Journées Équations aux dérivées partielles

Anne-Marie Charbonnel
Pham The Lai

Estimation du $n$ième diamètre dans L^p de la boule unité d'une classe d'espaces de Sobolev à poids mixte

Journées Équations aux dérivées partielles (1978), p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978____A7_0>

Conférence n° 7

ESTIMATION DU Nième DIAMETRE DANS L^p DE LA BOULE UNITE D'UNE CLASSE D'ESPACES DE SOBOLEV A POIDS MIXTE

par A. M. CHARBONNEL et PHAM THE LAI

On s'intéresse à une classe d'espaces de Sobolev à poids mixte, définis sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^m$ et associés à une classe d'opérateurs à dégénérescence mixte, étudiés par P. Bolley, J. Camus et Pham The Lai [2].

Soit Ω une variété à bord, de bord Γ, et φ une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\Omega = \{x; \varphi(x) > 0\}$

$$\Gamma = \{x; \varphi(x) = 0\} \text{ avec } \operatorname{grad} \varphi_x \neq 0 \quad \forall x \in \Gamma .$$

Soit $(X_i)_{0 \le i \le q}$, $(q+1)$ champs de vecteurs de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^m$, tels que :

$X_0(x)$ est transversal à Γ en tout point

$X_i(x)$, pour $1 \le i \le q$, est tangent à Γ en tout point .

Le rang du système $(X_i(x))_{0 \le i \le q}$ est m en tout point x de $\bar{\Omega}$.

On définit l'espace :

$$W^{k,p}_{\chi,\delta}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) ; \varphi^{(-\chi+\delta|\beta'|+\beta_0)t} X^\beta u \in L^p(\Omega) \quad \forall \beta : |\beta| \le k\}$$

où $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 1$, $\delta > 0$, $\chi > 0$, $1 < p < +\infty$,

$\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q) = (\beta_0, \beta') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^q$,

Yu est la dérivée de u suivant le champ de vecteurs Y.

$X^\beta = X_0^{\beta_0} . X_1^{\beta_1} \dots X_q^{\beta_q}$.

Muni de sa norme naturelle, $W^{k,p}_{\chi,\delta}(\Omega)$ est un espace de Banach, vérifiant l'injection :

$$W^{k,p}_{\chi,\delta}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) .$$

On cherche à déterminer une estimation asymptotique de d_n, nième diamètre de la boule unité de $W^{k,p}_{\chi,\delta}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$.

Le cas $p = 2$ a été étudié par P. Bolley, J. Camus et Pham The Lai [2] et celui correspondant à $\delta = 1$ par A. Mohamed et Pham The Lai [6], El Kolli ayant obtenu auparavant une estimation du nième diamètre dans $L^p(\Omega)$ de la boule unité de $\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\chi,1}(\Omega)$, adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{k,p}_{\chi,1}(\Omega)$.
Le résultat est le suivant, que l'on pourra rapprocher des résultats exposés par Sjöstrand :

<u>Théorème</u> : On suppose $\chi \leq \min(k, \delta k)$ et $\chi \neq \frac{1}{p}$. On a alors les estimations :

1) $m = 1$ $\quad d_n \approx n^{-k}$

2) $m \neq 1$ $\quad m_o = \dfrac{\delta k}{-\chi + \delta k}$

(i) $m < m_o$ $\quad d_n \approx n^{-k/m}$

(ii) $m = m_o$ $\quad d_n \approx \left(\dfrac{\operatorname{Log} n}{n}\right)^{k/m_o}$

(iii) $m > m_o$ $\quad d_n \approx n^{-\chi/\delta(m-1)}$

où la notation $u_n \approx v_n$ pour deux suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ signifie :

$$\exists\ A > 0 \text{ et } B > 0,\quad N \text{ tels que : } Au_n \leq v_n \leq Bu_n \quad \forall n \geq N .$$

<u>Références</u>

[1] P. Bolley et J. Camus : Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids. Séminaire d'analyse fonctionnelle - Rennes (1968-69).

[2] P. Bolley, J. Camus et Pham The Lai : Une classe d'espaces de Sobolev à poids. (A paraître).

[3] A. El Kolli : Nième épaisseur dans les espaces de Sobolev avec poids. Séminaire Goulaouic-Schwartz, exposé n° 27 (1971-72).

[4] J. L. Lions et J. Peetre : Sur une classe d'espaces d'interpolation (Publications de l'I.H.E.S. 19 (1964) 5-68).

[5] P. Grisvard : Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 17 n° 7 (1963).

[6] A. Mohamed et Pham The Lai : Remarques sur les nièmes diamètres d'une classe d'espaces de Sobolev avec poids. Séminaire de Rennes (1977).