JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PHAM THE LAI
DIDIER ROBERT

Valeurs propres d'une classe d'équations différentielles singulières sur une demi-droite

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 164-171
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977____164_0>

VALEURS PROPRES D'UNE CLASSE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES SINGULIERES SUR UNE DEMI-DROITE

par

PHAM THE LAI et Didier ROBERT

Nous considérons dans ce travail des opérateurs différentiels du type : $L(t,D_t) = D_t^m(t^h D_t^m) + t^k$ sur $]0,\infty[$ où $m \in \mathbb{N} \setminus (0)$, h et k réels, $k > 0$, $0 \leqslant h < 2m$ et $D_t = i^{-1}\frac{d}{dt}$. Après avoir défini la réalisation de Neumann A de $L(t,D_t)$ dans $L^2(]0,\infty[)$ nous montrons qu'elle possède une suite $(\lambda_j)_{j\geqslant 0}$ de valeurs propres réelles écrite suivant les conventions habituelles. Nous nous proposons d'étudier la répartition de la suite $(\lambda_j)_{j\geqslant 0}$. Soit

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leqslant \lambda} 1 .$$

On établit en particulier la formule asymptotique :

$$(*) \qquad \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{(h/2k.m)-(1/k)-(1/2m)} N(\lambda) = (\pi k)^{-1} B\left(\frac{1}{k} - \frac{h}{2km} , \frac{1}{2m} + 1\right)$$

où B désigne la fonction bêta classique.

Les opérateurs du type $L(t,D_t)$ interviennent dans l'étude d'opérateurs elliptiques dégénérés ([3]), ([5]) et ([8]).

Nous ne donnons pas ici le détail des démonstrations. Elles paraîtront probablement ailleurs.

I. - INTRODUCTION

La formule (*) est connue dans des cas particuliers :

$$(I_1) \qquad m = 1 : \begin{cases} . \ \ h = 0 & : \text{Levitan } ({}^6) \\ . \ \ h = k = 1 & : \text{opérateur d'Euler.} \end{cases}$$

On a explicitement : $\lambda_j = 2j + 1$ pour j entier $\geqslant 1$.

(I_2) $\qquad$ m quelconque, $h = k$ entier : A. Mohamed ([7]).

Nous considérons ici la classe des opérateurs différentiels qui s'écrivent formellement :

$$L(t,D_t) = \sum_{0\leq j,\ \ell\leq m} D_j(a_{j\ell}(t)\,t^{2(\sigma+\delta m)+(j+\ell)(1-\delta)}.D^{\ell})$$

avec les hypothèses :

(H_1) σ réel < 0 , δ réel > 0 tels que $\sigma + \delta m > 0$ et $\sigma + m \geqslant 0$

(H_2) $a_{j\ell} \in L^{\infty}([0,\infty[)$; $a_{j\ell}$ réels ; $a_{j\ell} = a_{\ell j}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} a_{j\ell}(t) = a_{j\ell}(\infty)$ existent pour $0 \leqslant j$, $\ell \leqslant m$.

Définissons les espaces de Sobolev à poids :

$$W^m_{\sigma,\delta} = \{u \in \mathscr{D}'(]0,\infty[) \ :\ t^{\sigma+\delta m+j(1-\delta)}.D^j u \in L^2(]0,\infty[) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant m\}$$

muni de la norme hilbertienne canonique.

Posons :

$$a(u,v) = \sum_{0\leq j,\ \ell\leq m} \int_0^{\infty} a_{j\ell}(t).t^{2(\sigma+\delta m)+(j+\ell)(1-\delta)}.D^j u\ \overline{D^{\ell} v}\ dt$$

pour $u, v \in W^m_{\sigma,\delta}$.

On fait sur a l'hypothèse de coercivité : (C) Il existe C_o, $\gamma_o > 0$ telles que

$$a(u,u) \geqslant C_o\| u \|^2_{W^m_{\sigma,\delta}} - \gamma_o\| u \|^2_{L^2} \quad \text{pour tout} \quad u \in W^m_{\sigma,\delta} .$$

D'après le lemme de Lax-Milgram, la forme sesquilinéaire hermitienne a engendre un opérateur $A \in \mathscr{L}(W^m_{\sigma,\delta}, W^{-m}_{\sigma,\delta})$ où $W^{-m}_{\sigma,\delta}$ désigne l'antidual de $W^m_{\sigma,\delta}$ pour le crochet d'antidualité défini par le produit scalaire de $L^2(]0,\infty[)$. A correspond à la réalisation de Neumann de $L(t,D_t)$. L'opérateur : $L(t,D_t) = D^m_t(t^h.D^m_t) + t^k$ correspond aux paramètres : $\delta = 1 + \frac{h-k}{2m}$ et $\sigma = \frac{h}{2} - m$.

II. - RESULTATS

On a besoin du résultat préliminaire :

PROPOSITION 1. - Posons

$$\omega_{\infty}(\xi) = \sum_{0\leq j,\ \ell\leq m} a_{j\ell}(\infty).\xi^{j+\ell} .$$

Alors il existe $E > 0$ telle que :

$$\omega_{\infty}(\xi) \geqslant E(1 + \xi^2)^m \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathbb{R} .$$

D'après (C), $G_{\lambda} = (A + \lambda)^{-1}$ existe pour λ réel $\geqslant \gamma_o$ et $G_{\lambda} \in \mathscr{L}(W^{-m}_{\sigma,\delta}, W^m_{\sigma,\delta})$.

On a les résultats suivants :

THEOREME 1. - (i_1) <u>G_λ est un opérateur intégral, de noyau $G_\lambda(t,\tau)$ continu sur $]0,\infty[\times]0,\infty[$.</u>

(i_2) <u>Sous la condition supplémentaire</u> : $\alpha = \frac{\delta}{2(\sigma+\delta m)} < 1$, <u>G_λ est un opérateur nucléaire de $L^2(|0,\infty|)$ dans lui-même et l'on a</u> :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{1-\alpha}.\int_0^\infty G_\lambda(t,t)dt = (2\pi.\delta)^{-1}(\sin\pi\alpha)^{-1}\pi\alpha \int_{\mathbb{R}} \omega_\infty(\xi)^{-\alpha}d\xi \ .$$

THEOREME 2. - (ii_1) <u>Le spectre de A est discret, constitué d'une suite croissante $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ de valeurs propres, chacune étant répétée suivant sa multiplicité qui est finie.</u>

(ii_2) <u>Posons</u> : $N(\lambda) = \sum_{\lambda_k\leq\lambda} 1$. <u>On a alors</u> :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-\alpha}.N(\lambda) = (2\pi.\delta)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \omega_\infty(\xi)^{-\alpha}d\xi \ .$$

REMARQUES. - (R_1) Lorsque $\frac{\delta}{2(\sigma+\delta m)} < 1$, (ii_2) est une conséquence immédiate de (i_2). En effet, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dN(t)}{t+\lambda} = \int_0^\infty G_\lambda(t,t)dt$$

et il suffit alors d'appliquer le théorème taubérien de Hardy-Littlewood ([1]).

(R_2) Un calcul simple d'intégrales montre que (*) est un cas particulier de (ii_2).

III. - INDICATIONS SUR LES DEMONSTRATIONS

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.: Soit $\varphi \in C_0^\infty(]0,\infty[)$, $\varphi \geq 0$, Supp $\varphi \subseteq [1,\infty[$ telle que $\int_1^\infty t^{2(\sigma+\delta m)}.\varphi^2(t)dt = 1$. Pour $\varepsilon \in]0,1]$ posons :

$$u_{\varepsilon,\xi}(t) = \varepsilon^{\sigma+\delta m+(1/2)}.\varphi(\varepsilon.t)e^{i\xi\delta^{-1}t^\delta} \ .$$

On a alors :

$$a(u_{\varepsilon,\xi}, u_{\varepsilon,\xi}) = \sum_{0\leq j,\ \ell\leq m} \xi^{j+\ell}\int_0^\infty a_{j\ell}(\frac{t}{\varepsilon})t^{2(\sigma+\delta m)}.\varphi^2(t)dt + R_{\varepsilon,\xi} \ .$$

Utilisant Liebnitz on prouve que $|R_{\varepsilon,\xi}| \leq c(\xi).\varepsilon^\delta$.
On en déduit :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a(u_{\varepsilon,\xi}, u_{\varepsilon,\xi}) = \omega_\infty(\xi) \ .$$

Or :

$$\lim_{\varepsilon\to o} \|t^{\sigma+m}.D^m u_{\varepsilon,\xi}\|^2_{L^2} = \xi^{2m}$$

$$\lim_{\varepsilon\to o} \|t^{\sigma+\delta m} u_{\varepsilon,\xi}\|^2_{L^2} = 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to o} \|u_{\varepsilon,\xi}\|^2_{L^2} = 0 .$$

La proposition 1 résulte alors de la coercivité de a.

DEMONSTRATION DU THEOREME 1 : D'après un théorème abstrait sur les opérateurs continus : $W^{-m}_{\sigma,\delta} \to W^m_{\sigma,\delta}$ (^{3}) on sait que G_λ admet un noyau continu sur $]0,\infty[\times]0,\infty[$ et qu'il existe $C > 0$ telle que : $|G_\lambda(t,\tau)| \leqslant C(t.\tau)^{-(\sigma+m)/2m}.\lambda^{-1+(1/2m)}$ pour tout $\lambda \geqslant \gamma_o$, $t, \tau > 0$.

D'où il résulte que si $T > 0$ on a :

$$\lambda^{1-\alpha}.\int_o^T G_\lambda(t,t)dt \leqslant C\,\lambda^{(1/2m)-\alpha} \int_o^T t^{-(\sigma+m)/m}\,dt .$$

Or : $\frac{1}{2m} - \alpha < 0$, d'où :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{1-\alpha}.\int_o^T G_\lambda(t,t)dt = 0 .$$

On est ramené à étudier le comportement de $\int_T^\infty G_\lambda(t,t)dt$ pour $\lambda \to +\infty$.

On commence par l'étude du cas où les coefficients $a_{j\ell}$ sont constants. On suppose donc à partir de maintenant que $a_{j\ell}(t) = \alpha_{j\ell}$ pour $t \in]0,\infty[$. On distinge alors deux cas :

<u>1er cas</u> : $\delta \geqslant 1$. - On procede par figeage des coefficients de $L(t,D_t)$. Soit $t_o \geqslant 1$,

$$\alpha_{t_o}(u,v) = \sum_{o\leqslant j,\ \ell\leqslant m} \alpha_{j\ell}.t_o^{2(\sigma+\delta m)+(j+\ell)(1-\delta)}.\int_1^\infty D^j u\,\overline{D^\ell v}\,dt$$

$$\alpha(u,v) = \sum_{o\leqslant j,\ \ell\leqslant m} \alpha_{j\ell}.\int_1^\infty t^{2(\sigma+\delta m)+(j+\ell)(1-\delta)} D^j u\,\overline{D^\ell v}\,dt .$$

Posons $V = \{u \in W^m_{\sigma,\delta}$, Supp $u \subseteq [1,\infty[\}$ muni de la norme canonique. Il est clair que α est V-coercif et α_{t_o} est $H^m(]1,\infty[)$-coercif (H^m : espace de Sobolev usuel).

Soient alors A (resp. A_{t_o}) l'opérateur engendré par α (resp. α_{t_o}) et $G_\lambda = (A+\lambda)^{-1}$, $G_{\lambda,t_o} = (A_{t_o}+\lambda)^{-1}$ pour $\lambda \geqslant \gamma_o$, γ_o assez grand.

G_{λ,t_o} a un noyau donné par :

$$G_{\lambda,t_o}(t,\tau) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i(t-\tau).\xi}d\xi}{t_o^{2(\sigma+\delta m)}.\omega(t_o^{1-\delta}\xi) + \lambda}$$

où l'on a posé :

$$\omega(\eta) = \sum_{0\leqslant j,\ \ell\leqslant m} \alpha_{j,\ell}.\eta^{j+\ell} \ , \quad \eta \in \mathbb{R} .$$

L'estimation suivante est essentielle (nous l'admettrons).

LEMME 1. - Il existe $C > 0$ telle que :

$$|G_\lambda(t,t) - G_{\lambda,t}(t,t)| \leqslant$$

$$\leqslant C\, t^{\delta-1((\sigma+\delta m)/m)}.(t^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{-1+(1/2m)}\left[\varepsilon + \varepsilon^{-m} \frac{t^{-1+(\sigma+\delta m)/m}}{(t^{2(\sigma+\delta m)} + \lambda)^{1/2m}}\right]$$

pour $t \geqslant 2$, $\lambda \geqslant \gamma_o$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$.

Un calcul explicite prouve que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{1-\alpha} \int_1^\infty G_{\lambda,t}(t,t)dt = (2\pi\ \delta)^{-1}(\mathrm{Sin}\ \pi\alpha)^{-1}\pi\alpha \int_{\mathbb{R}} \omega(\xi)^{-\alpha}d\xi .$$

Utilisant alors le lemme 1 en faisant $\lambda \to +\infty$ puis $\varepsilon \to 0$ on obtient (i_2).

2ème cas : $\delta \in \,]0,1[$. - On construit une paramètrix à droite pour $L(t,D_t) + \lambda$ sur $[1,\infty[$. Posons :

$$L_o(t,D_t) = \sum_{0\leqslant j,\ \ell\leqslant m} \alpha_{j\ell}\ t^{2(\sigma+\delta m)+(j+\ell)(1-\delta)} D_t^{j+\ell}$$

et
$$L_1 = L - L_o .$$

Suivant le schéma classique de Hörmander on construit une paramètrix à droite en posant :

$$b_{o,\lambda}(t,\xi) = (L_o(t,\xi) + \lambda)^{-1}$$

$$b_{j+1}(t,\xi) = - b_{o,\lambda} \sum_{\substack{i+\alpha=j-k+1\\ 0\leqslant k\leqslant j\\ i=o,1}} \frac{1}{\alpha!}\ \partial_\xi^\alpha L_i.D_t^\alpha b_{k,\lambda} \quad \text{pour } j \text{ entier} \geqslant 0 .$$

Posons : $B_{N,\lambda} = b_{o,\lambda} + \dots + b_{N,\lambda}$ N entier $\geqslant 0$, on a alors :

$$(L(t,D_t) + \lambda)B_{N,\lambda} = 1 + R_{N,\lambda}$$

où
$$R_{N,\lambda}(t,\xi) = \sum_{\substack{\gamma+k\geqslant N+1\\ k\leqslant N}} \frac{1}{\gamma!}\ \partial_\xi^\gamma L_o.D_t^\gamma b_{k,\lambda} + \sum_{\substack{\gamma+k\geqslant N\\ k\leqslant N}} \frac{1}{\gamma!}\ \partial_\xi^\gamma L_1.D_t^\gamma b_{k,\lambda} .$$

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que Supp $\chi \subseteq [1,\infty[$, $\chi \equiv 1$ sur $[2,\infty[$. On a :

$$\chi.B_{N,\lambda} - (A+\lambda)^{-1}.\chi = (A+\lambda)^{-1}\chi R_{N,\lambda} + (A+\lambda)^{-1}[L,\chi]B_{N,\lambda}$$

où $[\ ,\ ]$ désigne le commutateur de deux opérateurs.

On estime le noyau de chacun des termes de cette égalité à l'aide du :

LEMME 2. - Pour tous entiers p, q, $N \geqslant 0$, il existe $c(N,p,q) > 0$ telle que :

$$|\partial_\xi^p D_t^q b_{N,\lambda}| \leqslant C(N,p,q)|b_{o,\lambda}| \sum_{\ell=1}^{2N+p+q} |L_o.b_{o,\lambda}|^{\ell}(\phi.\varphi)^{-N}\phi^{-p}\varphi^{-q}$$

pour tout $(t,\xi) \in [1,\infty[\times \mathbb{R}$, $\lambda \geqslant 0$.

Le lemme 2 permet de prouver (i_2) dans le cas des coefficients constants à l'infini.

Ensuite nous établissons (ii_2) dans le cas des coefficients constants à l'infini. Pour cela on considère un entier $p > \alpha$.

Posons $G_\lambda^{(p)} = (A^p + \lambda)^{-1}$. On a : $G_\lambda^{(p)} \in \mathcal{L}(W^{-m}_{\sigma,\delta}, W^{m}_{\sigma,\delta})$.

Il en résulte que $G_\lambda^{(p)}$ a un noyau continu sur $]0,\infty[\times]0,\infty[$. De plus : $t \to G_\lambda^{(p)}(t,t)$ est localement intégrable sur $]0,\infty[$.

LEMME 3. - Sous les hypothèses précédentes on a :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{1-(\alpha/p)}.\int_o^T G^{(p)}(t,t)dt = 0$$

Procèdant comme pour traiter le cas $\alpha < 1$ on prouve la :

PROPOSITION 2. -

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{1-(\alpha/p)} \int_o^\infty G_\lambda^{(p)}(t,t)dt = (2\pi\delta)^{-1}(\mathrm{Sin}\ (\frac{\pi\alpha}{p}))^{-1}(\frac{\pi\alpha}{p}).\int_{\mathbb{R}} \omega_\infty(\xi)^{-\alpha}d\xi \ .$$

De la proposition 2 et du théorème taubérien de Hardy-Littlewood on en déduit (ii_2) dans le cas où les coefficients de $L(t,D_t)$ sont constants à l'infini. Le passage des coefficients constants aux coefficients variables se fait de la manière suivante. Pour $\varepsilon \in]0,1[$ posons :

$$a_{j\ell}^{(\varepsilon)}(t) = \begin{cases} a_{j\ell}(\infty) & \text{pour} \quad t \geqslant T(\varepsilon) \\ a_{j\ell}(t) & \text{pour} \quad o \leqslant t < T(\varepsilon) \end{cases}$$

où $T(\varepsilon)$ est tel que : $|a_{j\ell}(t) - a_{j\ell}(\infty)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \geqslant T(\varepsilon)$.

Posons alors :

$$a_\varepsilon(u,v) = \sum_{o\leqslant j,\ \ell\leqslant m} \int_o^\infty a_j^{(\varepsilon)}(t)\, t^{2(\sigma+\delta m)+(j+\ell)(1-\delta)} D^j u\ \overline{D^\ell v}\ dt$$

pour u et $v \in W^m_{\sigma,\delta}$, on a clairement :

$$|a(u,v) - a_\varepsilon(u,v)| \leqslant \varepsilon \|u\|_{W^m_{\sigma,\delta}} \cdot \|v\|_{W^m_{\sigma,\delta}} .$$

D'où il résulte que pour ε assez petit, a_ε est $W^m_{\sigma,\delta}$-coercive.

D'autre part il existe C, $C_o > 0$ tels que :

$$|a(u,u) - a_\varepsilon(u,u)| \leqslant C.\varepsilon.a_\varepsilon(u,u) + C_o \|u\|^2_{L^2}$$

pour tout $u \in W^m_{\sigma,\delta}$.

Soit $(\lambda_j^{(\varepsilon)})_{j \geqslant o}$ la suite des valeurs propres relatives à a_ε .

De la formule du Max-Min (Courant-Hilbert ([4])) on déduit :

$$- C_o + (1 - C_\varepsilon)\lambda_j^{(\varepsilon)} \leqslant \lambda_j \leqslant (1 + C_\varepsilon)\lambda_j^{(\varepsilon)} + C_o$$

pour tout $j \geqslant 0$, ε assez petit.

Posons $N_\varepsilon(\lambda) = \sum_{\lambda_j^{(\varepsilon)} < \lambda} 1$. On obtient alors :

$$\begin{cases} N_\varepsilon\left(\dfrac{\lambda}{1 + C_\varepsilon}\right) \leqslant N(\lambda + C_o) \\ N(\lambda - C_o) \leqslant N_\varepsilon\left(\dfrac{\lambda}{1 - C\varepsilon}\right). \end{cases}$$

Si $\gamma = (2\pi\delta)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \lambda^{-\alpha}(\xi)d\xi$ on a :

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-\alpha} N_\varepsilon(\lambda) = \gamma \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon \in]0,1[.$$

D'où l'on tire :

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-\alpha} N(\lambda) = \gamma .$$

Ce qui prouve (ii_2). On en déduit (i_2) par le théorème réciproque de Hardy-Littlewood ([1]).

BIBLIOGRAPHIE

([1]) S. AGMON, Lectures on elliptic value problems, Van Nostrand, Math. Studies n°2 (1965).

([2]) P. BOLLEY, J. CAMUS et B. HELFFER, Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques, J. Math. Pures Appl. 55 (1976), n°2, 131-171.

([3]) P. BOLLEY, J. CAMUS et PHAM THE LAI, Noyau, résolvante et valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés, Exposé à ce colloque.

(4) R. COURANT and D. HILBERT, Methods of mathematical physics 1, John Wiley, Interscience Publishers (1953).

(5) V. V. GRUSHIN and M. A. SAVSAN, Smoothness of the solutions of boundary-value problems for a class of elliptic equations of arbitrary order which degenerate on the boundary or the domain, Vestnik Moskov. Univ. Mat. 30 (1975), n°5, 33-41.

(6) B. M. LEVITAN and S. SARGSJAN, Introduction to spectral theory, Trans. of Math. monographs 39, American Mathematical Society (1975).

(7) A. MOHAMED, Régularité et théorie spectrale d'une classe d'équations différentielles singulières sur une demi-droite, Thèse de Doctorat de 3ème cycle, Université de Nantes (1977).

(8) PHAM THE LAI, Comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés non nécessairement auto-adjoint, J. Math. Pures Appl. 55 (1976), n°4, 379-420.

(9) PHAM THE LAI, Théorie spectrale d'une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques, Comm. Partial Differential Equations 2 (1977), n° 5, 439-497.

(10) D. ROBERT, Propriétés spectrales d'opérateurs pseudo-différentiels, (à paraître).

UNIVERSITE DE NANTES
Institut de Mathématiques et d'Informatique
B. P. 1044 - 44072 NANTES CEDEX