

LOUIS BOUTET DE MONVEL

**Convergence dans le domaine complexe des séries de fonctions propres**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1979), p. 1-2

<[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1979\\_\\_\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A3_0)>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CONVERGENCE DANS LE DOMAINE COMPLEXE  
DES SERIES DE FONCTIONS PROPRES

par L. BOUTET DE MONVEL

Soit  $X$  une variété analytique réelle compacte de dimension  $n$ ,  $\tilde{X}$  un complexifié de  $X$ ,  $P = P(x, D)$  un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 1, elliptique, de symbole positif, sur  $X$  - par exemple  $P = \sqrt{-\Delta}$  où  $\Delta$  est le Laplacien d'une métrique riemannienne à coefficients analytiques. On suppose que  $P$  satisfait à la condition suivante :

- (C) Pour tout  $x \in X$ , l'ensemble des covecteurs  $\xi$  en  $x$  tels que  $\sigma(P)(\xi) \leq 1$  est strictement convexe.

Notons  $\Xi$  le champ hamiltonien du symbole de  $P$ , et  $\Phi = \Phi(t, x, \xi)$  son flot intégral :  $\Phi(t, x, \xi)$  est la valeur à l'instant  $t$  de la solution de l'équation différentielle  $\frac{d}{dt}(x, \xi) = \Xi$  qui vaut  $(x, \xi)$  à l'instant  $t = 0$  (si  $P = \sqrt{-\Delta}$ ,  $\Phi$  est le flot géodésique). Comme le symbole de  $P$  est analytique, et homogène en  $\xi$ ,  $\Phi(t, x, \xi)$  est encore bien défini pour  $(x, \xi) \in T^*\tilde{X}$  assez voisin de  $T^*X$ , et  $t \in \mathbb{C}$  assez petit. Pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, soit  $\Omega_\varepsilon \subset \tilde{X}$  l'ensemble des points de base des covecteurs  $\Phi(it, x, \xi)$  avec  $x \in X$  (réel),  $\xi$  réel,  $|\xi| = 1$ ,  $0 \leq t < \varepsilon$ . Un argument facile de perturbation (à partir du cas où  $P$  est un opérateur de convolution sur  $\mathbb{R}^n$ ) montre que, sous l'hypothèse (C),  $\Omega_\varepsilon$  est un voisinage tubulaire strictement pseudo-convexe de  $X$ , de bord  $\partial\Omega_\varepsilon \in C^\infty$ .

On sait que l'opérateur  $e^{itP}$  est un opérateur intégral de Fourier associé à la relation canonique graphe de  $\Phi(t, \dots)$  ; comme  $P$  est analytique, le noyau  $K(t, x, y)$  de cet opérateur est encore bien défini pour  $x, y$  complexes voisins de  $X$ , et  $t$  complexe assez petit, avec une singularité sur la projection dans  $\tilde{X} \times \tilde{X}$  du graphe de  $\Phi$ . Faisons en particulier  $t = i\varepsilon$  : l'ensemble des  $z \in \tilde{X}$  tels que  $K(i\varepsilon, z, y)$  soit singulier pour un  $y \in X$  est précisément  $\partial\Omega_\varepsilon$ . Il en résulte aisément que l'opérateur  $e^{-\varepsilon P}$ , de noyau  $K(i\varepsilon, x, y)$ , est un opérateur intégral de Fourier à phase complexe ( $\gg 0$  au sens de [4]), opérant de l'espace  $C^\infty(X)$  vers l'espace  $C^\infty(\partial\Omega_\varepsilon)$ , et dont l'image est contenue dans le sous-espace  $O^\infty(\partial\Omega_\varepsilon)$  des fonctions qui ont un prolongement  $C^\infty$  dans  $\Omega_\varepsilon \cup \partial\Omega_\varepsilon$ , holomorphe dans  $\partial\Omega_\varepsilon$ . C'est en fait

une bijection entre ces deux espaces (l'opérateur  $e^{+\varepsilon P}$  est défini au moins sur l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de  $\Omega_\varepsilon \cup \partial\Omega_\varepsilon$ , comme on voit en poussant dans le domaine complexe le cycle d'intégration qui définit  $e^{sP}(f) = \int_X K(s,x,y)f(y)dy$ ). Le degré de  $e^{-\varepsilon P}$  en tant qu'opérateur intégral de Fourier de  $C^\infty(X)$  dans  $C^\infty(\partial\Omega_\varepsilon)$  est  $-\frac{n-1}{4}$  ( $e^{itP}$  est de degré 0 en tant qu'opérateur dans  $C^\infty(X)$ ); la formule qui définit  $e^{-\varepsilon P}$  est la même, mais la dimension de  $\partial\Omega_\varepsilon$  est  $2n-1 = \dim X + n-1$ ). En résumé, en notant  $H^s$  l'espace de Sobolev, et  $O^s(\partial\Omega_\varepsilon)$  le sous-espace de  $H^s(\partial\Omega_\varepsilon)$  des fonctions qui sont traces sur  $\partial\Omega_\varepsilon$  (au sens des distributions) de fonctions holomorphes dans  $\Omega_\varepsilon$  :

Théorème : Avec les notations ci-dessus, pour tout  $s$  réel et pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, l'opérateur  $e^{-\varepsilon P}$  est une bijection linéaire continue de  $H^s(X)$  sur  $O^{s + \frac{n-1}{4}}(\partial\Omega_\varepsilon)$ .

Supposons maintenant  $P$  autoadjoint (pour une mesure de densité analytique  $> 0$  convenable), et soit  $(f_n)$  une base orthonormale de fonctions propres de  $P$ ,  $(\lambda_n)$  la suite des valeurs propres correspondantes. On a  $e^{-\varepsilon P} f_n = e^{-\varepsilon \lambda_n} f_n$ , et le théorème implique aussitôt :

Corollaire : La série  $\sum a_n f_n$  converge dans  $L^2(\partial\Omega_\varepsilon)$  si et seulement si on a  $\sum |e^{\varepsilon \lambda_n} \lambda_n|^{-\frac{n-1}{4}} |a_n|^2 < \infty$ .

(L'inégalité exprime que la série  $\sum e^{\varepsilon \lambda_n} a_n f_n = e^{\varepsilon P}(\sum a_n f_n)$  converge dans  $H^{-\frac{n-1}{4}}(X)$ ). Ce corollaire donne une indication assez précise sur la croissance dans le domaine complexe des fonctions propres de  $P$ .

- 
- [1] L. Boutet de Monvel : C. R. Acad. Sc. Paris, t.287 (1978) 855-856.  
 [2] L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand : Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegő. Astérisque 34-35 (1976) 123-164.  
 [3] L. Boutet de Monvel : On the index of Toeplitz operators of several complex variables. Inventiones Math. 50 (1979) 249-272.  
 [4] A. Melin, J. Sjöstrand : Fourier integral operators with a complex phase. Lecture Notes (Springer Verlag) n° 459 (1975) 120-233.