JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ABDEREMANE MOHAMED

Étude spectrale d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples

Journées Équations aux dérivées partielles (1981), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1981____A12_0>

ETUDE SPECTRALE D'OPERATEURS HYPOELLIPTIQUES A CARACTERISTIQUES MULTIPLES

par

A. MOHAMED

1. Introduction

Soit Ω une variété C^{∞} compacte sans bord de dimension n, munie d'une densité dx C^{∞} positive. On se donne sur Ω un o.p.d. classique d'ordre m $p(x,D)$. On désigne par $p_m(x,\xi)$ son symbole principal. Dans un système de coordonnées symplectiques (x,ξ) sur $T^*\Omega\setminus 0$, $P(x,D)$ a un symbole $p(x,\xi)$ qui admet un développement asymptotique en parties homogènes :

$$p(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}(x,\xi)$$

où $p_{m-j}(x,\xi)$ est homogène de degré m-j en ξ .

On fait les hypothèses suivantes :

(H_1) $\begin{cases} p(x,D) \text{ est formellement auto-adjoint au sens suivant :} \\ \displaystyle\int_{\Omega} P(x,D)u.\bar{v}\,dx = \int_{\Omega} u.\overline{P(x,D)v}\,dx \;;\; \forall\, u,v \in C^{\infty}(\Omega) \end{cases}$

(H_2) $\begin{cases} p_m(x,\xi) \geqslant 0;\ \forall\ (x,\xi) \in T^*\Omega\setminus 0 \quad \text{et} \\ \Sigma = \{(x,\xi) \in T^*\Omega\setminus 0;\ p_m(x,\xi) = 0\} \\ \text{est une sous-variété } C^{\infty}\text{, conique, fermée de } T^*\Omega\setminus 0 \text{ de codimension 2d} \\ \text{(ici d désigne soit un entier soit un demi entier > 0)} \end{cases}$

(H_3) $\begin{cases} p_m(x,\xi) \text{ s'annule exactement à l'ordre 2k sur } \Sigma \text{, où k est un entier} \\ \text{vérifiant } 0 < k < m\text{; de plus, on suppose que les } p_{m-j}(x,\xi) \text{ s'annulent} \\ \text{à l'ordre } [2k-2j]_+ \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$

Pour tout $\rho \in \Sigma$ on associe à $P(x,D)$ l'opérateur différentiel à coefficients polynomiaux sur $\mathbb{R}^n$,

$$\sigma_{\rho}(P)(y,D_y) = \sum_{|\alpha+\beta|+2j=2k} \frac{1}{\alpha!\beta!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\beta} p_{m-j}(\rho)\right] y^{\alpha} D_y^{\beta}$$

(H_4) $\begin{cases} \text{On suppose que pour tout } \rho \in \Sigma,\ \sigma_{\rho}(P)(y,D_y) \text{ réalise un isomorphisme} \\ \text{sur } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{cases}$

Sous les hypothèses H_1, H_2, H_3 et H_4, il résulte de [3] que $P(x,D)$ est hypoelliptique dans Ω avec perte de dérivées. De plus, $P(x,D)$ admet une paramétrixe dans la classe de L. Boutet de Monvel [2] $OPS^{-m,-2k}(\Omega,\Sigma)$.

Comme $m-k > 0$, l'opérateur non borné sur $L^2(\Omega)$ P, de domaine :

$$D(P) = \{u \in L^2(\Omega)\,;\ Pu = p(x,D)u \in L^2(\Omega)\}$$

est autoadjoint à résolvante compacte. P admet un spectre discret réduit au spectre ponctuel . Si $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ désigne la suite des valeurs propres de P rangée dans l'ordre croissant, chacune d'elle étant répétée autant de fois que sa multiplicité, on pose, pour tout $\lambda > 0$:

$$N_+(\lambda) = \sum_{0<\lambda_j<\lambda} 1 \quad , \ N_-(\lambda) = \sum_{-\lambda<\lambda_j<0} 1 \quad \text{et}$$

$$N(\lambda) = N_+(\lambda) + N_-(\lambda) \ .$$

2. Enoncé des résultats

Théorème 1 : Sous les hypothèses H_1, H_2, H_3 et H_4 et si Σ est symplectique, on a le comportement asymptotique suivant :

i) si $md - kn > 0$

$$N_+(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n}{m}} a_1 \quad ; \quad \lambda \to +\infty$$

$$N_-(\lambda) = O(\lambda^{\frac{n}{m}}) \quad ; \quad \lambda \to +\infty$$

ii) si $md - kn = 0$

$$N_+(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n}{m}} \operatorname{Log} \lambda^{\frac{n}{m}} a_2 \quad ; \quad \lambda \to +\infty$$

$$N_-(\lambda) = O(\lambda^{\frac{n}{m}} \operatorname{Log} \lambda) \quad ; \quad \lambda \to +\infty$$

iii) si $md - kn < 0$

$$N_+(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n-d}{m-k}} a_3^+ \quad ; \quad \lambda \to +\infty$$

$$N_-(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n-d}{m-k}} a_3^- \quad ; \quad \lambda \to +\infty$$

où

$$a_1 = (2\pi)^{-n} \int_{p_m(x,\xi) < 1} dx\, d\xi$$

$$a_2 = (2\pi)^{-n} \frac{d}{n} \int_{\nu(p_m)(\rho) > 1} d\rho$$

avec $\nu(p_m)(\rho) = \int_{\mathrm{Hess}^{2k}\ p_m(\rho)(X) < 1} dX$

$$a_3^+ = (2\pi)^{-n+d} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mu_j(\rho) < 1} d\rho$$

$$a_3^- = (2\pi)^{-n+d} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mu_{-j}(\rho) > -1} d\rho$$

et $\{\mu_j(\rho)\}_{j \in \mathbb{Z} \setminus 0}$ est la suite des valeurs propres de l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^d$ globalement elliptique, obtenu par réduction de $\sigma_\rho(P)(y,D_y)$ (cf. [4]).
($dx\, d\xi$, $d\rho$ et dX désignent les mesures canoniquement associées aux structures symplectiques respectivement sur $T^*\Omega$, Σ et $(T_\rho\Sigma)^\perp$ l'orthogonal de $T_\rho\Sigma$ pour la 2-forme symplectique : $\sum_j d\xi_j \wedge dx_j$).

<u>Proposition</u> : Sous les hypothèses H_1, H_2 et H_3, on a les équivalences suivantes :

A) $\begin{cases} \forall \rho \in \Sigma\ ,\ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_\rho(P)(y,D_y) f . \bar{f}\, dy \geqslant 0 \end{cases}$

$\iff$

B) $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon \geqslant 0 \text{ tel que}, \forall u \in C^\infty(\Omega) \\ \int_\Omega P(x,D)u.\bar{u}\, dx + \varepsilon \|u\|^2_{H^{\frac{m-k}{2}}(\Omega)} \geqslant -C_\varepsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \end{cases}$

Remarquons que si Σ est connexe et non symplectique les hypothèses H_1, H_2, H_3 et H_4 suffisent pour avoir A) et B).

<u>Théorème 3</u> : Sous les hypothèses H_1, H_2, H_3, H_4 et A) on a le comportement asymptotique suivant de $N(\lambda)$:

i) si $md - kn > 0$

$$N(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n}{m}} a_1 \quad ; \quad \lambda \to +\infty$$

ii) si $md - kn = 0$

$$N(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n}{m}} \mathrm{Log}\ \lambda^{\frac{n}{m}} \tilde{a}_2 \quad ; \quad \lambda \to +\infty$$

iii) si $md - kn < 0$

$$N(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n-d}{m-k}} a_3 \quad ; \quad \lambda \to +\infty$$

Les constantes $\tilde{a}_2$ et a_3 du théorème 3 s'obtiennent de la façon suivante.

Si Σ est donné par $u_1 = \ldots = u_{2d} = 0$, avec les u_j $(j = 1,\ldots,2d)$ homogènes de degré zéro, on peut écrire microlocalement :

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq 2k} A_\alpha(x,D) \circ (U(x,D))^\alpha ,$$

avec $A_\alpha(x,D) \in OPS^{m - \frac{2k-|\alpha|}{2}}(\Omega)$, homogène de symbole principal noté $a_\alpha(x,\xi)$. On a alors,

$$\sigma_\rho(P)(y,D_y) = \sum_{|\alpha|\leq 2k} a_\alpha(\rho)\ (\ell_\rho(y,D_y))^\alpha ,$$

où les $\ell_\rho^j(y,D_y)$ $(j = 1,\ldots,2d)$ désignent les opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^n$ à coefficients polynomiaux associés aux $U_j(x,D_x)$ en ρ. On associe alors à P en tout point ρ de Σ un symbole $a(\rho,X)$ sur $N_\rho(\Sigma) = T_\rho(T^*\Omega)/T_\rho\Sigma$ et grâce aux hypothèses du théorème 3, on peut définir la puissance $-\frac{n-d}{m-k}$ ieme de $a(\rho,X)$, $\mu(\rho,X)$ dans l'algèbre de symboles introduite dans [3].

Plus précisément on a, pour tout $\rho \in \Sigma$:

$$[\sigma_\rho(P)(y,D_y)]^{n-d} \circ [\mu(\rho,\ell_\rho(y,D_y))]^{m-k} = I$$

Pour tout $\rho \in \Sigma$, on munit $N_\rho(\Sigma)$ de la mesure de Lebesgue dX_ρ définie par :

$$\int_{\mathrm{Hess}^{2k} p_m(\rho)(X)<1} dX_\rho = 1$$

A partir de $dx\,d\xi$ et dX_ρ on définit une densité C^∞ positive, sur Σ, $d\rho$ homogène de degré $-\frac{md-kn}{k}$, ne dépendant que de p_m. En coordonnées microlocales, si dv est une $(2n-2d)$-forme telle que $dx\,d\xi = dv.du$ avec $du = du_1\ldots du_{2d}$, $d\rho$ est donné par :

$$d\rho = \{\int_{\sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(\rho)u^\alpha < 1} du\} dv/\Sigma$$

si $md-kn < 0$, on peut poser :

$$\mu(\rho) = \int_{N_\rho(\Sigma)} \mu(\rho,X)\,dX_\rho \quad ; \qquad \forall\, \rho \in \Sigma \quad .$$

On a $\mu(\rho) > 0$ et a_3 est donné par :

$$a_3 = (2\pi)^{-n} \frac{kn-md}{k(n-d)} \int_{\mu(\rho)<1} d\rho \ .$$

Si $md - kn = 0$, $d\rho$ est homogène de degré zéro. Si on se donne une structure riemannienne sur Ω , on peut écrire en coordonnées polaires, $d\rho = \frac{dr}{r}\,dw$.
a_2 est donné par :

$$a_2 = \frac{(2\pi)^{-n}}{n-d} \int_{\Sigma \cap S^*\Omega} dw \ ; \qquad S^*\Omega = \{(x,\xi) \in T^*\Omega, \quad r(x,\xi) = 1\}$$

Les théorèmes 1 et 2 ont été établis dans le cas des caractéristiques doubles par A. Menikoff, J. Sjöstrand dans [7] , [8] et [9] (cf. aussi [10]). R. B. Melrose [6] obtient un résultat meilleur dans le cas où Σ est symplectique et de codimension 2 toujours pour les o.p.d. à caractéristiques doubles.

Notons également un résultat de P. Bolley, J. Camus et Pham The Lai [1] relatif à des problèmes aux limites dégénérés où ils obtiennent un comportement similaire du $N(\lambda)$.

La proposition 2 généralise la condition de A. Melin [5] .

3. Idée de la démonstration

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$, on note , $|\lambda| = \mu^{2k}$ avec $\mu > 0$.

Définition 4 : Nous dirons qu'un o.p.d. $M_\lambda(x,D)$ dépendant du paramètre λ est dans $OPS^{r,t}_q(\Omega,\Sigma)$ si et seulement si $M_\lambda(x,D)$ et $\mu^q M_\lambda(x,D)$ appartiennent respectivement aux classes de L. Boutet de Monvel [2] $OPS^{r,t}(\Omega,\Sigma)$ et $OPS^{r+q\frac{m}{2k},t+q}(\Omega,\Sigma)$ ceci uniformément en μ .

On a le lemme suivant :

Lemme 5 : Sous les hypothèses H_1, H_2, H_3 et H_4, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ (et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ si A) est vérifié), il existe deux o.p.d.

$A_\lambda(x,D)$ et $B_\lambda(x,D)$ dans $OPS^{-m_1,-2k}_{2k}(\Omega,\Sigma)$ tels que l'on ait :

$$(P(x,D) - \lambda I) \circ A_\lambda(x,D) - I = R_\lambda(x,D) \in OPS^{-1,-2}_{2k}(\Omega,\Sigma)$$

$$(P(x,D) - \lambda I) \circ B_\lambda(x,D) - I = R'_\lambda(x,D) \in OPS^{0,1}_{2k}(\Omega,\Sigma)$$

Pour construire $A_\lambda(x,D)$ il suffit de prendre sur les cartes locales l'opérateur de symbole $(p_m(x,\xi) + |\xi|^{m-k} - \lambda)^{-1}$.

L'opérateur $B_\lambda(x,D)$ s'obtient comme $A_\lambda(x,D)$ hors de Σ . Dans un voisinage conique d'un point de Σ le symbole $a(\rho,X) - \lambda$ associé à l'opérateur $\sigma_\rho(D)(y,D_y) - \lambda I$ est inversible dans l'algèbre de [3] d'inverse, $\sigma_\lambda(\rho,X)$. Si (ρ, u) définit un système de coordonnées dans un voisinage conique d'un point de Σ (les $(u_j)_{j=1,\dots,2d}$ étant comme précédemment), on prend comme $B_\lambda(x,D)$ l'opérateur dont le symbole est $\sigma_\lambda(\rho,u)$.

Le lemme 5 permet alors de construire une paramétrixe de la résolvante de P en suivant un schéma classique de [2] . Soient

$$Q_{\lambda,o}(x,D) = A_\lambda(x,D) - B_\lambda(x,D) \circ R_\lambda(x,D)$$

et

$$Q'_{\lambda,o}(x,D) = B_\lambda(x,D) - A_\lambda(x,D) \circ R'_\lambda(x,D)$$

On a

$$(P(x,D) - \lambda I) \circ Q_{\lambda,o}(x,D) - I \in OPS^{-1,-1}_{2k}(\Omega,\Sigma)$$

et

$$(P(x,D) - \lambda I) \circ Q'_{\lambda,o}(x,D) - I \in OPS^{-1,-1}_{2k}(\Omega,\Sigma)$$

On construit une suite d'o.p.d. $(Q_{\lambda,j}(x,D))_{j=o,1\dots}$ telle que :

$$Q_{\lambda,j}(x,D) \in OPS^{-m-j,-2k-j}_{2k(j+1)}(\Omega,\Sigma)$$

et telle que pour tout entier N on ait :

$$(P(x,D) - \lambda I)\Big(\sum_{j=o}^{N-1} Q_{\lambda,j}(x,D)\Big) - I \in OPS^{-N,-N}_{2kN}(\Omega,\Sigma)$$

on peut aussi bien partir de $Q_{\lambda,o}(x,D)$ que de $Q'_{\lambda,o}(x,D)$. On en déduit la proposition suivante :

<u>Proposition 6</u> : Sous les hypothèses H_1, H_2, H_3, H_4 et A) il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que l'opérateur $P + CI$ soit positif. Pour tout $s \in \mathbb{C}$ on a alors :

$$(P + CI)^s \in OP\,S^{mRes,2kRes}(\Omega,\Sigma) .$$

La proposition 6 permet d'établir facilement la proposition 2.

On démontre que si $(P - \lambda I)^{-1}$ est à trace, alors :

- si $md - kn > 0$, $\mathrm{Tr}(P - \lambda I)^{-1} \sim \mathrm{Tr}\, A_\lambda$; $|\lambda| \to +\infty$
- si $md - kn \leq 0$, $\mathrm{Tr}(P - \lambda I)^{-1} \sim \mathrm{Tr}\, B_\lambda$; $|\lambda| \to +\infty$

Les théorèmes 1 et 3 résultent de théorèmes tauberiens et du comportement asymptotique de la trace de $A_\lambda(x,D)$ et de $B_\lambda(x,D)$.

REFERENCES

[1] P. Bolley, J. Camus, Pham The Lai : Noyau, résolvante et valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés. Lecture Notes in Math. 660, Berlin, Springer. (1978), 33-46.

[2] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo differential operators. Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 585-639.

[3] L. Boutet de Monvel , A. Grigis, B. Helffer : Paramétrixes d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples. Astérisque, 34-35 (1976) 93-121.

[4] B. Helffer : Invariants associés à une classe d'opérateurs pseudo-différentiels et applications à l'hypoellipticité. Ann. de l'Inst. Fourier, Grenoble 26-2 (1976), 55-70.

[5] A. Melin : Lower bounds for pseudo-differential operators. Ark. för Math. 9 (1971), 117-140.

[6] R. B. Melrose : Hypoelliptic operators with characteristic variety of codimension two and the wave equation. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1979-80, Centre Math. Ecole Polytechnique.

[7] A. Menikoff, J. Sjöstrand : On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators. Math. Ann. 235 (1978), 55-85.

[8] A. Menikoff, J. Sjöstrand : On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators II. Lecture Notes in Math. 755, 201-247, Springer, Berlin (1979).

[9] A. Menikoff, J. Sjöstrand : The eigenvalues of hypoelliptic operators III. The non semi-bounded case. J. Analyse Math. 35 (1979), 123-150.

[10] J. Sjöstrand : On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators IV. Ann. de L'inst. Fourier, Grenoble, 30-2 (1980), 109-169.

***