) prouvent que l'on a, génériquement :

(2.3) $$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta} |a_o(x,\xi)| \phi^{-|\alpha|-1} \varphi^{-|\beta|-1} \ .$$

Alors (2.3) et les mêmes hypothèses prouvent que l'on a, génériquement :

(2.4) $$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_o(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta} |a_o(x,\xi)| \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|} \ .$$

En vertu de (2.3), (2.4) ; de l'hypothèse (I) et de la connexité de Ω , alors, ou bien $a_o(x,\xi)$ a pour limite $+\infty$, ou bien

(*) *$\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace de L. Schwartz des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact.*

$a_o(x,\xi)$ a pour limite $-\infty$, lorsque $|\xi| \to \infty$ pour tout $x \in \Omega$.

On peut donc supposer que, pour tout $x \in \Omega$:

(2.5) $$\lim_{|\xi|\to+\infty} a_o(x,\xi) = +\infty .$$

Quitte à remplacer A par $A + \text{cte}$, on peut supposer aussi que :

(2.6) $$1 \leq a_o(x,\xi)$$

pour $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

On trouvera à l'appendice A le résultat de régularité local suivant concernant $a(x,D)$: pour toute fonction $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

(2.7) $$|\eta u|_{m'} \leq C(|a(x,D)u|_o + |u|_o)$$

pour tout $u \in L_2(\Omega)$ tel que $a(x,D)u \in L_2(\Omega)$ (où m' est le réel > 0 donné par l'hypothèse (I).

Dans (2.7), $|\ |_s$, pour s réel, désigne la norme de l'espace de Sobolev usuel $H_s(\mathbb{R}^n)$.

REMARQUE. - Le résultat (2.6) est bien connu lorsque le symbole $a(x,\xi)$ appartient à la classe $S^{\rho,\delta}$ de L. Hörmander (cf. (<u>5</u>)).

Dans l'introduction nous avons fait intervenir dans l'énoncé du principal résultat un réel positif δ. Il est défini comme la meilleure constante > 0 telle que :

(2.8) $$a_o(x,\xi)^{\delta} \leq C\phi(x,\xi)\,\varphi(x,\xi)$$

pour tout $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

L'hypothèse (ii) et le fait que $a(x,D)$ est un opérateur différentiel d'ordre m prouvent que δ vérifie :

$$\frac{\mu}{m} \leq \delta \leq \frac{1}{m} . \tag{2.9}$$

Pour illustrer le résultat (1.2), nous donnons différents exemples suivants :

EXEMPLES. - 1) Si $a(x,D)$ est elliptique d'ordre m , on a $\delta = \frac{1}{m}$ et le résultat annoncé est bien connu (cf. (1), (4), (12)). En fait, d'après (6), on a le résultat optimal avec $\theta = 1$, sur la diagonale $x = y$.

2) Dans (7), Y. Kannai a étudié des opérateurs semi-elliptiques (où quasi-elliptiques). A cause de la non-invariance des définitions par changement de variable, nous nous restreignons ici à rappeler la définition dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$.

A la place de l'entier m , donnons un multi-indice d'entiers positifs $m = (m_1,\dots,m_n)$ et pour un multi-indice α , notons :

$$|\alpha : m| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k/m_k .$$

Soit $a(x,D) = \sum_{|\alpha:m|\leq 1} a_\alpha(x)D^\alpha$. Alors la partie semi-principale de $a(x,D)$ est, par définition, l'opérateur $a'(x,D) = \sum_{|\alpha:m|=1} a_\alpha(x)D^\alpha$. On dit alors que $a(x,D)$ est semi-elliptique dans Ω si $a'(x,\xi) \neq 0$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n - 0$, pour tout $x \in \Omega$.

Alors, nous avons les résultats (2.10) et (2.11) avec

(2.10) $$\delta = \inf_k \frac{1}{m_k} .$$

En fait, si nous posons :

(2.11) $$\phi(x,\xi) = (1 + \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^{2m_k})^{\delta/2} \quad ; \quad \varphi(x,\xi) = 1$$

il est facile de voir que l'hypothèse (I) est vérifiée pour $m' = \inf_k m_k$ et l'hypothèse (II) est vérifiée pour la paire de fonctions poids (2.11).

Comme

$$|a(x,\xi)| \leq C(1 + \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^{2m_k})^{1/2} ,$$

(2.8) est réalisée avec δ donné par (2.11). On a donc le résultat (1.2).

Si nous supposons de plus que $a_o(x,D) - a'(x,D)$ ne contient pas de termes de dérivation D^α pour

$$1 - \delta < |\alpha : m| < 1$$

alors, dans (1.1), on peut remplacer $e_{o,t}(x,x)$ par :

$$e'_{o,t}(x,x) = (2\pi)^{-n} \int_{a'(x,\xi)\leq t} d\xi ,$$

nous retrouvons le résultat principal de Y. Kannai.

3) Si $a(x,D)$ est formellement hypoelliptique et de type P , on peut choisir δ égal à la meilleure constante donnant (2.1) et vérifier les hypothèses (I) (II) avec la paire de fonctions poids :

$$\phi(x,\xi) = (|P(\xi)| + 1)^{\delta} \quad ; \quad \varphi(x,\xi) = 1 .$$

Alors le résultat (1.2) améliore le résultat de N. Nilsson.

En fait, N. Nilsson donne seulement l'estimation logarithmique du reste :

$$e_t(x,x) = [1 + (\mathrm{Log}\ t)^{-1}O(1)]e_{o,t}(x,x) \qquad t \to +\infty.$$

4) Un exemple d'opérateur $a(x,D)$ qui est hypoelliptique sans être formellement hypoelliptique est le suivant :

$$a(x,D) = |x|^{2k}P(D) + Q(D)$$

où k est entier > 0 et P, Q deux polynômes hypoelliptiques de même signe.

C'est le type classique d'un opérateur non formellement hypoelliptique : en effet, en tout point $x \neq 0$, $a(x,D)$ est de même force que P et à l'origine, l'opérateur dégénère et a la force Q.

Supposons pour simplifier que P et Q sont positifs.

Comme P et Q sont hypoelliptiques, il existe $r > 0$, $s > 0$ et $m' > 0$ tels que :

$$(2.13) \qquad \begin{gathered} |\partial_\xi^\alpha P| \leq C(P(\xi) + 1)^{-r|\alpha|} \\ |\partial_\xi^\alpha Q| \leq C(Q(\xi) + 1)^{-s} \; ; \\ c\langle\xi\rangle^{m'} \leq Q(\xi) \end{gathered}$$

$|\xi|$ assez grand.

En utilisant l'inégalité, valable pour $0 \leq \theta \leq 1$:

$$|x|^{2k(1-\theta)} \leq a(x,\xi)P(\xi)^{-1}(P(\xi)/Q(\xi))^{\theta}$$

(qui découle immédiatement de $|x|^{2k}P(\xi) \leq a(x,\xi)$ et $Q(\xi) \leq a(x,\xi)$) il est aisé de montrer, d'après (2.12) et (2.13), que l'on a :

$$(2.14) \qquad |\partial_{\xi}^{\alpha}D_{x}^{\beta}a(x,\xi)| \leq Ca(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}\langle\xi\rangle^{\rho'|\beta|}$$

avec :

$$\rho = \inf (r,s) \quad ; \quad \rho' = \frac{\mu}{2k} .$$

Si nous supposons que :

$$\rho - \rho' > 0$$

(2.14) montre qu'avec la paire de fonctions poids

$$\phi(x,\xi) = \langle\xi\rangle^{\rho} \quad ; \quad \varphi(x,\xi) = \langle\xi\rangle^{-\rho'}$$

nous vérifions les hypothèses (I) et (II).

Comme (2.8) est réalisée avec $\delta = \frac{\rho - \rho'}{m}$, on a le résultat (1.2) avec cette valeur de δ .

§ 3. - LEMMES CONCERNANT UNE PARAMETRIX APPROCHEE DE $A - \lambda$

Nous faisons dans toute la suite les hypothèses du § 1 concernant $a(x,D)$. Nous allons construire une approximation d'une paramétrix à droite de $A - \lambda$.

Pour $\lambda \notin \mathbb{R}_+$, notons :

$$a_\lambda(x,\xi) = a_o(x,\xi) - \lambda.$$

Suivant le schéma classique de L. Hörmander (cf. (5)), nous construisons une suite de symboles $b_{o,\lambda}(x,\xi)$, $b_{1,\lambda},\dots, b_{j,\lambda},\dots$ en résolvant par récurrence, génériquement, les équations :

$$(3.1) \qquad a_\lambda b_{o,\lambda} = 1$$

$$(3.2) \quad b_{j,\lambda} = -b_{o,\lambda}\Big(\sum_{\substack{|\alpha|+\ell=j\\ o\le\ell<j}} \frac{1}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha a_o D^\alpha b_{\ell,\lambda} + \sum_{\substack{|\alpha|+\ell=j-1\\ o\le\ell<j}} \frac{1}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha a_1 D_x^\alpha b_{\ell,\lambda}\Big).$$

LEMME 3.1. - *On a génériquement, pour tous multi-indices* α, β *et tout* $j \ge 0$:

$$(3.3) \quad |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta b_{j,\lambda}| \le C|b_{o,\lambda}|\Big(\sum_{k=1}^{2j+|\alpha|+|\beta|} |b_{o,\lambda}a_o|^k\Big)(\phi\,\varphi)^{-j}\phi^{-|\alpha|}\,\varphi^{-|\beta|}$$

pour tout $\lambda \notin \mathbb{R}_+$.

Preuve : Pour $j = 0$, il est aisé de voir que l'on a :

$$(3.4) \quad \partial_\xi^\alpha D_x^\beta b_{o,\lambda} = \sum C^{\alpha^1\dots\alpha^k}_{\beta^1\dots\beta^k}\, b_{o,\lambda}(\partial_\xi^{\alpha^1} D_x^{\beta^1} a_o)b_{o,\lambda}\dots(\partial_\xi^{\alpha^k} D^{\beta^k} a_o)b_{o,\lambda}$$

où la sommation est prise pour :

$$(3.5) \quad 1 \le k \le |\alpha| + |\beta| \;;\; \alpha^1 + \dots + \alpha^k = \alpha \;;\; \beta^1 + \dots + \beta^k = \beta.$$

En utilisant (2.4) et (3.4), nous obtenons (3.3) pour $j = 0$.

Ensuite (2.3), (3.2) et (3.3) pour $j = 0$ donnent

$$|b_{1,\lambda}| \leq C|b_{o,\lambda}| (\sum_1^2 |b_{o,\lambda} a_o|^k)(\phi\,\varphi)^{-1} .$$

En dérivant (3.2), une récurrence sur $|\alpha| + |\beta|$ prouve que (3.3) est vrai pour $j = 1$. De la même manière, pour une récurrence sur j on démontre le lemme.

REMARQUE. - Le résultat (3.3) est vrai, que $a(x,D)$ soit différentiel ou pseudo-différentiel.

En utilisant le fait que $a(x,D)$ est différentiel d'ordre m , on peut préciser (3.3) par la suivante :

(3.3)' $$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta b_{j,\lambda}| \leq C|b_{o,\lambda}| \left(\sum_{k=\left[\frac{j+|\alpha|}{m}\right]+1}^{2j+|\alpha|+|\beta|} |b_{o,\lambda} a_o|^k \right) (\phi\,\varphi)^{-j} \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|} .$$

Dans (3.3)', nous avons noté $[x]$ le plus grand entier $< x$ lorsque x est > 0 et la convention $[0] = 0$.

Cette amélioration est importante pour la suite.

Montrons que (3.3)' est vraie pour $j = 0$.

Utilisons (3.4) avec la sommation (3.5).

Comme a_o est différentiel d'ordre m , les longueurs $|\alpha^i| > m$ dans la sommation (3.5) donnent des dérivées en ξ nulles ; par conséquent

(3.6) $$\left[\frac{|\alpha|}{m}\right] < k \leq |\alpha| + |\beta|$$

car si $k \leq \left[\frac{|\alpha|}{m}\right]$, on aurait

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha^i| \leq m \left[\frac{|\alpha|}{m}\right] < |\alpha|$$

ce qui est contraire à la deuxième égalité de (3.5).

Alors (3.6) donne (3.3)' pour $j = 0$.

Commençons à prouver (3.3)' pour quel que soit j dans le cas $|\alpha| = |\beta| = 0$.

Dans ce cas, si $j \leq m$, d'après (3.3) il n'y a rien à prouver.

Considérons le cas $j > m$.

Comme a_o et a_1 sont respectivement différentiels d'ordre m et d'ordre $m - 1$, on voit que les sommations dans (3.2) donnant $b_{j,\lambda}$ s'écrivent :

(3.2)' $b_{j,\lambda}$

$$= - b_{o,\lambda} \left(\sum_{\substack{|\alpha|+\ell=j \\ j-m\leq\ell<j}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_o D_x^\alpha b_{\ell,\lambda} + \sum_{\substack{|\alpha|+\ell=j-1 \\ j-m\leq\ell<j}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_1 D_x^\alpha b_{\ell,\lambda} \right).$$

Alors (3.3)' est vraie, dans le cas $|\alpha| = |\beta| = 0$, pour $j = m + 1$; il suffit d'utiliser (3.2)', (2.3), (2.4) et (3.3).

On va montrer que (3.3)' est vraie, dans le cas $|\alpha| = |\beta| = 0$, pour $m < j \leq 2m$ par récurrence. Supposons donc que (3.3)' est vraie pour $j - 1$ et prouvons qu'elle est vraie pour j .

Pour ℓ tel que $j - m \leq \ell < j$ et α tel que $|\alpha| = j - \ell$, on a :

$$|\partial_\xi^\alpha a_o D_x^\alpha b_{\ell,\lambda}| \leq |b_{o,\lambda} a_o| \sum_{k=1}^{2j} |b_{o,\lambda} a|^k (\phi\,\varphi)^{-j} .$$

Une majoration similaire a lieu pour le terme $\frac{1}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha a_1 D_x^\alpha b_{\ell,\lambda}$ pour $j - m \leq \ell < j$ et $|\alpha| = j - \ell - 1$. Donc (3.3)' est vraie, dans le cas $|\alpha| = |\beta| = 0$, pour j en utilisant (3.2)'.

Par conséquent (3.3)' est vraie, dans le cas $|\alpha| = |\beta| = 0$, pour $m < j \leq 2m$.

On procède ensuite par récurrence sur h lorsque $hm < j \leq (h + 1)m$ pour montrer que (3.3)' est vraie, dans le cas $|\alpha| = |\beta| = 0$, pour tout j .

Il suffit ensuite de raisonner par récurrence sur $|\alpha| + |\beta|$ par un raisonnement analogue à celui fait dans le cas $j = 0$.

On a donc achevé de prouver (3.3)' .

Pour chaque $j \geq 0$, notons $b_{j,\lambda}(x,D)$ l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $b_{j,\lambda}(x,\xi)$:

(3.7) $\quad b_{j,\lambda}(x,D)u(x) = \int b_{j,\lambda}(x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{i<x,\xi>}d\tilde{\dot{\xi}} \qquad u \in \mathcal{D}(\Omega)$

où nous avons noté $d\dot{\xi} = (2\pi)^{-n/2}d\xi$, $<x,\xi> = \sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i$ et :

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-i<\xi,x>}u(x)d\dot{x} .$$

Il est aisé de vérifier, grâce à (3.3), que $b_{j,\lambda}(x,D)$ est continu de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ et peut être prolongé en un opérateur continu de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{E}'(\Omega)$. Comme dans (6), on voit que le noyau distribution $b_{j,\lambda}(x,y)$ de $b_{j,\lambda}(x,D)$ est une fonction C^∞ en dehors de la diagonale de $\Omega \times \Omega$.

De plus, en utilisant (3.3), l'hypothèse (I), la propriété (2.8) et le théorème de Fubini, il est aisé de voir que $b_{j,\lambda}(x,y)$

est de classe $\mathcal{C}^k(\Omega \times \Omega)$ si $m'(1 + j\delta) > n + k$. En particulier $b_{j,\lambda}(x,y)$ est continu sur $\Omega \times \Omega$ pour tout $j \geq 0$ si $m' > n$.

Dans ce cas, le noyau est donné par la formule :

(3.8) $$b_{j,\lambda}(x,y) = (2\pi)^{-n} \int b_{j,\lambda}(x,\xi) e^{-i<x-y,\xi>} d\xi \ .$$

Pour chaque $x \in \Omega$ fixé, l'opérateur différentiel à coefficients constants $a_{o,x}(D)$ obtenu à partir de $a_o(.,D)$, les coefficients pris au point x , a un symbole $a_{o,x}(\xi) = a_o(x,\xi)$ qui vérifie :

$$|\partial_\xi^\alpha a_{o,x}(\xi)| \leq C_\alpha a_{o,x}(\xi) \phi(x,\xi)^{-|\alpha|} \ .$$

Cela est évident en vertu de (2.4).

Comme $c<\xi>^\mu \leq \phi(x,\xi)$ en vertu des hypothèses (i) (ii), nous en déduisons que, pour $\alpha \neq 0$:

$$\partial_\xi^\alpha a_{o,x}(\xi) \ / \ a_{o,x}(\xi) \to 0 \qquad \text{lorsque} \quad |\xi| \to +\infty \ .$$

Donc $a_{o,x}(D)$ est hypoelliptique, d'après L. Hörmander (voir par exemple : L. Hörmander, *Linear partial differential operator*, Springer Verlag (1963) p. 99.

Suite à l'introduction, considérons $e_{o,t}(x,x)$:

(3.9) $$e_{o,t}(x,x) = (2\pi)^{-n} \int_{a_o(x,\xi) \leq t} d\xi \ .$$

Comme fonction de t , elle est monotone croissante. D'après (2.5), elle est nulle pour $t < 1$.

Comme $a_{o,x}(D)$ est hypoelliptique, nous avons, d'après la proposition de l'appendice 1, qu'il existe des constantes $A(x)$, $r(x) > 0$ et un entier $p(x) \geq 0$ tels que :

$$e_{o,t}(x,x) \sim A(x) t^{r(x)} (\mathrm{Log}\ t)^{p(x)} \qquad t \to +\infty .$$

l'hypothèse (I) et le fait que $a(x,D)$ est différentiel d'ordre m montrent facilement que nous avons :

$$\frac{n}{m} \leq r(x) \leq \frac{n}{m'} . \tag{3.10}$$

Dans toute la suite, pour deux fonctions $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ d'un paramètre λ vérifiant $f(\lambda) = O[g(\lambda)]$ lorsque $|\lambda| \to +\infty$, nous utiliserons la notations suivante par commodité :

$$f(\lambda) = g(\lambda) O[1] \qquad |\lambda| \to +\infty .$$

LEMME 3.2. - *Supposons* $m' > n$.

Pour tout $j \geq 0$, *le noyau* $b_j(x,y)$ *de* $b_{j,\lambda}(x,D)$ *est continu sur* $\Omega \times \mathbb{R}^n$.

Nous avons :

$$b_j(x,y) = A(x) \left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2j+1} |\lambda|^{-1+r(x)-j\delta} (\mathrm{Log}\ |\lambda|)^{p(x)} O(1) \qquad \begin{array}{l} |\lambda| \to +\infty \\ \lambda \notin \mathbb{R}_+ \end{array} \tag{3.11}$$

uniformément lorsque (x,y) *parcourt* $\sigma \times \mathbb{R}^n$, σ *compact de* Ω.

Nous avons noté dans (3.10)

$$d(\lambda) = \mathrm{dist}\ (\lambda, \mathbb{R}_+) .$$

Preuve : Comme $a_o(x,\xi) > 0$, nous avons, d'après un calcul facile :

$$|a_o(x,\xi) - \lambda| \geq d(\lambda)$$

$$|a_o(x,\xi) - \lambda| \geq \frac{d(\lambda)}{|\lambda|} a_o(x,\xi)$$

pour $\lambda \notin \mathbb{R}_+$.

D'où :

$$(3.12) \qquad |b_{o,\lambda}(x,\xi)| \leq \frac{1}{2} \frac{|\lambda|}{d(\lambda)} \frac{1}{a_o(x,\xi) + |\lambda|} .$$

Donc, en utilisant (2.8) et (3.12), on a, pour tout k et j entiers > 0 :

$$(3.13) \qquad |b_{o,\lambda}a_o|^k(\phi\,\varphi)^{-j} \leq C\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^k \frac{a_o^{k-j\delta}}{a_o + |\lambda|)^k}$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Pour $\left[\frac{j}{m}\right] + 1 \leq k$, on a évidemment :

$$(3.14) \qquad \frac{j}{m} \leq \left[\frac{j}{m}\right] + 1 \leq k .$$

En vertu de (2.9)(3.14) on a donc :

$$(3.15) \qquad 0 \leq k - j\delta \leq k .$$

On peut donc utiliser l'inégalité classique $x^{1-\alpha}y^\alpha \leq x + y$ (valable pour $x,y \geq 0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$) pour obtenir de (3.3)', et (3.15) la majoration qui a lieu génériquement :

$$(3.16) \qquad |b_{j,\lambda}(x,\xi)| \leq C\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2j+1} \frac{|\lambda|^{-j\delta}}{a_o(x,\xi) + |\lambda|}$$

pour $\lambda \notin \mathbb{R}_+$.

Comme $m' > n$, on a d'après (3.8) :

$$|b_{j,\lambda}(x,y)| \leq (2\pi)^{-n} \int |b_{j,\lambda}(x,\xi)|d\xi \ . \tag{3.17}$$

Alors (3.16), (3.17) et la proposition B.2 de l'appendice B donnent (3.11) car il est clair que l'on peut écrire, en utilisant la définition (3.9) :

$$\int \frac{d\xi}{a_o(x,\xi) + |\lambda|} = \int_o^\infty \frac{de_{o,t}(x,x)}{t + |\lambda|} \ .$$

REMARQUE. - Lorsque m' n'est pas nécessairement $> n$, on a encore (3.11) pour j tel que $m'(1 + j\delta) > n$.

En effet, on voit facilement que l'on a :

$$|b_{j,\lambda}(x,y)| \leq C\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2j+1} \int_o^\infty \frac{t^{\frac{j}{m}+1-j\delta}}{(t + |\lambda|)^{\left[\frac{j}{m}\right]+2}} de_{o,t}(x,x) \ .$$

Comme :

$$j\delta > \frac{n}{m'} - 1 \ .$$

On peut alors utiliser la proposition B.2 de l'appendice B pour obtenir (3.11) dans ce cas.

Nous avons besoin de la précision supplémentaire sur (3.11) lorsque $\mathrm{Re}\,\lambda \to +\infty$. Notons $c(x) = \sup\,(1,p(x))$.

LEMME 3.3. - *Supposons* $m' > n$.

Pour tout $j \geq 0$, *nous avons* :

(3.11)' $b_{j,\lambda}(x,y) =$

$$c(x)\Lambda(x)\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2j}|\lambda|^{-j\delta}(\mathrm{Re}\ \lambda)^{-1+r(x)}(\mathrm{Log}\ \mathrm{Re}\ \lambda)^{p(x)}\mathrm{Log}\ \frac{\mathrm{Re}\ \lambda}{d(\lambda)}\ 0(1)$$

$|\lambda| \to \infty$, $\lambda \notin \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Re}\ \lambda > 1$, *uniformément sur* $\sigma \times \mathbb{R}^n$, σ *compact de* Ω .

Preuve : Au lieu de (3.16), nous avons aussi, génériquement :

$$|b_{j,\lambda}(x,\xi)| < C\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2j}\frac{|\lambda|^{-j\delta}}{|a\ (x,\xi) - \lambda|}$$

Donc :

$$|b_{j,\lambda}(x,y)| \leq C\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2j}|\lambda|^{-j\delta}\int_0^\infty \frac{de_{o,x}(x,x)}{|t - \lambda|} .$$

Il suffit alors d'utiliser la proposition B.3 de l'appendice B et (3.10) pour conclure.

En dehors de la diagonale, nous allons voir que $b_{j,\lambda}(x,y)$ décroit rapidement par rapport à $|\lambda|$ pourvu que λ soit en dehors d'une région parabolique. Pour $0 \leq \theta$, notons la région :

$$\mathcal{R}_\theta = \{\lambda \in C ,\ \lambda \notin \mathbb{R}_+ \ ;\ \frac{|\lambda|}{d(\lambda)} \leq c(1 + |\lambda|)^{\theta\delta}\} .$$

Alors dans la région $\mathcal{R}_{1/2}$, nous avons le :

LEMME 3.4. - *Soit* η_1, η_2 *deux fonctions de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *à supports disjoints. Alors, pour tout* $j \geq 0$, *tout multi-indice* β , *l'opérateur* $\eta_1 D^\beta . b_{j,\lambda}(x,D)\eta_2$ *a pour noyau*
$c_\lambda(x,y) = \eta_1(x)D_x^\beta b_{j,\lambda}(x,y)\eta_2(y)$, *qui est donc* $\mathcal{C}^\infty(\Omega \times \Omega)$.

Pour tout $p > 0$, *nous avons :*

$$(3.18) \qquad c_\lambda(x,y) = |\lambda|^{-p} O(1) \qquad |\lambda| \to +\infty , \quad \lambda \in \mathcal{R}_{1/2} .$$

uniformément sur $\Omega \times \Omega$.

Preuve : Nous prouvons (3.18), le reste étant évident.

Commençons par le cas $\beta = 0$.

Pour un multi-indice α , nous avons :

$$\partial_\xi^\alpha e^{i<x-y,\xi>} = (x - y)^\alpha e^{i<x-y,\xi>} \quad .$$

Si l'on prend α tel que :

$$(3.19) \qquad m'(1 + j\delta + |\alpha|\delta) > n$$

il est aisé de voir que l'on a :

$$(x - y)^\alpha b_{j,\lambda}(x,y) = (2\pi)^{-n} \int (- \partial_\xi)^\alpha b_{j,\lambda}(x,\xi) . e^{i<x-y,\xi>} d\xi$$

le second membre étant intégrable.

Nous obtenons, en utilisant (3.3)' :

$$|(x - y)^\alpha b_{j,\lambda}(x,y)|$$

$$\leq C \left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2j+|\alpha|+1} \int_0^\infty \frac{t^{\left[\frac{j+|\alpha|}{m}\right]+1-j\delta-|\alpha|\delta}}{(t + |\lambda|)^{\left[\frac{j+|\alpha|}{m}\right]+2}} de_{o,t}(x,x)$$

(3.19) prouve que :

$$(3.20) \qquad \frac{n}{m'} - 1 < \delta(j + |\delta|) \leq \left[\frac{j + |\alpha|}{m}\right] + 1 .$$

L'hypothèse (I) prouve qu'il existe pour tout compact $\sigma \subset \Omega$ une constante C_σ telle que :

$$e_{o,x}(t) \leq C_\sigma t^{n/m'} \tag{3.21}$$

pour tout $x \in \sigma$, $t > 0$.

De plus, il existe $d > 0$ telle que $|x - y| \geq d$ pour $x \in \operatorname{supp} \eta_1$ et $\eta \in \operatorname{supp} \eta_2$. Nous déduisons de (3.20, (3.21) et de la remarque 1 qui suit la proposition B.2 de l'appendice B pour obtenir :

$$c_\lambda(x,y) = d^{-|\alpha|}\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2j+|\alpha|+1}|\lambda|^{-1-(j+|\alpha|)\delta}|\lambda|^{n/m'}O(1)$$

$|\lambda| \to +\infty$, $\lambda \notin \mathbb{R}_+$, $O(1)$ étant uniforme sur $\Omega \times \Omega$.

Nous avons donc :

$$c_\lambda(x,y) = d^{-|\alpha|}|\lambda|^{-|\alpha|\frac{\delta}{2}}|\lambda|^{-1+\frac{n}{m'}+\frac{\delta}{2}}O(1) \qquad |\lambda| \to +\infty, \quad \lambda \in \mathcal{R}_{1/2}$$

ce qui donne (3.18) en prenant $|\alpha|$ suffisamment grand.

Si $\beta \neq 0$, nous prenons α tel que :

$$m'(1 + j\delta + |\alpha|\delta) - |\beta| > n .$$

On voit alors aisément que $(x - y)^\alpha D_y^\beta b_{j,\lambda}(x,y)$ est une somme finie de termes de type :

$$g_\lambda(x,y) = \int (-\partial_\xi)^\alpha D_x^\gamma b_{j,\lambda}(x,\xi).\xi^{\gamma'} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} d\xi$$

avec $\gamma + \gamma' = \beta$, le second membre étant intégrable.

Utilisant de nouveau (3.3)' et les hypothèses ϕ , φ , nous obtenons :

$$|g_\lambda(x,y)|$$

$$\leq C\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2j+|\alpha|+|\beta|+1}\int_0^\infty \frac{t^{\left[\frac{j+|\alpha|}{m}\right]+1-j\delta-|\alpha|\delta+\frac{\varepsilon|\gamma|}{m'}+\frac{|\gamma'|}{m'}}}{(t+|\lambda|)^{\left[\frac{j+|\alpha|}{m}\right]+2}}\, de_{o,x}(x,x)$$

(avec $0 \leq \varepsilon < 1$ donnée par l'hypothèse (i) concernant φ).

En vérifiant que :

$$\frac{n}{m'} - 1 + \frac{\varepsilon|\lambda| + |\gamma'|}{m'} < \delta(j+|\alpha|) \leq \left[\frac{j+|\alpha|}{m}\right] + 1$$

nous terminons comme auparavant.

Pour $N > 0$, notons :

$$(3.22)\qquad \begin{aligned} \mathcal{P}_{N,\lambda}(x,D) &= \sum_{j=o}^{N-1} b_{j,\lambda}(x,D) \\ \delta_{N,\lambda}(x,D) &= (a(x,D)-\lambda)\mathcal{P}_{N,\lambda}(x,D) - Id . \end{aligned}$$

D'après les formules (3.1) et (3.2) nous voyons facilement que le symbole de $\delta_{N,\lambda}(x,D)$ est donné par :

$$(3.23)\qquad \delta_{N,\lambda}(x,\xi) = \sum_{\substack{j+|\alpha|\geq N \\ j<N}} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_o D_x^\alpha b_{j,\lambda} + \sum_{\substack{j+|\alpha|\geq N-1 \\ j<N}} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_1 D_x^\alpha b_{j,\lambda} .$$

Dans le premier terme du second membre de (3.23), puisque $a_o(x,\xi)$ est un polynôme de degré $\leq m$ en ξ , la sommation a lieu pour

$$j + |\alpha| \geq N \quad ; \quad (N - m)_+ \leq j \leq N - 1 .$$

Nous avons noté $(x)_+$ la partie positive de x .

Donc en utilisant (2.4) et (3.3)', ce terme est majoré génériquement par :

$$C|b_{o,\lambda}a_o| \left(\sum_{k=\left[\frac{(N-m)_+}{m}\right]+1}^{2N+m-2} |b_{o,\lambda}a_o|^k \right) (\phi\, \varphi)^{-N} .$$

Dans le second terme du second membre de (3.20), puisque $a(x,\xi)$ est un polynôme de degré $m - 1$ en ξ , la sommation à lieu pour

$$j + |\alpha| \geq N - 1 \quad ; \quad (N - m)_+ \leq j \leq N - 1 .$$

Donc, en utilisant (2.3) et (3.3)', ce terme est majoré génériquement par la même expression que précédemment. Nous avons donc, génériquement :

$$(3.24) \qquad |\delta_{N,\lambda}(x,\xi) \leq C \left(\sum_{k=\left[\frac{(N-m)_+}{m}\right]+2}^{2N+m-1} |b_{o,\lambda}a_o|^k \right) (\phi\, \varphi)^{-N}$$

pour $\lambda \notin \mathbb{R}_+$.

Nous avons le :

LEMME 3.5. - *Pour* $N > \frac{n}{m'\delta}$, *le noyau* $\check{\delta}_{N,\lambda}(x,y)$ *de* $\delta_{N,\lambda}(x,D)$ *est continu sur* $\Omega \times \mathbb{R}_+$.

Nous avons, pour ε *vérifiant* $0 < \varepsilon \leq Nm'\delta - n$

$$\delta_{N,\lambda}(x,y) = \left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2N+m-1} |\lambda|^{-N\delta+\frac{n+\varepsilon}{m'}} O(1) \qquad |\lambda| \to \infty\ ,\ \ \lambda \in \mathbb{R}_+ \ .$$

$O(1)$ *est uniforme en* $x, y \in \sigma \times \mathbb{R}^n$, σ *compact de* Ω .

Preuve : Puisque $N > \frac{n}{m'\delta}$, (3.24) prouve que :

$$\delta_{N,\lambda}(x,y) = (2\pi)^{-n} \int \delta_{N,\lambda}(x,\xi) e^{i<x-y,\xi>} d\xi$$

le second membre étant intégrable.

Nous avons, génériquement, d'après (3.24) :

$$|\delta_{N,\lambda}(x,\xi)| \le C\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2N+m-1} \frac{a_o^{\left[\frac{(N-m)_+}{m}\right]+2-N\delta+\frac{n+\varepsilon}{m'}}}{(a_o + |\lambda|)^{\left[\frac{(N-m)_+}{m}\right]+2}} a_o^{-\frac{n+\varepsilon}{m'}} \ .$$

Comme

$$\delta N \le \frac{N}{m} \le \left[\frac{(N - m)_+}{m}\right] + 2$$

et $0 < \varepsilon \le Nm'\delta - n$, nous pouvons utiliser l'inégalité $x^{1-\alpha}y^{\alpha} \le x + y$ pour obtenir, génériquement :

$$|\delta_{N,\lambda}(x,\xi)| \le C\left(\frac{|\lambda|}{d(\lambda)}\right)^{2N+m-1} |\lambda|^{-N\delta+\frac{n+\varepsilon}{m'}} a_o(x,\xi)^{-\frac{n+\varepsilon}{m'}} \ .$$

L'hypothèse (I) prouve que

$$a_o^{-\frac{n+\varepsilon}{m'}}$$

est intégrable, d'où le lemme.

§ 4. - DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOYAU DE LA RESOLVANTE

Considérons maintenant une réalisation auto-adjointe A de $a(x,D)$ dans $L^2(\Omega)$. C'est par définition un opérateur auto-adjoint tel que $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(A)$, le domaine de A , et vérifiant $Au = a(x,D)u$ au sens des distributions pour tout $u \in D(A)$.

Soit un compact $\sigma \subset \Omega$ et considérons deux fonctions τ , η de $\mathcal{D}(\Omega)$, telles que $\eta = 1$ sur σ et $\tau\eta = \eta$.

Pour $N > 0$, considérons pour $\lambda \notin \mathbb{R}_+$ l'opérateur pseudo-différentiel :

$$Q_{N,\lambda}(x,D) = \tau \mathcal{P}_{N,\lambda}(x,D)\eta \ .$$

En vertu de (3.3) et de la définition (3.22) de $\mathcal{P}_{N,\lambda}$, il est clair que le symbole de $\mathcal{P}_{N,\lambda}(x,D)$ vérifie génériquement :

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \mathcal{P}_{N,\lambda}(x,\xi)| \leq C_\lambda \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|} \ .$$

D'après R. Beals (cf. (2)), $\mathcal{P}_{N,\lambda}(x,D)$ opère de $L_2^{loc}(\Omega)$ dans $L_2^{loc}(\Omega)$, par conséquent $Q_{N,\lambda}(x,D)$ opère continuement de $L_2(\Omega)$ dans $L_2(\Omega)$. Notons $Q_{N,\lambda}$ ce prolongement dans $L_2(\Omega)$.

Considérons aussi l'opérateur pseudo-différentiel, pour $\lambda \notin \mathbb{R}_+$:

$$(4.1) \qquad \Delta_{N,\lambda}(x,D) = (a(x,D) - \lambda)Q_{N,\lambda}(x,D) - \eta \ .$$

Il est clair que $\Delta_{N,\lambda}(x,D)$ envoie $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

LEMME 4.1. - *Pour* $N > \frac{n}{m'\delta}$, *le noyau* $\Delta_{N,\lambda}(x,y)$ *de* $\Delta_{N,\lambda}(x,D)$ *est continu sur* $\Omega \times \Omega$.

Pour $0 \leq \theta < 1/2$, *il existe* $q > 0$ *indépendant* N *tel que :*

$$(4.2) \qquad \Delta_{N,\lambda}(x,y) = |\lambda|^{-N\delta(1-2\theta)+q}O(1) \qquad |\lambda| \to +\infty \ , \ \lambda \in \mathcal{R}_\theta$$

uniformément sur $\Omega \times \Omega$.

Preuve : $\Delta_{N,\lambda}(x,D)$ s'écrit :

$$\Delta_{N,\lambda}(x,D) = \tau(a(x,D) - \lambda)\mathcal{P}_{N,\lambda}(x,D)\eta + [a(x,D),\tau]\mathcal{P}_{N,\lambda}(x,D)\eta - \eta \ .$$

Nous avons noté le commutateur :

$$[a(x,D),\tau] = a(x,D)\tau - \tau a(x,D) \ .$$

Utilisons (3.22), nous obtenons :

$$(4.3) \qquad \Delta_{N,\lambda}(x,D) = \tau\delta_{N,\lambda}(x,D)\eta + [a(x,D),\tau]\mathcal{P}_{N,\lambda}(x,D)\eta \ .$$

D'après le lemme 3.4, le noyau $\Delta^1_{N,\lambda}(x,y)$ de $[a(x,D),\tau]\mathcal{P}_{N,\lambda}(x,D)\eta$ est $\mathcal{C}^\infty(\Omega \times \Omega)$ et est majoré par $|\lambda|^{-p}$ pour tout $p > 0$, pourvu que $\lambda \in \mathcal{R}_{1/2}$, $|\lambda|$ assez grand.

D'après le lemme 3.5, puisque $N > \frac{n}{m'\delta}$, le noyau $\Delta^2_{N,\lambda}(x,y)$ de $\tau\delta_{N,\lambda}(x,D)\eta$ est continu sur $\Omega \times \Omega$ et est majoré :

$$C|\lambda|^{-N\delta(1-2\theta)+q}$$

lorsque $\lambda \in \mathcal{R}_\theta$, $|\lambda|$ assez grand, q étant un réel > 0 indépendant de N (on peut prendre par exemple $q = h + (m-1)\theta\delta$ avec h le plus entier strictement plus grand que $\frac{n}{m'\delta}$). On obtient ainsi le lemme.

Dans les conditions du lemme précédent, on a donc :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\Delta_{N,\lambda}(x,y)|\,dy \le C|\lambda|^{-N\delta(1-2\theta)+q} \\ &\int_\Omega |\Delta_{N,\lambda}(x,y)|\,dx \le C|\lambda|^{-N\delta(1-2\theta)+q} \end{aligned} \tag{4.4}$$

les intégrales dans (4.4) ont lieu sur les compacts de Ω car τ et η ont des supports compacts, car d'après (4.3), le support de $\Delta_{N,\lambda}(x,y)$ vérifie :

$$\operatorname{supp}_{x,y} \Delta_{N,\lambda}(x,y) \subset [\operatorname{supp}_y \tau(x)] \times [\operatorname{supp}_y \eta(y)] . \tag{4.5}$$

Un résultat classique de continuité dans $L_2(\Omega)$ prouve, d'après (4.4), que $\Delta_{N,\lambda}(x,D)$ est prolongeable en un opérateur continu dans $L_2(\Omega)$, noté $\Delta_{N,\lambda}$.

On va maintenant montrer que pour $u \in L_2(\Omega)$, $Q_{N,\lambda}u \in \mathcal{D}(A)$ et l'on a :

$$\Delta_{N,\lambda}u = (A - \lambda)Q_{N,\lambda}u - \eta u \qquad u \in L_2(\Omega) . \tag{4.6}$$

En effet, si $u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ converge vers u dans $L_2(\Omega)$, $\Delta_{N,\lambda}u$, $Q_{N,\lambda}u_n$ et ηu_n convergent dans $L_2(\Omega)$. Donc $(A - \lambda)Q_{N,\lambda}u_n$ converge aussi dans $L_2(\Omega)$ en vertu de (4.1). Comme A est fermé, $Q_{N,\lambda}u \in \mathcal{D}(A)$ et on a (4.6).

De (4.6), on en déduit, A étant auto-adjointe :

$$Q_{N,\lambda} - (A - \lambda)^{-1} = (A - \lambda)^{-1}\Delta_{N,\lambda} \tag{4.7}$$

pour tout $\lambda \notin \mathbb{R}$.

Voici le résultat principal de ce paragraphe.

THEOREME 4.2. - *Supposons* $m' > n$. *Pour* $\lambda \notin \mathbb{R}$, *la résolvante*

$R_\lambda = (A - \lambda)^{-1}$ *est un opérateur intégral avec un noyau* $R_\lambda(x,y)$ *continu sur* $\Omega \times \Omega$:

$$R_\lambda u(x) = \int_\Omega R_\lambda(x,y)u(y)dy \qquad u \in L_2(\Omega) .$$

$R_\lambda(x,y)$ *a un développement asymptotique hors d'une région parabolique :*

$$R_\lambda(x,y) \sim \sum_{j=o}^{\infty} b_{j,\lambda}(x,y)$$

dans le sens suivant :

Pour $\varepsilon > 0$, *il existe* $q > 0$, *tel que pour tout* $N \geq \frac{1}{\delta}$:

(4.8) $\quad R_\lambda(x,y) = \sum_{j=o}^{N-1} b_{j,\lambda}(x,y) + |\lambda|^{-N\varepsilon+q}O(1) \qquad |\lambda| \to \infty$

λ *vérifiant*

$$|\mathrm{Im}\ \lambda| \geq |\lambda|^{1 - \frac{\delta-\varepsilon}{2}}$$

uniformément lorsque $x, y \in \sigma \times \sigma$, σ *compact* $\subset \Omega$.

Dans (4.8), *les* $b_{j,\lambda}(x,y)$ *vérifient :*

(4.9) $\quad b_{j,\lambda}(x,y) = A(x)|\lambda|^{1+r(x)-j\varepsilon}(\mathrm{Log}\ |\lambda|)^{p(x)}O(1) \qquad |\lambda| \to +\infty.$

$O(1)$ *est uniforme sur* $\sigma \times \mathbb{R}$, λ *vérifiant*

$$|\mathrm{Im}\ \lambda| \geq |\lambda|^{1 - \frac{\delta-\varepsilon}{2}}$$

De plus :

$$b_{o,\lambda}(x,x) = (2\pi)^{-n} \int \frac{d\xi}{a_o(x,\xi) - \lambda}$$

et :

(4.10) $\quad b_{o,\lambda}(x,y) =$

$$c(x)A(x)(\mathrm{Re}\ \lambda)^{-1+r(x)}(\mathrm{Log\ Re}\ \lambda)^{p(x)}\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{Re}\ \lambda}{d(\lambda)}\,O(1) \qquad |\lambda| \to \infty \quad .$$

λ *vérifiant* $\mathrm{Re}\ \lambda > 1$ *et* $\lambda \notin \mathbb{R}_+$, *uniformément sur* $\sigma \times \mathbb{R}^n$, σ *compact de* Ω .

Rappelons que $c(x) = \sup\ (1,p(x))$.

Preuve : R_λ est un opérateur continu dans $L_2(\Omega)$ et l'image de R_λ est dans $H^{loc}_{m'}(\Omega)$ en vertu de (2.6). L'adjoint hilbertien R^*_λ est $R_{\bar\lambda}$, donc l'image de R^*_λ est aussi dans $H^{loc}_{m'}(\Omega)$.

Alors la conclusion sur le noyau de R_λ est une conséquence de l'hypothèse $m' > n$ et d'un résultat bien connu de S. Agmon et Y. Kannai (cf. (1)).

Il reste à prouver (4.8) et (4.9).

Soit σ un compact de Ω . Considérons alors deux fonctions $\tau, \eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant $\tau\eta = \eta$ et $\eta = 1$ sur un voisinage de σ . Avec ces données, nous avons (4.6). Comme $m' > n$ et $N \geq \frac{1}{j}$, les noyaux de $Q_{N,\lambda}$ et $\Delta_{N,\lambda}$ sont aussi continus sur $\Omega \times \Omega$ d'après les lemmes 3.2 et 4.1.

Comme $Q_{N,\lambda}(x,D) = \tau\mathcal{R}_{N,\lambda}(x,D)\eta$, nous obtenons de (4.7) :

(4.11)
$$\eta(x)B_{N,\lambda}(x,y)\eta(y) - \eta(x)R_\lambda(x,y)\eta(y) = \eta(x)\int_\Omega R_\lambda(x,z)\Delta_{N,\lambda}(z,y)\,dz$$

pour tout $x, y \in \Omega \times \Omega$, $\lambda \notin \mathbb{R}$.

Dans (4.11), nous avons noté :

$$B_{N,\lambda}(x,y) = \sum_{j=o}^{N-1} b_{j,\lambda}(x,y) .$$

L'intégrale du second membre de (4.10) est convergente à cause de (4.5).

Soit d'autre part $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\zeta\tau = \tau$, ζ égale à 1 sur σ. Alors, d'après (2.7), il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\zeta u|_{m'} \leq C(|Au|_o + |u|_o) \qquad u \in \mathcal{D}(A) .$$

Il vient :

$$|\zeta u|_{m'} \leq C(|(A-\lambda)u|_{o,\Omega} + |\lambda||u|_o) \qquad u \in \mathcal{D}(A) .$$

En remplaçant dans l'inégalité précédente $u = R_\lambda f$, $f \in L_2(\Omega)$, nous obtenons

$$(4.12) \qquad |\zeta R_\lambda f|_{m'} \leq C \frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\ \lambda|} |f|_{o,\Omega} \qquad f \in L_2(\Omega) .$$

Nous avons utilisé le fait bien connu que puisque A est auto-adjoint :

$$|R_\lambda f|_o \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\ \lambda|} |f|_{o,\Omega} \quad f \in L_2(\Omega) .$$

Utilisant l'inégalité de Sobolev, puisque $m' > n$:

$$\sup_{x\in\sigma} |u(x)| \leq |\zeta u|_{m'}$$

nous obtenons de (4.12) avec f la fonction f_y, $y \in \sigma$:

$$f_y : z \to \Delta_{N,\lambda}(z,y)$$

la majoration :

$$\sup_{x\in\sigma} \left| \int_\Omega R_\lambda(x,z)\Delta_{N,\lambda}(z,y)dy\right| \leq |\zeta R_\lambda f_y|_{m'} \leq C \frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|} |f_y|_o .$$

Comme :

$$|f_y|_o^2 \leq \int_\Omega |\Delta_{N,\lambda}(z,y)|^2 dz$$

nous utilisons encore le lemme 4.1 pour obtenir finalement :

$$\text{(4.13)} \qquad \sup_{x,y\in\sigma\times\sigma} \left| \int_\Omega R_\lambda(x,z)\Delta_{N,\lambda}(z,y)dy\right| \leq C|\lambda|^{-N\varepsilon+q+\frac{\delta}{2}}$$

pour λ tel que

$$|\mathrm{Im}\,\lambda| \geq |\lambda|^{1-\frac{\delta}{2}+\varepsilon} ,$$

$|\lambda|$ assez grand.

Alors (4.11) et (4.13) donnent (4.8).

(4.9) est immédiat en vertu du lemme 3.2 et (4.10) résulte du lemme 3.3.

Nous avons achevé la preuve du théorème 4.2.

REMARQUE. - 1) Lorsque $a_o(x,D)$ est à coefficients constants, il est possible d'améliorer le théorème 4.2. En fait, la conclusion de ce théorème est vraie lorsque λ varie dans la région $|\mathrm{Im}\,\lambda| \geq |\lambda|^{1-\delta+\varepsilon}$. Cela provient essentiellement de l'amélioration suivante dans (3.3)' : on peut, dans (3.3)', améliorer les bornes de la sommation :

$$1 + \left[\frac{j + |\alpha|}{m}\right] \leq k \leq j + |\alpha| + |\beta|$$

au lieu de la sommation

$$1 + \left[\frac{j + |\alpha|}{m}\right] \leq k \leq 2j + |\alpha| + |\beta| .$$

2) Lorsque $a(x,D)$ est elliptique, on peut remplacer $a_o(x,\xi)$ par $a'(x,\xi)$ le symbole principal de $a(x,\xi)$ et on a dans ce cas $\delta = \frac{1}{m}$, $m' = m$, $r(x) = \frac{n}{m}$ et $p(x) = 0$.

Alors le résultat du théorème 4.2 dans le cas diagonal $x = y$ est bien connu (cf. (1), (4), (12)).

Les estimations de (4.10), en dehors d'un région parabolique, semblent être nouvelles même dans ce cas elliptique. Dans G. Eskin (4), on trouve des estimations plus fiables, le terme $\operatorname{Log}\left(\frac{\operatorname{Re}\lambda}{d(\lambda)}\right)$ étant remplacé par $\left(\frac{\operatorname{Re}\lambda}{d(\lambda)}\right)^{\alpha}$, $\alpha > 0$ arbitraire.

3) Lorsque $a(x,D)$ est semi-elliptique, dans la situation décrite au § 2, exemple 2, on a vu que $\delta = \inf_k \frac{1}{m_k}$, $m' = \inf_k m_k$.

Il est possible de voir que l'on a :

$$r(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m_k} , \quad p(x) = 0 .$$

Si nous supposons que $a_o(x,D) - a'(x,D)$ ne contient pas de termes de dérivation D^α pour $1 - \delta < |\alpha : m| < 1$, nous pouvons encore remplacer $a_o(x,\xi)$ par $a'(x,\xi)$ et (4.8), dans le cas diagonal $x = y$, redonne les résultats de Y. Kannai (7) concernant le noyau de la résolvante.

4) Le théorème 4.2 est nouveau même dans le cas formel-

lement hypoelliptique traité par N. Nilsson (11).

Pour la classe d'opérateurs traitée par A. Tsutsumi (14), le théorème 4.2 énoncé sur l'axe réel négatif redonne, avec des précisions supplémentaires, le résultat de cet auteur.

5) Considérons pour k entier > 0, un itéré A^k de A. A^k est donc une réalisation auto-adjointe dans $L_2(\Omega)$ de

Il est facile de vérifier, grâce à (2.4) que l'on a :

$$(2.4)' \qquad |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_o^k(x,\xi)| \leq C|a_o^k(x,\xi)|\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|} .$$

Si nous posons $b'(x,\xi) = a_o^k(x,\xi)$ et $b''(x,\xi) = b(x,\xi) - b'(x,\xi)$, il est facile de vérifier, grâce à (2.3) et (2.4) que l'on a :

$$(2.3)' \qquad |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta b''(x,\xi)| \leq C|a_o^k(x,\xi)|\phi^{-|\alpha|-1}\varphi^{-|\beta|-1} .$$

De (2.3)' et (2.4)', nous voyons que nous pouvons utiliser la proposition de l'appendice A pour $b(x,D)$ qui donne, pour tout k et $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$(4.11) \qquad |\eta u|_{km'} \leq C(|A^k u|_o + |u|_o) .$$

Alors au lieu de considérer $b_o(x,\xi) = \mathrm{Re}\, b(x,\xi)$, $b_1(x,\xi) = i\, \mathrm{Im}\, b(x,\xi)$, nous pouvons les remplacer respectivement par $b'(x,\xi) = a_o^k(x,\xi)$ et $b''(x,\xi)$. Il est aisé de voir que tous les résultats obtenus sont valables avec la décomposition b', b''.

Naturellement (2.8) est remplacé par

$$(2.8)' \qquad b'(x,\xi)^{\delta/k} \leq C\phi(x,\xi)\varphi(x,\xi) .$$

Donc, dans l'énoncé du théorème 4.2, nous devons remplacer δ par $\frac{\delta}{k}$. De même, les quantités m, m', $1(x)$; $r(x)$, $p(x)$ sont remplacées respectivement par mk, $m'k$, $k^{-p(x)}A(x)$, $k^{-1}r(x)$, $p(x)$.

Par conséquent si $a(x,D)$ est tel que m' n'est pas nécessairement plus grand que n , nous pouvons toujours considérer un itéré $(a(x,D))^k$ de $a(x,D)$, avec k suffisamment grand, pour que $m'k$ soit plus grand que n pour utiliser le théorème 4.2. Cette remarque sera utile pour la suite.

§ 5. - COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA FONCTION SPECTRALE

A étant une réalisation auto-adjointe de $a(x,D)$ dans $L_2(\Omega)$, soit $\{E(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ sa résolution spectrale. Rappelons que $E(t)$, pour $t \in \mathbb{R}$, est une projection orthogonale dans $L_2(\Omega)$ telle que $E(s) \leq E(t)$ si $s \leq t$, $E(t) \to 0$ si $t \to -\infty$, $E(t) \to Id$ si $t \to +\infty$ et $A = \int_{\mathbb{R}} t dE(t)$ (au sens de $\mathcal{L}(L_2(\Omega))$).

Il est bien connu, pour $s < t$, que $H(s,t) = [E(s) - E(t)]L_2(\Omega)$ est dans $\bigcap_{k=o}^{\infty} D(A^k)$. Par conséquent, en vertu de (4.11), toute fonction $u \in H(s,t)$ est $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Le lemme suivant va permettre de majorer les dérivées de u en fonction de sa norme.

LEMME 5.1. - *Supposons* $m' > m$. *Pour* $t \in \mathbb{R}$, $u \in L_2(\Omega)$, $E(t)u$ *est une fonction* $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. *Pour tout multi-indice* α , *tout* $p > 0$, *nous avons :*

$$D^\alpha E(t)u(x) = |t|^{-p}|u|_o O(1) \qquad t \to -\infty .$$

uniformément sur tout compact $\sigma \subset \Omega$.

Preuve : Soit σ compact Ω . Considérons, comme auparavant, deux fonctions (réelles) τ, η de $\mathcal{D}(\Omega)$ telles que $\tau\eta = \eta$ et $\eta = 1$ sur un voisinage de σ .

Utilisons l'opérateur $\Delta_{N,t}(x,D)$ défini par (4.1) avec $t \in \mathbb{R}_-$ (le demi-axe réel négatif) et $N > \frac{1}{\delta}$ (qui sera choisi suffisamment grand).

D'après le lemme 4.1, il existe $T > 0$ et $C > 0$ (qui ne dépendent essentiellement que de N) tels que le noyau $\Delta_{N,t}(x,y)$ de $\Delta_{N,t}(x,D)$, (qui est continu sur $\Omega \times \Omega$ car $N > \frac{1}{\delta}$ et $m' > m$), vérifie la majoration :

$$|\Delta_{N,t}(x,y)| \leq C|t|^{-N\delta+1} \tag{5.2}$$

pour tout $x, y \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}_-$, $t < -T$ (on peut en effet prouver, puisque $m' > n$, que l'on peut prendre $q = 1$).

En utilisant le principe (4.4), (5.2) prouve que le prolongement continu $\Delta_{N,t}$ de $\Delta_{N,t}(x,D)$ dans $L_2(\Omega)$ a une norme majorée par :

$$\| \Delta_{N,t} \| \leq C|t|^{-N\delta+1} \tag{5.3}$$

pour $t \in \mathbb{R}$, $t \leq -T$.

De même, l'opérateur $Q_{N,t}(x,D) = \tau\mathcal{R}_{N,t}(x,D)\eta$ a un noyau $Q_{N,t}(x,y)$ sontinu sur $\Omega \times \Omega$ et vérifie, en vertu de (3.11), la majoration :

$$|Q_{N,t}(x,y)| \leq C|t|^{-1+\frac{n}{m'}}$$

pour tout $x, y \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}_-$, $t \leq -T$ (en augmentant au besoin T).

Par conséquent, nous avons :

(5.5) $$\| Q_{N,t} \| \leq C|t|^{-1+\frac{n}{m'}}$$

pour $t \in \mathbb{R}_-$, $t \leq -T$.

Utilisant le fait que $A - t$ est auto-adjoint pour t réel, nous obtenons de (4.5) :

(5.6) $$\eta u = Q^*_{N,t}(A - t)u - \Delta^*_{N,t}u \qquad u \in L_2(\Omega) .$$

Donc (5.3), (5.5) et (5.6) prouvent que l'on a :

$$|\eta u|_o \leq C\left[|t|^{-1+\frac{n}{m'}} |(A - t)u|_o + |t|^{-N\delta+1}|u|_o\right]$$

pour $t \subset \mathbb{R}_-$, $t \leq -T$.

Pour $u \in H(s,t)$, nous avons, en utilisant la représentation spectrale de A :

$$|(A - t)u|_o \leq (t - s)|u|_o .$$

Comme $m' > n$, nous obtenons des deux dernières majorations :

(5.7) $$|u|_{o,\Omega} \leq C(|t|^{-N\delta+1} + \varepsilon)|u|_o$$

pour tout $u \in H(t - \varepsilon , t)$, $t \in \mathbb{R}_-$, $t \leq -T$.

Prenons $\varepsilon = |t|^{-N\delta+1}$ et soit h un entier positif. Nous obtenons facilement de (5.7) :

(5.8) $$|\eta u|_o \leq C|t|^{-N\delta+1}h^{1/2}|u|_o$$

pour tout $u \in H(t - h\varepsilon, t)$, $t \in \mathbb{R}_-$, $t \leq -T$.

En prenant h entier $\in [t^{N\delta-1}, t^{N\delta-1} + 1[$, nous obtenons de (5.8) :

$$|u|_{o,\Omega} \leq C|t|^{-\frac{N\delta}{2}+\frac{1}{2}} |u|_o \tag{5.9}$$

pour tout $u \in H(t - 1, t)$, $t \in \mathbb{R}_-$, $t \leq -T$.

Soit α un multi-indice.

En utilisant (4.11) et (5.9), il existe k entier tel que :

$$\sup_{x\in\sigma} |D^\alpha u(x)| \leq C|t|^{-\frac{N\delta}{2}+\frac{1}{2}} |A^k u|$$

pour tout $u \in H(t - 1, t)$, $t \in \mathbb{R}_-$, $t \leq -T$.

Comme $|A^k u|_{o,\Omega} \leq C|t|^k |u|$ pour $u \in H(t - 1, t)$, nous obtenons :

$$\sup |D^\alpha u(x)| \leq C|t|^{-\frac{N\delta}{2}+\frac{1}{2}+k} |u|_o \tag{5.10}$$

pour tout $u \in H(t - 1, t)$, $t \in \mathbb{R}_-$, $t \leq -T$.

Pour $u \in L_2(\Omega)$ quelconque et $t \in \mathbb{R}_-$, $t \leq -T$, on a la décomposition orthogonale :

$$E(t)u = u_1 + u_2 + \ldots$$

avec $u_i \in H(t - i, t - i + 1)$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Utilisant (5.10), nous obtenons :

$$\sup_{x\in\sigma} \sum_{i=1}^{\infty} |D^\alpha u_i(x)| \leq C\left(\sum_{i=1}^{\infty} |t - i + 1|^{-\frac{N\delta}{2}+\frac{1}{2}+k}\right)|u|_o .$$

Nous déduisons que $E(t)u$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et que l'on a :

$$\sup_{x\in\sigma} |D^\alpha E(t)u| \leq C|t|^{-\frac{N\delta}{2}+\frac{1}{2}+k} |u|_o \quad .$$

pour $t \leq -T$. Nous obtenons alors facilement les conclusions du lemme 5.1.

REMARQUE. - Dans le cas elliptique et formellement hypoelliptique, N. Nilsson (cf. (9), (11)) prouve que la décroissance est exponentielle lorsque $t \to -\infty$. Sa preuve utilise une solution élémentaire de $a(x,D)$. Nous avons adapté, dans le lemme précédent, la méthode de Nilsson.

Si m' n'est par nécessairement $> n$, nous pouvons utiliser la remarque 5 qui suit le théorème 4.2 et prendre un itéré avec k assez grand et impair. Alors en suivant les arguments classiques, nous obtenons du lemme précédent le :

THEOREME 5.2. - *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *il existe une fonction* $e_t(x,y)$ *qui est* $C^\infty(\Omega \times \Omega)$ *telle que* $e_t(x,.)$ *est dans* $L_2(\Omega)$ *pour tout* $x \in \Omega$ *et telle que*

$$E(t)u(x) = \int_\Omega e_t(x,y)u(y)dy \qquad u \in L_2(\Omega) \ , \quad x \in \Omega$$

où $E(t)u$ *est* $C^\infty(\Omega)$.

De plus, pour tout compact $\sigma \subset \Omega$, *tout* $p > 0$, *nous avons*

$$e_t(x,y) = |t|^{-p}O(1) \qquad t \to -\infty$$

uniformément sur $\sigma \times \sigma$.

Le résultat précédent prouve que $e_t(x,y)$ est à décroissance rapide lorsque $t \to -\infty$. Lorsque $t \to +\infty$, nous allons le comparer avec la fonction :

$$e_{o,t}(x,y) = (2\pi)^{-n} \int_{a_o(x,\xi)\leq t} e^{i<x-y,\xi>} d\xi .$$

Nous savons, par la proposition B.1 de l'appendice B, que pour tout $x \in \Omega$:

(5.11) $$e_{o,t}(x,x) \sim A(x) t^{r(x)} (\mathrm{Log}\ t)^{p(x)} \qquad t \to \infty$$

avec $A(x) > 0$, $r(x) > 0$ et $p(x)$ entier ≥ 0.

Ayant noté $c(x) = \sup (1, p(x))$ comme dans le théorème 4.2, nous avons le :

THEOREME 5.3. - *Nous avons* :

(5.12) $$e_t(x,y) - e_{o,t}(x,y)$$

$$= c(x)A(x)t^{r(x)}(\mathrm{Log}\ t)^{p(x)} t^{\theta\delta} O(1) \qquad t \to \infty$$

pour tout $\theta < \frac{1}{2}$, *uniformément sur* $\sigma \times \sigma$, σ *compact de* Ω.

Preuve : Traitons d'abord le cas où $m' > n$ et A est auto-adjoint > 0. Nous suivons la méthode de S. Agmon et Y. Kannai (1). Elle consiste à utiliser la formule de A. Pleijel :

(5.13) $$\left|e(x,y,t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\zeta} R_\lambda(x,y) d\lambda\right|$$

$$\leq C\tau \left(|R_\zeta(x,x)| + |R_\zeta(x,y)| + |R_\zeta(y,x)| + |R_\zeta(y,y)|\right)$$

où $t > 0$, $\zeta = t + i\tau$ et L_ζ un contour orienté joignant $\bar{\zeta}$ à ζ, ne coupant par $\mathbb{R}_+$. $R_\lambda(x,y)$ est, dans (3.13), le noyau de la résolvante R_λ .

(5.13) est donné usuellement dans le cas diagonal, mais elle s'étend en dehors de la diagonale de manière évidente (cf. (4)).

Soit $\theta < \frac{1}{2}$. Nous allons utiliser (5.13) avec $\zeta = t + it^{1-\theta\delta}$.

Nous avons d'abord à estimer $|R_\lambda(x,y)|$. Notons $B(x) = c(x)A(x)$.

Utilisons le lemme 3.3. Alors pour tout compact $\sigma \subset \Omega$, tout $N \geq 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\sum_{j=o}^{N-1} |b_{j,\zeta}(x,y)| \leq CB(x)t^{1-r(x)}(\text{Log } t)^{p(x)}\text{Log}(t^{\theta\delta})$$

pour tout $x \in \sigma$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ assez grand.

En utilisant alors (4.8) du théorème 4.2 pour N assez grand, nous obtenons une majoration analogue :

$$|R_\zeta(x,y)| \leq CB(x)t^{-1+r(x)}(\text{Log } t)^{p(x)}\text{Log } t^{\theta\delta} \tag{5.14}$$

pour tout $x, y \in \sigma$, $t > 0$ assez grand.

Examinons $\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\zeta} R_\lambda(x,y)d\lambda$.

Nous désirons prouver que pour tout compact $\sigma \subset \Omega$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} &|\textstyle\int_{L_\zeta}(R_\lambda(x,y) - b_{o,\lambda}(x,y)d\lambda| \\ &\leq CB(x)t^{r(x)}(\text{Log } t)^{p(x)}t^{-\theta\delta} \end{aligned} \tag{5.15}$$

pour tout $x, y \in \sigma$, $t > 0$ assez grand.

Pour cela, nous choisissons le contour L_ζ de la manière suivante : L_ζ est composé de deux segments L_ζ^1 , joignant $t + t^{1-\theta\delta}$ à $t + it$ et $t - it^{1-\theta\delta}$ à $t - it$ et d'un arc de cercle L_ζ^2

joignant $t + if$ à $t - it$, ne coupant par $\mathbb{R}_+$.

Utilisons de nouveau (3.11)'. Nous obtenons, pour $j \geq 1$:

$$\int_{L^1_\zeta} |b_{j,\lambda}(x,y)d\lambda|$$
$$\leq CB(x)t^{2j-j\delta}\text{Log } t^{\theta\delta} \int_{t^{1-\theta\delta}}^{t} \frac{dx}{x^{2j}}\, t^{-1+r(x)}(\text{Log } t)^{p(x)} .$$

Il vient de là :

$$(5.16) \qquad |\sum_{j\geq 1}^{N-1} \int_{L^1_\zeta} b_{j,\lambda}(x,y)d\lambda|$$
$$\leq CB(x)t^{-\delta(1-2\theta)}\text{Log } t^{\theta\delta}t^{r(x)}(\text{Log } t)^{p(x)}t^{-\theta\delta}$$

(avec une constante C qui ne dépend essentiellement que de N) pour $x \in \sigma$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ assez grand.

Sur L^2_ζ , nous utilisons (3.11) pour obtenir :

$$(5.17) \qquad |\sum_{j\geq 1}^{N-1} \int_{L^2_\zeta} b_{j,\lambda}(x,y)d\lambda| \leq CA(x)t^{r(x)}(\text{Log } t)^{p(x)}t^{-\delta}$$

pour $x \in \sigma$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ assez grand.

Utilisons de nouveau (4.8) avec N suffisamment grand ; en intégrant le reste de (4.8) sur L^1_ζ et L^2_ζ et tenant compte de (5.16) (5.17) nous obtenons (5.15).

Par la formule de Cauchy, nous avons :

$$(5.18) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\zeta} b_{o,\lambda}(x, \ (x,y)d\lambda =$$

$$\lim_{\varepsilon\to o} \frac{1}{2\pi i}\int_o^t [b_{o,\lambda+i\varepsilon}(x,y) - b_{o,\tau-i\varepsilon}(x,y)]\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_\varepsilon} b_{o,\lambda}(x,y)d\lambda$$

où ℓ_ε est composé de deux segments, joignant $t + it^{1-\theta\delta}$ à

$t + i\varepsilon$ et $t - it^{1-\theta\delta}$ à $t - i\varepsilon$.

Utilisons encore (3.11)' ; nous obtenons, avec $C > 0$ indépendant de ε :

$$\left|\int_{\ell_\varepsilon} b_{o,\lambda}(x,y)d\lambda\right| \leq CB(x)t^{-1+r(x)}(\text{Log } t)^{p(x)} \int_\varepsilon^{t^{1-\theta\delta}} \text{Log } (\frac{t}{x})dx .$$

En intégrant, nous avons :

$$(5.19) \qquad \left|\int_{\ell_\varepsilon} b_{o,\lambda}(x,y)d\lambda\right| \leq CB(x)t^{r(x)}(\text{Log } t)^{p(x)}t^{-\theta\delta} \text{ Log } t$$

pour $x \in \sigma$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ assez grand.

Il est aisé de voir que l'on a :

$$(5.20) \qquad \lim_{\varepsilon \to o} \frac{1}{2\pi i}\int_o^t |b_{o,\tau+i\varepsilon}(x,y) - b_{o,\tau-i\varepsilon}(x,y)|d\tau =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_o^t \left[\frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{\varepsilon \to o}\int \left(\frac{1}{a_o(x,\xi) - \sigma - i\varepsilon} - \frac{1}{a_o(x,\xi) - \sigma - i\varepsilon}\right) \times e^{i<x-y,\xi>}d\xi\right]dt.$$

D'après un résultat bien connu (cf., par exemple, J. Milnor (8)) l'ensemble des valeurs critiques du polynôme en ξ, $a_o(x,\xi)$, est un ensemble fini (rappelons qu'une valeur $z \in \mathbb{C}$ est appelée valeur critique d'un polynôme P s'il existe $\xi_o \in \mathbb{R}$ tel que $P(\xi_o) = z$ et grad $P(\xi_o) = 0$).

Nous en déduisons que la fonction (en t) $e_{o,t}(x,y)$, qui est localement à variation bornée) est dérivable, sauf en un nombre fini de points et de dérivées :

$$(5.21) \qquad \frac{d}{dt} e_{o,t}(x,y) = (2\pi)^{-n}\int_{a_o(x,\xi)=t} e^{i<x-y,\xi>} \mu$$

où μ est la forme :

$$d\xi a_o(x,\xi) \wedge \mu = d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_n \; .$$

Alors (5.20) (5.21) prouvent que l'on a :

$$(5.22) \qquad \lim_{\varepsilon\to o} \frac{1}{2\pi i} \int_o^t b_{o,\tau+i\varepsilon}(x,y) - b_{o,\tau-i\varepsilon}(x,y)\, d\tau$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} e_{o,t}(x,y) \; .$$

Alors (5.13), (5.14), (5.15), (5.18), (5.19) et (5.22) prouvent (5.12) dans le cas $m' > n$ et A auto-adjoint ≥ 0 .

Examinons maintenant le cas où $m' < n$. De manière classique, prenons k assez grand pour que $km' > n$ et k pair pour que A^k soit auto-adjointe positive. D'après la remarque 5 qui suit le théorème 4.2 et l'étude asymptotique :

$$(5.23) \qquad e_{k,t}(x,y) - (2\pi)^{-n} \int_{a_o^k(x,\xi)\leq t} e^{i<x-y,\xi>} d\xi$$
$$= B(x)\, t^{r(x)/k} (\mathrm{Log}\, t^{1/k})^{p(x)}\, t^{-\theta\delta/k}\, O(1) \qquad t \to +\infty \; .$$

Comme $e_{k,t}(x,y)$ est la fonction spectrale de A^k avec k pair, nous avons pour $t > 0$:

$$(5.24) \qquad e_t(x,y) - e_{-t}(x,y) = e_{k,t^k}(x,y) \; .$$

Alors, puisque $e_{-t}(x,y)$ est à décroissance rapide lorsque $t \to +\infty$ d'après le théorème 5.2, (5.23) et (5.24) montrent que la conclusion du théorème 5.3 est encore valable.

COROLLAIRE 5.4. - *Sur la diagonale,* $e_t(x,x)$ *a un comportement asymptotique :*

$$e_t(x,x) = (1 + t^{-\theta\delta}O(1))e_{o,t}(x,x) \qquad t \to +\infty$$

pour tout $\theta < \frac{1}{2}$.

Preuve : Il suffit d'utiliser (5.11) et (5.12).

REMARQUE. - Lorsque $a_o(x,\xi)$ est à coefficients constants, les conclusions du théorème 5.3 et du corollaire 5.4 sont valables pour tout $\theta < 1$. C'est une conséquence de la remarque 1 qui suit le théorème 4.2.

APPENDICE A. - REGULARITE LOCALE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS HYPOELLIPTIQUES

Nous considérons une paire de fonctions poids ϕ , φ comme au §2 et soit un opérateur pseudo-différentiel $a(x,D)$ dont le symbole vérifie génériquement les conditions :

(A) $$|a(x,\xi)| \leq c\langle\xi\rangle^m \qquad \text{pour } m > 0$$

(B) $$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)| \leq c|a(x,\xi)|\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|}$$

(C) $$c\langle\xi\rangle^{m'} \leq |a(x,\xi)| \qquad \text{pour } m' > 0 .$$

D'après R. Beals (cf. (2)), $a(x,D)$ est hypoelliptique.

Nous allons donner une preuve rapide de ce fait, cela nous permet d'introduire des ingrédients nécessaires pour la suite.

Suivant le schéma classique de L. Hörmander, nous construisons un opérateur $b(x,D)$, paramétrix à gauche de $a(x,D)$, en résolvant génériquement les formules définies par récurrence :

(1) $$\begin{aligned} & a(x,\xi)b_o(x,\xi) = 1 \\ & b_j(x,\xi) = - b_o(x,\xi) \sum_{o<|\alpha|\leq j} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha a \partial_\xi^\alpha b_{j-|\alpha|} \qquad j \geq 1 . \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que l'on a, génériquement :

(2) $$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta b_j(x,\xi)| \leq C|b_o|(\phi\varphi)^{-j}\phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|} .$$

Ceci montre, grâce à l'hypothèse (c) et les hypothèses sur ϕ ,

φ, que le symbole $b(\alpha,\xi)$ appartient à la classe (*) suivante de R. Beals et C. Fefferman :

(3) $$b_j \in S^{-j,-j}(\Omega) .$$

Remarquons aussi que $a(x,\xi)$ appartient à la classe

(4) $$a \in S^{m/\mu,m/\mu}(\Omega) .$$

Utilisant le calcul des o. p. d. (opérateurs pseudo-différentiels) de (2) et (3), nous avons :

(5) $$\Big(\sum_{o\leq j<k} b_j\Big) \circ a - 1 \in S^{(m/\mu)-k,\ (m/\mu)-k}(\Omega) .$$

A l'aide de (5), on construit un opérateur b dont le symbole est $\sim \sum_{j\geq o} b_j(x,\xi)$ et tel que $ba - I$ est régularisant. Ceci montre que $a(x,D)$ est hypoelliptique.

LEMME A.1. - *Pour tout* $t > 0$, *il existe* $M > 0$ *tel que tout o. p. d.* $r(x,D)$ *dont le symbole* $r(x,\xi) \in S^{-M,-M}(\Omega)$ *est régularisant à l'ordre* t, *c'est-à-dire :*

(6) $$r(x,D)u \in H_t^{loc}(\Omega) \quad \text{si} \quad u \in L_2^{loc}(\Omega) .$$

Preuve : Nous prenons :

(*) *Pour deux réels* M, n, $S^{M,m}(\Omega)$ *est l'ensemble des symboles* $a(x,\xi)$ *vérifiant génériquement :*

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)| \leq \phi^{M-|\alpha|}\,\varphi^{m-|\beta|} .$$

$$(7) \qquad M = [(1 + t)(1 + \varepsilon) + \varepsilon(n + 1)]\mu^{-1}$$

avec μ, ε donnés par les hypothèses (i) (ii).

Pour prouver (6), on toujours supposer que le support en x de $r(x,\xi)$ est compact. Soit $K = \mathrm{supp}_x\, r(x,\xi)$.

Notons alors $\hat{r}(\eta,\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int r(x,\xi)e^{-i<x,\eta>}dx$.

Par intégrations par parties, nous avons :

$$|\eta^\alpha \hat{r}(\eta,\xi)| \leq C_\alpha \int_K (\phi(x,\xi)\varphi(x,\xi))^{-M}\varphi(x,\xi)^{-|\alpha|}dx \ .$$

En utilisant les hypothèses (i) et (ii) sur la partie de fonctions poids ϕ, φ , nous avons, pour tout $N \geq 0$:

$$(8) \qquad |\hat{r}(\eta - \xi , \xi)| \leq C_N <\eta - \xi>^{-N}<\xi>^{-M\mu+M\varepsilon} \ .$$

Comme $0 \leq \varepsilon \leq 1$, la valeur (7) prouve que l'on a :

$$M\mu/\varepsilon - (M\mu + n + 1)/(1 + \varepsilon) \geq 1 \ .$$

Prenons donc dans (8), N l'entier vérifiant :

$$(9) \qquad \frac{M + n + 1}{1 + \varepsilon} \leq N < \frac{M + n + 1}{1 + \varepsilon} + 1 \leq \frac{M\mu}{\varepsilon}$$

La dernière inégalité de (9) et l'inagalité de Peetre donnent :

$$(10) \qquad <\xi>^{-M\mu+N\varepsilon} \leq C<\eta - \xi>^{M\mu-N\varepsilon}<\eta>^{-M\mu+N\varepsilon}.$$

Il vient de (8) et (10) :

$$(11) \qquad |<\eta>^t\hat{r}(\eta - \xi , \xi| \leq C<\eta - \xi>^{-N(1+\varepsilon)+M\mu}<\eta>^{t-M\mu+N\varepsilon} \ .$$

La deuxième inégalité de (9) et la valeur (7) de M prouvent que nous avons :

(12) $$t \leq M\mu - N\varepsilon .$$

Utilisant la première inégalité de (9), (11) et (12), nous obtenons :

$$|\langle\eta\rangle^{t}\,\hat{r}(\eta-\xi,\,\xi)| \leq C\langle\eta-\xi\rangle^{-n-1} .$$

Il est alors bien connu que cette dernière inégalité prouve (6).

PROPOSITION A.2. - *Soit* $a(x,D)$ *un o. p. d. dont le symbole* $a(x,\xi)$ *vérifie les hypothèses* (A), (B) *et* (C).

Si $u \in L_2^{loc}(\Omega)$ *et* $a(x,D)u \in L_2^{loc}(\Omega)$, *alors* $u \in H_{m'}^{loc}(\Omega)$.

Preuve : A m' , choisissons un M correspondant au lemme précédent. Prenons alors un entier k tel que

(13) $$k \geq M + \frac{m}{\mu}$$

et notons

$$p_k(x,\xi) = \sum_{0\leq j<k} b_j(x,\xi) .$$

Remarquons que, grâce à (3), $p_k(x,\xi) \in S^{0,0}(\Omega)$.

Soit $h_k(x,D)$ un opérateur de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$, propre (au sens de L. Hörmander), défini par un symbole $h_k(x,\xi)$, tel que $h_k(x,D) - p_k(x,D)$ soit régularisant (c'est-à-dire de noyau $\mathcal{C}^\infty(\Omega\times\Omega)$). Avec (5), le calcul des o. p. d. de (2) et (3), le choix (13) de k et le lemme A.1 prouvent que l'opérateur $h_k(x,D).a(x,D) - \mathrm{Id}$ estrégularisant à l'ordre m' .

Donc $h_k(x,D)a(x,D)u - u \in H^{loc}_{m'}(\Omega)$.

Il reste à prouver que $h_k(x,D)$, donc $p_k(x,D)$, est régularisant à l'ordre m' .

Pour cela, notons $\Lambda(\xi)$ le symbole $<\xi>^{m'}$. Comme, d'après (3), tout symbole $S^{o,o}(\Omega)$ est régularisant à l'ordre o , il reste à prouver que le symbole $\Lambda \circ p_k \in S^{o,o}(\Omega)$.

Prenons h entier tel que $h \geq \frac{m'}{\mu}$. Le calcul des o. p. d. prouve que l'on a :

(14) $$\Lambda \circ p_k - \sum_{|\alpha|<h} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi \Lambda D^\alpha_x p_k \in S^{(m'/\mu)-h,\ (m'/\mu)-h}(\Omega) .$$

Le choix de h permet de prouver que le premier membre de (14) est dans $S^{o,o}(\Omega)$. Grâce aux hypothèses (i), (ii), (C) et à (2), il est aisé de vérifier que $\partial^\alpha_\xi \Lambda D^\alpha_x p_k \in S^{o,o}(\Omega)$.

Nous conclusons que $\Lambda \circ p_k \in S^{o,o}(\Omega)$, ce qui achève la preuve de la proposition.

APPENDICE B. - FONCTION SPECTRALE D'UN POLYNOME HYPOELLIPTIQUE

Soit $P(\xi)$ un polynôme hypoelliptique de degré m, à valeur réelle pour $\xi \in \mathbb{R}^r$, telle que $P(\xi) \to +\infty$ lorsque $|\xi| \to +\infty$. Il existe $m' > 0$ tel que $c\langle\xi\rangle^{m'} \leq P(\xi)$ pour $|\xi|$ assez grand. En ajoutant au besoin une constante, nous supposons que :

$$(1) \qquad \langle\xi\rangle^{m'} \leq P(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Considérons la fonction spectrale associée à P :

$$e(t) = \int_{P(\xi)\leq t} d\xi .$$

Elle est monotone croissante en t, nulle pour $t < 1$.

Rappelons que $e(t)$ a un comportement asymptotique suivant, lorsque $t \to +\infty$:

PROPOSITION B.1 (cf. (10) et (13)). - *Il existe des réels* $A > 0$, $r > 0$ *et un entier* $p \geq 0$ *tels que :*

$$(2) \qquad e(t) \sim At^r(\operatorname{Log} t)^p \qquad t \to +\infty$$

($f(t) \sim g(t)$ *signifie que* $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)|g(t) = 1$).

REMARQUES. - 1) Dans (10), N. Nilsson prouve seulement un encadrement de $e(t)$ et dans (11), cet auteur signale que l'on a (2) sans donner de preuve. On peut trouver une preuve de (2) dans le travail de C. Smagin (cf. (13)) qui utilise un résultat de prolongement méromorphe de l'intégrale $\int P(\xi)^\lambda d\xi$, d'après

I. N. Bernstein.

Signalons qu'il résulte de N. Nilsson que, dans un voisinage de $+\infty$, $e(t)$ est analytique réelle (de fait, comme nous l'avons vu au §5, $e(t)$ est analytique sur l'ouvert de $\mathbb{R}$ complémentaire d'un nombre fini de points).

De manière précise, N. Nilsson prouve qu'il existe $T > 0$ tel que dans l'ouvert $]T, +\infty[$, $e(t)$ est une somme finie de termes du type $t^{\beta}(\mathrm{Log}\ t)^{\nu}H(t)$ où $H(t)$ est la restriction à $]T, \infty[$ d'une fonction holomorphe dans $|z| > T$ dont la série de Laurent au voisinage de l'infini s'écrit :

$$H(z) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} .$$

Alors A, r et p donnés dans (2) correspond au terme "principal" de $e(t)$, $t^r(\mathrm{Log}\ t)^p(A + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{-k})$. Il en résulte que la dérivée $e'(t)$ de $e(t)$ a un comportement asymptotique :

$$e'(t) \sim Bt^{r-1}(\mathrm{Log}\ t)^p \qquad t \to +\infty \tag{3}$$

avec $B = (r + p)A$.

2) Remarquons aussi que (1) et le fait que P est de dégré m entraînent que :

$$\frac{n}{m} \leq r \leq \frac{n}{m'} . \tag{4}$$

Nous allons déduire de (2) une majoration d'intégrales de Stieljés liées à la résolvante.

PROPOSITION B.2. - *Soit* k *et* h *deux réels vérifiant* $0 \le h < k - \frac{n}{m^r}$. *Alors, pour* $t \ge 0$, *l'intégrale*

$$I_{k,h}(t) = \int_o^{\infty} \frac{\tau^h de(\tau)}{(\tau + t)^k}$$

est convergente.

Nous avons:

$$(5) \qquad I_{k,h}(t) = At^{r+h-k}(\text{Log } t)^p O(1) \qquad t \to +\infty .$$

Preuve : Comme $e(\tau)$ est nulle pour $\tau < 1$, il suffit d'examiner la convergence de $I_{k,h}$ au voisinage de l'infini. D'après (3), nous voyons que

$$\frac{\tau^h e'(\tau)}{(\tau + t)^k}$$

se comporte à l'infini comme $\tau^{h+r-k-1}(\text{Log } \tau)^p$.

L'hypothèse sur k, h et (4) prouve que :

$$k + 1 - (h + r) > 1$$

d'où la convergence de $I_{k,h}(t)$.

En vertu de (2), il existe $T > 0$ tel que :

$$(6) \qquad e(t) \le 2A\, t^r (\text{Log } t)^p \qquad \text{pour } t \ge T .$$

Après une intégration par parties, nous avons :

$$I_{k,h}(t) = \int_o^{\infty} g(\tau) e(\tau) d\tau$$

avec

$$g(\tau) = k \frac{\tau^{h}}{(\tau + t)^{k+1}} - h \frac{\tau^{h-1}}{(\tau + 1)^{k}} .$$

Ecrivons l'intégrale en :

$$I_{k,h}(t) = \int_{o}^{t} g(\tau)e(\tau)d\tau + \int_{t}^{\infty} g(\tau)e(\tau)d\tau$$

avec $t \geq T$.

Comme e est croissante, nous avons C une constante > 0 indépendante de t :

$$(7) \qquad \left|\int_{o}^{t} g(\tau)e(\tau)d\tau\right| \leq Ct^{-k-1+h}e(t) \int_{o}^{t} d\tau = Ct^{-k+h}e(t)$$

puisque, sur $[0,t]$, nous utilisons $|g(\tau)| \leq Ct^{-k-1+h}$.

En utilisant (6), nous avons, avec $C > 0$ indépendante de t :

$$(8) \qquad \left|\int_{t}^{\infty} g(\tau)e(\tau)d\tau\right| \leq AC \int_{t}^{\infty} \tau^{h+r-k-1}(\mathrm{Log}\ \tau)^{p}d\tau$$

puisque, sur $[t,\infty[$, nous utilisons $|g(\tau)| \leq C\tau^{-k-1+h}$.

De (7) et (8), il est facile d'obtenir (5).

REMARQUES. - 1) Nous avons l'estimation suivante pour $I_{k,h}(t)$, plus faible que (5), mais *indépendante* de A :

$$(9) \qquad I_{k,h}(t) = t^{(m/m')+h-k}O(1) \qquad t \to +\infty .$$

Il suffit pour cela d'utiliser, grâce à (1), la relation :

$$e(t) \leq Ct^{n/m'}$$

et d'achever de prouver (9) comme nous avons fait pour (5).

2) L'estimation (5) est encore vraie si k et h vérifient : $0 \leq h < k - r$.

PROPOSITION B.3. - *Supposons* $m' > n$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\lambda \notin \mathbb{R}_+$ *et* $\mathrm{Re}\,\lambda > 1$ *et considérons l'intégrale (convergente) :*

$$G(\lambda) = \int_0^\infty \frac{de(\tau)}{|\tau - \lambda|} .$$

Nous avons :

$$(10) \qquad G(\lambda) = B(\mathrm{Re}\,\lambda)^{r-1}(\mathrm{Log}\ \mathrm{Re}\,\lambda)^p \mathrm{Log}\left(\frac{\mathrm{Re}\,\lambda}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}\right) O(1) \qquad |\lambda| \to \infty$$

avec $B = (r + p)A$.

Preuve : Il est clair que la fonction sous le signe somme est intégraple, puisque $m' > n$.

Ecrivons $\lambda = \xi + i\eta$ et prenons $\xi \geq 2T$ (donnée par (6)).

Décomposons l'intégrale en trois termes :

$$G(\lambda) = \int^{\xi/2} + \int_{\xi/2}^{3\xi/2} + \int_{3\xi/2}^{\infty} = (I) + (II) + (III) .$$

Pour (I), nous utilisons le fait que

$$|\tau - \lambda| \geq \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} \qquad \text{pour} \quad \tau \in \left[0, \frac{\xi}{2}\right]$$

donc :

$$(11) \qquad (I) \leq C|\lambda|^{-1} e(\xi/2) .$$

Pour (III), nous utilisons le fait que :

$$|\tau - \lambda| \geq \tau - \xi \qquad \text{pour} \quad \tau \in \left[\frac{3\xi}{2}, \infty\right[$$

donc :

$$(III) < 2\xi^{-1} e \frac{3\xi}{2} + \int_{3\xi/2}^{\infty} \frac{e(\tau)d\tau}{(\tau - \xi)^2} .$$

Utilisant de nouveau (6) (valable puisque $\xi \geq 2T$) , nous obtenons, avec $C > 0$ indépendant de λ :

(12) $$(III) \leq 2\xi^{-1} e \frac{3\xi}{2} + AC\xi^{r-1}(\mathrm{Log}\ \xi)^p .$$

Pour (II), nous avons :

$$(II) \leq C \sup_{t \in \left[\frac{\xi}{2}, \frac{3\xi}{2}\right]} e'(t) \int_{\xi/2}^{3\xi/2} \frac{d\tau}{|\tau - \xi| + |\eta|}$$

$$= 2 \sup_{t \in \left[\frac{\xi}{2} \frac{3\xi}{2}\right]} e'(t)/\mathrm{Log}\ \frac{\xi}{2|\eta|} .$$

En utilisant (3), nous pouvons supposer aussi que :

$$e'(t) \leq 2Bt^{r-1}(\mathrm{Log}\ t)^p \qquad \text{pour} \quad t \geq T$$

en augmentant au besoin T .

Puisque $\xi \geq 2T$, nous utilisons cette dernière majoration pour obtenir :

(13) $$(II) \leq CB\xi^{r-1}(\mathrm{Log}\ \ \xi)^p \mathrm{Log}\ \frac{\xi}{2|\eta|} .$$

Comme $rA \leq B$, donc $A \leq \frac{m}{n} B$ d'après (4), (11), (12) et (13) prouvent aisément (10).

REFERENCES

(1) S. AGMON - Y. KANNAI, *On the asymptotic behavior of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators*, Israel J. Math, 5 (1967), 1-30.

(2) R. BEALS, *Spacially inhomogeneous pseudo-differential operator II*, Comm. Pure Appl. Math, 27 (1974), 161-205.

(3) R. BEALS - C. FEFFERMAN, *Spatially inhomogeneous pseudo-differential operator I*, Comm. Pure Appl. Math., 27 (1974), 1-24.

(4) G. ESKIN, *Asymptotics near the boundary of spectral functions of elliptic self-adjoint boundary problems*, Israel J. Math. 22 (1975), 214-246.

(5) L. HÖRMANDER, *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations*, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 10 (1966), 138-183.

(6) L. HÖRMANDER. *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math., 121 (1968), 193-218.

(7) Y. KANNAI, *On the asymptotic behavior of resolvents kernels, spectral functions and eigenvalues of semi-elliptic systems*, Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, 23 (1969), 563-634.

(8) J. MILNOR, *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton Univ. Press, Ann. Math. Studies, 61 (1968).

(9) N. NILSSON, *Some estimates for eigenfunction expansions and spectral functions corresponding to elliptic differential operators*, Math. Scand., 9 (1961), 107-121.

(10) N. NILSSON, *Asymptotic estimates for spectral functions connected with hypoelliptic differential operators*, Arch. för Math., 35 (1964), 527-540.

(11) N. NILSSON, *Some estimates for spectral functions connected with formally hypoelliptic differential operators*, Arch. för Math., 10 (1972), 251-275.

(12) PHAM THE LAI, *Comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres d'un opérateur elliptique non nécessairement auto-adjoint*, à paraître dans Israel J. Math.

(13) S. A. SMAGIN, *Fractional powers of an hypoelliptic operator in* $\mathbb{R}^n$, Soviet Math. Dokl., 14 (1973), 585-588.

(14) A. TSUTSUMI, *On the asymptotic behaviour of resolvant kernels and spectral functions for some class of hypoelliptic operators*, J. Diff. Eq., 18 (1975), 366-385.