

ÉLISABETH CROC

YVES DERMENJIAN

VIOREL IFTIMIE

**Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels
partiellement hypoelliptique-analytiques**

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 59-65

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977__59_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE CLASSE D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS
PARTIELLEMENT HYPOELLIPTIQUE-ANALYTIQUES

Elisabeth CROC
Yves DERMENJIAN
Viorel IFTIMIE

I - INTRODUCTION

Comme cet exposé généralise [1] les démonstrations similaires ne seront pas répétées.

Précisons quelques données valables pour tout l'article. Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n où la variable est notée $x = (x', x'')$ avec $x' = (x_1, \dots, x_p)$ et $x'' = (x_{p+1}, \dots, x_n)$, p étant un entier fixé une fois pour toute.

Définition 1.1.

Une distribution u sur Ω est dite partiellement analytique en x' (p.a. en x') si pour tout couple d'ouverts $U \subset \mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^{n-p}$, $U \times V \subset \Omega$ et toute fonction $\psi \in C_0^\infty(V)$, la distribution u_ψ sur U définie par

$$u_\psi : \phi(x') \longrightarrow \langle u(x', x''), \phi(x') \psi(x'') \rangle$$

est une fonction analytique.

Définition 1.2.

Un opérateur linéaire $P : \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ est dit partiellement hypoelliptique-analytique en x' (p.a. en x') si pour tout ouvert $U \subset \Omega$ et toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$

$$Pu|_U \text{ p.a. en } x' \implies u \text{ est p.a. en } x'.$$

Nous donnons une condition suffisante avec le théorème 1.5. pour avoir un opérateur partiellement hypoelliptique-analytique.

Gårding et Malgrange ont résolu entièrement ce problème en 1961 lorsque P est un opérateur différentiel à coefficients constants ([3]). Jöran Friberg ([2]) dans sa thèse, en 1963, a défini, entre autres choses, une classe d'opérateurs différentiels, P , à coefficients variables, tels que si $Pu = 0$ et u a une certaine régularité en x'' alors u est partiellement analytique en x' . Nous pouvons montrer de plus,

- que ces opérateurs vérifient les conditions du théorème 1.5. et donc que nous considérons une classe plus générale d'opérateurs,
- que notre résultat est plus général, même dans le cas des opérateurs différen-

tiels de Friberg, puisque nous ne supposons aucune régularité en x'' pour les solutions de $Pu = 0$.

En outre, nous construisons une paramétrix locale de ces opérateurs

Considérons un opérateur linéaire $P : \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ et U un ouvert de Ω , nous supposons, de plus, que $Pu = f$ où f est une distribution dont la restriction à U est partiellement analytique. Si $\phi \in C_0^\infty(\omega)$ est telle que $\phi = 1$ sur U , nous pouvons écrire :

$$u = (I - Q\phi P)u + Q\phi Pu = (I - Q\phi P)u + Q\phi f$$

où Q est un autre opérateur linéaire de $\mathcal{E}'(\omega)$ dans $\mathcal{D}'(\omega)$, $\bar{U} \subset \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$.

Nous pouvons conclure que la restriction de u à U est partiellement analytique en x' si nous avons les deux résultats suivants :

a) Q et P appartiennent à une classe \mathcal{C} d'opérateurs telle que

$$u|_U \text{ p.a. en } x' \implies Ru|_U \text{ est p.a. en } x' \text{ si } R \in \mathcal{C}.$$

b) $I - Q\phi P$ est un opérateur régularisant, c'est-à-dire :

$$(I - Q\phi P)(\mathcal{E}'(\omega))|_U \subset \mathcal{D}'_{\text{p.a.}}(U).$$

$\mathcal{D}'_{\text{p.a.}}(\Omega)$ désigne l'ensemble des distributions sur Ω partiellement analytiques en x' sur Ω .

Ainsi nos objectifs et notre méthode sont clairs.

Remarque 1.3.

On sait que si P est un opérateur différentiel à coefficients constants une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit hypoelliptique est qu'il existe une constante C telle que pour tout multi-indice β , on ait :

$$\left| \frac{P^{(\beta)}(\xi)}{P(\xi)} \right| \leq C (1 + |\xi|)^{-\rho} |\beta| \quad \text{si } |\xi| > C.$$

Si $\rho = 1$, c'est d'ailleurs une condition nécessaire et suffisante pour l'hypoellipticité-analytique (P est alors elliptique).

Hörmander ([4]) en a tiré partie pour donner une condition suffisante afin qu'un opérateur pseudo-différentiel P , de symbole p , soit hypoelliptique $-C^\infty$:

$$\left| \frac{P^{(\beta)}(x, \xi)}{P(x, \xi)} \right| \leq C_{K, \alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m-\rho} |\beta| + \delta |\beta| \quad \text{si } |\xi| > R$$

$$|p^{-1}(x, \xi)| \leq C_K (1 + |\xi|)^m \quad \text{si } |\xi| > R.$$

Remarque 1.4.

Gårding et Malgrange ont montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur différentiel P , à coefficients constants, soit partiellement hypoelliptique-analytique s'écrivait comme suit :

$$\left| \frac{p^{(\beta)}(\xi)}{p(\xi)} \right| < C(1 + |\xi'|)^{-|\beta|} \quad \text{si } |\xi'| > R$$

Poursuivant l'analogie avec la remarque 1.3. on obtient le résultat principal sous la forme du :

Théorème 1.5.

Nous supposons que $p \in S_A^{m', m''}(\Omega)$ et que pour tout compact K de Ω et tous multi-indices α, β , il existe des constantes positives A_K, C_K, R_K telles que :

$$|p^{(\beta)}(x, \xi) p^{-1}(x, \xi)| \leq C_K A_K^{|\alpha+\beta|} \alpha! \alpha''!^s \beta! (1 + |\xi'|)^{-|\beta|}, \quad \text{si } x \in K \text{ et } |\xi'| > R_K$$

et

$$|p^{-1}(x, \xi)| \leq C_K (1 + |\xi'|)^{\tilde{m}'} (1 + |\xi''|)^{\tilde{m}''}, \quad \text{si } x \in K \text{ et } |\xi'| > R_K.$$

On peut même supposer que \tilde{m}' et \tilde{m}'' dépendent du compact K .

Alors l'opérateur P associé au symbole p par la formule

$$(Pu)(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} p(x, \xi) u(y) dy d\xi \quad \text{lorsque } u \in C_0^\infty(\Omega) \text{ et } x \in \Omega,$$

est partiellement hypoelliptique-analytique en x' .

On désigne par s un nombre réel strictement positif et qui sera fixé, une fois pour toute, dans cet exposé. On peut le supposer supérieur à 2, par exemple.

II - METHODES

Définition 2.1.

Si m', m'' sont réels et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $S_A^{m', m''}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ est l'ensemble des fonctions p de $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ telles que pour tout compact K de Ω et tous multi-indices α, β , il existe des constantes A_K, R_K, C_K ne dépendant que de K et $C_{K, \beta}$ ne dépendant que de K et β , telles que :

$$(2.1) \quad |D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{K, \beta} A_K^{|\alpha|} \alpha! \alpha''!^s (1 + |\xi'|)^{m' - |\beta|} (1 + |\xi''|)^{m''}, \quad \text{si } x \in K \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^N$$

$$(2.2) \quad |D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{K, \beta} A_K^{|\alpha| + |\beta|} \alpha! \alpha''!^s \beta! (1 + |\xi'|)^{m' - |\beta|} (1 + |\xi''|)^{m''},$$

si $x \in K$ et $\xi' \in \mathbb{R}^N$ avec $|\xi'| > R_K$

On pose $\xi = (\xi', \xi'')$ où $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ et $\xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_N)$, k étant un entier fixé, compris entre 1 et N . Si $n = N$ et $p = k$ on écrira $S_A^{m', m''}(\Omega \times \mathbb{R}^N) = S_A^{m', m''}(\Omega)$.

Définition 2.2.

$L_A^{m', m''}(\Omega)$ désigne l'ensemble des opérateurs, P , linéaires de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $C^\infty(\Omega)$ qui s'écrivent :

$$(2.3) \quad (Pu)(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} p(x, \xi) u(y) dy d\xi$$

où $p \in S_A^{m', m''}(\Omega)$.

Si $a(x, y, \xi)$ appartient à $S_A^{m', m''}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^N)$ ($k = p$) on a le :

Théorème 2.2.

1. Le noyau, K_A , de l'opérateur linéaire continu A de $\mathcal{L}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ défini par l'égalité

$$(2.4) \quad (Au)(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, y, \xi) u(y) dy \text{ lorsque } u \in C_0^\infty(\Omega)$$

est partiellement analytique en (x', y') sur $\Omega \times \Omega \setminus \Delta$ (Δ désigne la diagonale de $\Omega \times \Omega$).

2. Si $u \in C_0^\infty(\Omega)$, Au est partiellement analytique en x' sur $\Omega \setminus \text{supp } u$.

3. Si $P \in L_A^{m', m''}(\Omega)$, $u \in \mathcal{L}'(\Omega)$ et $u|_U$ est partiellement analytique en x' alors $Pu|_U$ est partiellement analytique en x' sur l'ouvert $U \subset \Omega$.

Les démonstrations de ces théorèmes figurent dans [1] (voir les théorèmes 4.1, 4.3 et le corollaire 4.2) et utilisent, en particulier, le théorème 2.4. et le lemme 2.2. de [2].

Nous avons ainsi trouvé la classe \mathcal{C} du I/a), à savoir, $L_A^{m', m''}(\Omega)$. Il nous reste à résoudre le point b) du I. Pour cela il faut introduire la notion de somme asymptotique puis examiner la composition des opérateurs.

Théorème 2.3.

Soit une suite $\{p_j\}_0^\infty$, où $p_j \in S_A^{m'-j, m''}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$, telle que, pour tout compact K de Ω , il existe des constantes A_K, R_K et C_K vérifiant pour tout entier j et tous multi-indices α, β :

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p_j(x, \xi)| \leq C_K A_K^{j+|\alpha|+|\beta|} \alpha! \alpha''!^s \beta! j!^s (1+|\xi'|)^{m'-j-|\beta|} (1+|\xi''|)^{m''}$$

lorsque $x \in K$, $|\xi'| > R_K$, $j = 0, 1, 2, \dots$

alors, pour tout ouvert $\omega \subset \subset \Omega$, il existe $p \in S_{A, \alpha}^{m', m''}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ tel que $p \sim \sum_0^{\infty} p_j$ sur ω , c'est-à-dire :

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta (p - \sum_{j=0}^{m-1} p_j)(x, \xi)| \leq C_K A_K^{m+|\alpha|+|\beta|} \alpha'! \alpha''!^s \beta! m!^s (1+|\xi'|)^{m'-m-|\beta|} (1+|\xi''|)^{m''}$$

lorsque $x \in K$, $|\xi'| > R_K$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Pour obtenir ce théorème il faut reprendre le chapitre III de [1] avec de légères modifications (on peut relire avec profit ([5])):

- dans le lemme 3.6. on remplace $(j + |\alpha|)!$ par $\alpha'!(j + |\alpha''|)!^s$
- dans la proposition 3.7., au lieu de (3.6) on obtient :

$$N_{K, m', m''}(\{p_j\}, T) \ll N_{K, m', m''}(\{p_k\}, T) \cdot N_{K, m', m''}(\{q_\ell\}, eT)$$

- dans le lemme 3.8. on remplace les conditions sur p par des conditions sur $D_{x''}^{\alpha''} p$ et, en particulier, on remplace (3.7) par :

$$|D_{x''}^{\alpha''} p(z', x'', \zeta)| \leq C_K A_K^{|\alpha''|} \alpha''!^s (1 + |\xi'|)^{m'} (1 + |\xi''|)^{m''}$$

où (z', x'', ζ) appartient à $K_\varepsilon \times C_{\varepsilon, R_K}$ avec

$$K_\varepsilon = \{(z', x'') \in \mathbb{C}^P \times \mathbb{R}^{n-P}; d((z', x''), K) < \varepsilon\}$$

et $C_{\varepsilon, R_K} = \{\zeta \in \mathbb{C}^N; \exists \xi \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } |\xi'| \geq R_K \text{ et } |\zeta - \xi| < \varepsilon(1 + |\xi'|)\}$

- dans les lemmes 3.9. et 3.10. les inégalités (3.8) et (3.9) deviennent respectivement :

$$|D_{x''}^{\alpha''} p_j(z', x'', \zeta)| \leq C_K A_K^{j+|\alpha''|} j!^s \alpha''!^s (1 + |\xi'|)^{m'-j} (1 + |\xi''|)^{m''}$$

$$|\sum_{j=0}^{m-1} D_{x''}^{\alpha''} (p_j - q_j)(z', x'', \zeta)| \leq C_K A_K^{m+|\alpha''|} m!^s \alpha''!^s (1 + |\xi'|)^{m'-j} (1 + |\xi''|)^{m''}$$

- on peut réécrire le théorème 3.11 après avoir démontré le lemme suivant :

Si $S_{A, s}$ désigne l'espace des suites $S = (S_j)_{j=0, 1, \dots}$ telles que

$$\|S\|^2 = \sum_j \left| \frac{S_j}{A^j j!^s} \right|^2 < \infty \text{ et } V_\varepsilon \text{ l'espace des fonctions holomorphes bornées dans}$$

l'angle $|\text{Im}t| < \varepsilon |\text{Re}t|$ alors pour tout A , il existe des constantes ε, C, B

et une application linéaire continue $U : S_{A, s} \longrightarrow V_\varepsilon$ telle que si $g = U(S)$ on ait :

$$|g(t) - \sum_{j=0}^{m-1} S_j t^{-j}| \leq C B^m m!^s |t|^{-m} \|S\|.$$

Théorème 2.4.

Soient $p \in S_A^{m', m''}(\Omega)$ et $q \in S_A^{\tilde{m}', \tilde{m}''}(\Omega)$, P et Q les opérateurs (2.3) correspondants, ω un ouvert de Ω vérifiant $\bar{\omega} \subset \Omega$ et $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que ϕ soit égale à 1 sur $\bar{\omega}$. Alors $Q\phi P|_\omega$ diffère par un opérateur régularisant sur ω , d'un opérateur $R \in L_A^{m'+\tilde{m}', m''+\tilde{m}''}(\omega)$ de symbole r équivalent sur ω au composé de p et q :

$$r(x, \xi) \sim \sum_{\gamma} \frac{1}{\gamma!} \partial_{\xi}^{\gamma} q(x, \xi) D_x^{\gamma} p(x, \xi)$$

Pour arriver à ce résultat on suit la méthode de [1] mais en apportant quelques modifications à la démonstration du théorème 4.4, la proposition 4.7 et le corollaire 4.8 restant inchangés. Avant la première étape on commence par réduire le symbole $a(x, y, \xi)$ à un symbole $\tilde{a}(x, y', \xi)$, partiellement analytique, tel que les deux opérateurs ainsi définis par la formule (2.4), soient égaux. Pour cela on suppose que $a(x, y, \xi)$ est à support compact en y'' et cela est possible car il y a des fonctions à support compact dans les classes de Gevrey d'ordre $s > 1$ (lorsque $s = 1$, il faut revenir à [1]). Après avoir écrit l'égalité formelle de ces 2 opérateurs, définis à partir de a et \tilde{a} , on obtient, en utilisant les méthodes usuelles des opérateurs pseudo-différentiels (voir [4], page 103 et suivantes), un développement asymptotique de $\tilde{a}(x, y, \xi)$ de la forme :

$$(2\pi)^{(n-p)} \sum_{\alpha''} \frac{1}{\alpha''!} D_{y''}^{\alpha''} \partial_{\xi''}^{\alpha''} a(x, y', y'', \xi) |_{y''=x''} ,$$

x' et y' jouant le rôle de paramètres. On obtient alors des majorations nous permettant d'aborder la première étape avec $\tilde{a}(x, y', \xi)$ où le paramètre est, cette fois-ci, x'' .

Pour répondre au point I/b), et terminer la démonstration du théorème 1.5 on démontre des résultats analogues aux lemmes 5.1, 5.2 et 5.3 de [1] qui permettent de construire une paramétrix à gauche de l'opérateur P .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. CROC, Y. DERMENJIAN, V. IFTIMIE - "Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels partiellement hypoelliptique-analytiques" à paraître au "Journal de mathématiques pures et appliquées" (fasc 3), 1978.
- [2] J. FRIBERG - "Estimates for partially hypoelliptic differential operators" Communications du séminaire mathématique de l'Université de Lund, Tome 17 ; 1963, p. 1-97.

- [3] L. GÅRDING et B. MALGRANGE - "Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques", Math. Scand. 9 (1961) , p. 5-21.
- [4] L. HÖRMANDER - "Fourier integral operators I" , Acta Math. 127 : 1-2 (1971) , p. 79-183.
- [5] L. BOUTET de MONVEL - "Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini" , Annales de l'Institut Fourier, Tome XXII, fasc. 3, p. 229-268.

Elisabeth CROC
Centre Universitaire de Toulon
Chateau Saint-Michel
83130 LA GARDE

Yves DERMENJIAN
Université PARIS-NORD
C.S.P. Département de Mathématiques
Avenue J.B. Clément,
93430 VILLETANEUSE

Viorel IFTIMIE
Université de Bucarest
Faculté de Mathématiques
14, rue Academici,
BUCAREST (Roumanie)