Journées Équations aux dérivées partielles

Pham The Lai
Didier Robert

Sur un problème aux valeurs propres non linéaire

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A15_0>

Conférence n° 15

SUR UN PROBLEME AUX VALEURS PROPRES NON LINEAIRE

par PHAM THE LAI et D. ROBERT

I. Introduction

Soit $P(\lambda) = P_o + \lambda.P_1 + \ldots + \lambda^{m-1}P_{m-1} + \lambda^m$ un polynôme de la variable complexe λ dont les coefficients $P_o,\ldots,P_{m-1}$ sont des opérateurs différentiels à coefficients indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}^n$. Nous nous proposons de donner des conditions suffisantes pour qu'il existe $\lambda_o \in \mathbb{C}$ et $u_o \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus(0)$ espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide, tels que $P(\lambda_o).u_o = 0$. Dans ce cas, par analogie au cas classique (m=1), nous dirons que λ_o est une valeur propre et u_o un vecteur propre de la famille d'opérateurs $P(\lambda)$.

La motivation principale de ce travail est de donner un début de réponse à une question posée par B. Helffer [7]. Dans [7], l'auteur donne des exemples non triviaux d'opérateurs différentiels $A(x,D)$ à coefficients analytiques, hypoelliptiques et tels que l'équation $A(x,D)u = 0$ admette une solution non-analytique. Pour cela, on associe à $A(x,D)$ un polynôme à coefficients opérateurs différentiels $P(\lambda)$ et on construit la solution de $A(x,D)u = 0$ à partir d'une valeur propre et d'un vecteur propre de $P(\lambda)$. Par exemple, à l'opérateur $A = D_x^2 + (x^2D_y - D_z)^2$ est associé le polynôme : $P(\lambda) = D_x^2 + (x^2 - \lambda)^2$ et il résultera de notre travail que $P(\lambda)$ admet au moins un vecteur propre dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La recherche de vecteurs propres pour des polynômes à coefficients opérateurs a déjà fait l'objet de plusieurs travaux. Citons par exemple : Keldysh [9], Krein and Langer [10], Friedman and Shinbrot [5].

Cependant ces travaux ne sont pas directement applicables au cas différentiel considéré ici. Notre étude s'apparente plutôt aux travaux de S. Agmon [1] sur la résolvante des problèmes aux limites elliptiques.

La méthode d'Agmon consiste à contrôler la résolvante $(P_o + \lambda)^{-1}$, $|\lambda| \to +\infty$ dans des secteurs du plan complexe d'ouverture suffisante et à en déduire qu'il existe un système complet de vecteurs propres (généralisés) par le principe de Phragmen-Lindelöf. De plus Agmon donne une condition nécessaire et suffisante sur le symbole du problème pour avoir un contrôle optimal sur une demi-droite issue de l'origine, donnée dans $\mathbb{C}$.

Nous nous proposons de faire une étude analogue pour l'application $\lambda \mapsto P(\lambda)^{-1}$.

Dans [2] M. S. Baouendi et J. Sjöstrand ont fait ce type d'étude dans le cas où $P_o,\ldots,P_{m-1}$ sont des opérateurs définis sur la sphère S^n et où P_o est elliptique d'ordre m, P_j est un opérateur différentiel d'ordre m-j pour $1 \leq j \leq m-1$.

II. Enoncé des résultats

On suppose que P_o, $P_1,\ldots,P_{m-1}$ sont des opérateurs différentiels d'ordre $\leq$ m et vérifiant :

($\mathcal{H}$) Il existe un entier $k \geq 1$ tel que :

$$P(r^{\frac{1}{m}}.\lambda,\ r^{\frac{1}{k}}.x,\ r^{\frac{1}{m}}.\xi) = r.P(\lambda,x,\xi) \text{ pour tout } r>0,\ (\lambda,x,\xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

($\mathcal{E}$) $P(\rho,x,\xi) \neq 0$ pour tout $\rho \geq 0$, et tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus (0,0)$

($\mathcal{C}$) P_o prend ses valeurs dans un cône propre de $\mathbb{C}$, symétrique par rapport à l'axe réel.

Désignons par S_P le cône de $\mathbb{C}$:

$$S_P = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ;\ \text{il existe } (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus (0,0) \text{ tel que } P(\lambda,x,\xi) = 0\}$$

On sait que P_o admet un unique prolongement fermé à partir de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ comme opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ (voir [12]). Désignons alors par $D(P_o)$ le domaine de la fermetrue de P_o. En utilisant les résultats de [12] on peut voir facilement que : $D(P_o) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ x^\alpha D^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ pour } \frac{|\alpha|}{k} + \frac{|\beta|}{m} \leq 1\}$.

Posons la :

<u>Définition 1</u> : Soit $\theta \in [0,2\pi[$ et $\rho_o \geq 0$. Désignons par $\Delta(\theta,\rho_o)$ la demi-droite : $\{\rho e^{i\theta},\ \rho > \rho_o\}$. On dira que $\Delta(\theta,\rho_o)$ est un rayon de croissance minimale pour P s'il existe $C > 0$ telle que :

$$(*) \qquad \|P(\rho.e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n),D(P_o^s))} \leq \frac{C}{\rho^{m(1-s)}}$$

pour $\rho \geq \rho_o$ et $s \in \{0,1\}$.

Cette terminologie est empruntée à Agmon ([1]). On a besoin d'une seconde définition qui elle est empruntée à Kelysh ([9]) :

<u>Définition 2</u> : Soit $\lambda_o \in \mathbb{C}$ tel que $P(\lambda_o)$ n'est pas injectif. On appelle sous-espace propre généralisé de P associé à λ_o le sous-espace vectoriel de $D(P_o)$ noté $Sp_{\lambda_o}[P]$ engendré par les solutions $u_o, u_1, \dots, u_k$ des sytèmes :

$$(S_k) \quad \begin{cases} P(\lambda_o)u_o = 0 \\ P(\lambda_o)u_1 + \frac{dP}{d\lambda}(\lambda_o)u_o = 0 \\ \text{-------------------------} \\ P(\lambda_o)u_k + \frac{dP}{d\lambda}(\lambda_o)u_{k-1} + \dots + \frac{1}{k!}\frac{d^kP}{d\lambda^k}(\lambda_o)u_o = 0 \end{cases}$$

où k décrit $\mathbb{N}$.

<u>Proposition 1</u> : 1) Si $P(\lambda)^{-1}$ existe alors $P(\lambda)^{-1}$ est un opérateur compact de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

2) $\lambda \mapsto P(\lambda)^{-1}$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2, D(P_o^s))$ pour $s = 0$ ou 1.

3) $\dim_{\mathbb{C}} Sp_{\lambda_o}[P] < +\infty$.

Nous énonçons maintenant les résultats principaux de notre travail.

<u>Théorème 1</u> : Soit $\theta \in [0,2\pi[$. Il existe $\rho_o \geq 0$; tel que $\Delta(\theta,\rho_o)$ soit un rayon de croissance minimale pour P si et seulement si

$$\Delta(\theta,0) \subseteq \mathbb{C} \setminus Sp .$$

<u>Théorème 2</u> : Soient $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ tels que $\Delta(\theta_1,0) \cup \Delta(\theta_2,0) \subset \mathbb{C} \setminus Sp$ et $\theta_2 - \theta_1 < \frac{k\pi}{n(k+m)}$. S'il existe $\theta \in]\theta_1,\theta_2[$ tel que $\Delta(\theta,0) \subseteq S_p$ alors il existe $\lambda_o \in \mathbb{C}$, $\arg \lambda_o \in [\theta_1,\theta_2]$ tel que $P(\lambda_o)$ ne soit pas injectif.

<u>Théorème 3</u> : Soient $\Delta(\theta_1,0), \dots, \Delta(\theta_s,0)$ s demi-droites du plan complexe. On suppose :

i) $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_s \leq 2\pi$

ii) $|\theta_{j+1} - \theta_j| < \frac{k\pi}{n(m+k)}$ $\quad 1 \leq j \leq s-1$, $\quad \theta_1 < \frac{k\pi}{n(m+k)}$

$$|\theta_1 - \theta_s + 2\pi| < \frac{k\pi}{n(m+k)}$$

iii) $\Delta(\theta_j, 0) \subset \mathbb{C} \setminus S_P$ pour $j = 1, \ldots, s$.

Alors l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres généralisés de P est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Exemples : 1) $P(\lambda) = D_t^2 + (t^2 - \lambda)^2$.
Ici on a $S_P = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0\}$. Or :

$$\frac{k\pi}{n(k+m)} = \frac{2\pi}{1(2+1)} = \frac{2\pi}{3} .$$

C'est insuffisant pour conclure qu'il existe des valeurs propres. Mais la demi-droite $]0,+\infty[$ est dans la résolvante et il existe $C > 0$ telle que

$$\|P(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))} \leq C.\lambda \quad \text{pour tout } \lambda \geq 1.$$

On peut alors en déduire que le système des vecteurs propres généralisés de P est total dans $L^2(\mathbb{R})$.

2) $P(\lambda) = D_t^2 + t^2 + 2a\lambda t + 2b\lambda . D_t + \lambda^2$, a et b réels.

On a la conclusion du théorème 3 si $a^2 + b^2 < \frac{1}{2}$. Cependant par un calcul direct, B. Helffer ([7]) montre que la condition $a^2 + b^2 < 1$ suffit .

3) $P(\lambda) = -\Delta + |x|^{2k} + (\sum_{j=1}^{n} a_j . \frac{\partial}{\partial x_j})\lambda + \lambda^2$.

on a : $S_P = i\mathbb{R}$. La conclusion du théorème 3 s'applique .

---

[1] S. Agmon : Lectures on elliptic boundary value problem. Van Nostrand Math. Studies, n°2 (1965).

[2] Baouendi-Sjöstrand : Régularité analytique pour des opérateurs elliptiques singuliers en un point. Ark. för Mat. 14, 1976, 9-33.

[3] H. O. Cordes : On compactness of commutators of multiplications and convolutions and boundness of pseudodifferential operators. J. Funct. Anl. 18 (1975) 115-131.

[4] Dunford-Schwartz : t.2 Linear operators. Interscience, Publ.

[5] Friedman-Shinbrot : Nonlinear eigenvalue problems. Acta Math. 121 (1-2) 77-128 (1968).

[6] Gohberg-Krein : Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non autoadjoints. Dunod, 1972.

[7] B. Helffer : Remarques sur des résultats de G. Métivier sur la non-hypoanalyticité. Séminaire de l'Université de Nantes, exposé 9, 1978-79.

[8] Helffer-Nourrigat : Hypoellipticité pour des groupes nilpotents de rang de nilpotence 3. Comm. in P.D.E 3(8)-643-743 (1978).

[9] M. V. Keldysh : On the completness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators. Russian Math surveys, vol. 26, n° 4 (1971).

[10] Krein-Langer : On some mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua . Integral equations and operator theory. Vol.1-3, 364-399, 1978.

[11] G. Métivier : Une classe d'opérateurs non hypoelliptiques analytiques. Séminaire Goulaouic-Schwartz (1978-79).

[12] D. Robert : Propriétés spectrales d'opérateurs pseudodifférentiels. Comm. in P. D. E., 3 (9) 755-826 (1978).

[13] Titchmarch : The theory of functions. Oxford Univ. Press London (1939).

***