

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ANNE-MARIE CHARBONNEL

PHAM THE LAI

**Estimation du  $n$ ème diamètre dans  $L^p$  de la boule unité d'une classe d'espaces de Sobolev à poids mixte**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1978), p. 1-2

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1978\\_\\_\\_\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978____A7_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ESTIMATION DU Nième DIAMETRE DANS  $L^p$  DE  
LA BOULE UNITE D'UNE CLASSE D'ESPACES  
DE SOBOLEV A POIDS MIXTE

par A. M. CHARBONNEL et PHAM THE LAI

On s'intéresse à une classe d'espaces de Sobolev à poids mixte, définis sur un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^m$  et associés à une classe d'opérateurs à dégénérescence mixte, étudiés par P. Bolley, J. Camus et Pham The Lai [2].

Soit  $\Omega$  une variété à bord, de bord  $\Gamma$ , et  $\varphi$  une fonction  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que  $\Omega = \{x; \varphi(x) > 0\}$

$$\Gamma = \{x; \varphi(x) = 0\} \text{ avec } \text{grad} \varphi_x \neq 0 \quad \forall x \in \Gamma.$$

Soit  $(X_i)_{0 \leq i \leq q}$ ,  $(q+1)$  champs de vecteurs de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^m$ , tels que :

$X_0(x)$  est transversal à  $\Gamma$  en tout point

$X_i(x)$ , pour  $1 \leq i \leq q$ , est tangent à  $\Gamma$  en tout point .

Le rang du système  $(X_i(x))_{0 \leq i \leq q}$  est  $m$  en tout point  $x$  de  $\bar{\Omega}$ .

On définit l'espace :

$$W_{\chi, \delta}^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega); \varphi^{(-\chi + \delta(|\beta'| + \beta_0))} X^\beta u \in L^p(\Omega) \quad \forall \beta: |\beta| \leq k\}$$

où  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ ,  $\delta > 0$ ,  $\chi > 0$ ,  $1 < p < +\infty$ ,

$$\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q) = (\beta_0, \beta') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^q,$$

$Y u$  est la dérivée de  $u$  suivant le champ de vecteurs  $Y$ .

$$X^\beta = X_0^{\beta_0} \cdot X_1^{\beta_1} \dots X_q^{\beta_q}.$$

Muni de sa norme naturelle,  $W_{\chi, \delta}^{k,p}(\Omega)$  est un espace de Banach, vérifiant l'injection :

$$W_{\chi, \delta}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

On cherche à déterminer une estimation asymptotique de  $d_n$ , nième diamètre de la boule unité de  $W_{\chi, \delta}^{k,p}(\Omega)$  dans  $L^p(\Omega)$ .

Le cas  $p=2$  a été étudié par P. Bolley, J. Camus et Pham The Lai [2] et celui correspondant à  $\delta=1$  par A. Mohamed et Pham The Lai [6], El Kolli ayant obtenu auparavant une estimation du nième diamètre dans  $L^p(\Omega)$  de la boule unité de  $W_{\chi, 1}^{0k,p}(\Omega)$ , adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W_{\chi, 1}^{k,p}(\Omega)$ .

Le résultat est le suivant, que l'on pourra rapprocher des résultats exposés par Sjöstrand :

Théorème : On suppose  $\chi \leq \min(k, \delta k)$  et  $\chi \neq \frac{1}{p}$ . On a alors les estimations :

$$1) \quad m = 1 \quad d_n \approx n^{-k}$$

$$2) \quad m \neq 1 \quad m_0 = \frac{\delta k}{-\chi + \delta k}$$

$$(i) \quad m < m_0 \quad d_n \approx n^{-k/m}$$

$$(ii) \quad m = m_0 \quad d_n \approx \left(\frac{\text{Log } n}{n}\right)^{k/m_0}$$

$$(iii) \quad m > m_0 \quad d_n \approx n^{-\chi/\delta(m-1)}$$

où la notation  $u_n \approx v_n$  pour deux suites de nombres réels  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  signifie :

$$\exists A > 0 \text{ et } B > 0, \quad N \text{ tels que : } Au_n \leq v_n \leq Bu_n \quad \forall n \geq N.$$

### Références

- [1] P. Bolley et J. Camus : Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids. Séminaire d'analyse fonctionnelle - Rennes (1968-69).
- [2] P. Bolley, J. Camus et Pham The Lai : Une classe d'espaces de Sobolev à poids. (A paraître).
- [3] A. El Kolli : Nième épaisseur dans les espaces de Sobolev avec poids. Séminaire Goulaouic-Schwartz, exposé n° 27 (1971-72).
- [4] J. L. Lions et J. Peetre : Sur une classe d'espaces d'interpolation (Publications de l'I.H.E.S. 19 (1964) 5-68).
- [5] P. Grisvard : Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 17 n° 7 (1963).
- [6] A. Mohamed et Pham The Lai : Remarques sur les nièmes diamètres d'une classe d'espaces de Sobolev avec poids. Séminaire de Rennes (1977).