Journées Équations aux dérivées partielles

Tadato Matsuzawa

Opérateurs pseudo-différentiels et classes de Gevrey

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A12_0>

OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS ET CLASSES DE GEVREY

par T. MATSUZAWA

Le résultat que nous allons énoncer a été fait en collaboration avec S. Hashimoto et Y. Morimoto.

La définition d'une classe des opérateurs pseudo-différentiels analytiques se trouve dans le livre de F. Treves, Ch. V, [4]. Nous voulons étendre ses résultats au point de vue de la propriété Gevrey pour une classe d'opérateurs pseudo-différentiels du type (ρ,δ) de L. Hörmander, [2]. F. Treves a utilisé la théorie des fonctions complexes comme un outil fondamental. Par contre nous utilisons essentiellement les calculs réels élémentaires pour résoudre les propriétés Gevrey des opérateurs pseudo-différentiels.

Nous remarquons qu'il y a des résultats de G. Métivier [3] sur l'hypoellipticité analytique des opérateurs appartenant à $S^m_{\rho,\delta}$. Je le remercie pour les discussions que nous avons eues ensemble.

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^N$ et soit $\theta \geq 1$, alors on désigne par $G^\theta(\Omega)$ l'ensemble de toute fonction Gevrey d'ordre θ, i.e. $u \in C^\infty(\Omega)$ et pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe deux constantes C_o et C_1 telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha u(x)| \leq C_o \, C_1^{|\alpha|} (\alpha!)^\theta \quad .$$

Ensuite, soient ρ, δ et m des nombres réels tels que $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ et $-\infty < m < \infty$. On connaît bien la définition de la classe $S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ des symboles des opérateurs pseudo-différentiels de L. Hörmander.
En précisant la condition de $S^m_{\rho,\delta}$, nous allons donner la définition des symboles d'opérateurs Gevrey-analytiques.
Soient maintenant les constantes ρ, δ, σ et m telles que $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, $\sigma \geq 1$ et $-\infty < m < \infty$.

<u>Définition 1</u> : Nous désignons par $S^m_{\rho,\delta,\sigma} = S^m_{\rho,\delta,\sigma}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ l'ensemble de toute fonction $a(x,\xi) \in C^\infty(\Omega \times R^n)$ telle que pour tout compact K de Ω il existe des constantes positives C_o, C_1 et B telles que

$$(1) \qquad \sup_{x\in K} |a^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)| \le C_o\, C_1^{|\alpha+\beta|}\, \alpha!\, \beta!^{\sigma}\, (1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

si $|\xi| \ge B\, |\alpha|^{\theta}$, $\theta = \dfrac{\sigma}{\rho-\delta}$.

Ici nous avons écrit comme d'habitude

$$a^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi) = \partial^{\alpha}_{\xi}\, D^{\beta}_{x}\, a(x,\xi) \quad , \quad \partial_{\xi} = \left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)$$

$$D_x = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \quad .$$

Nous remarquons que $\theta \ge 1$ et si $\theta = 1$, i.e., si $\sigma = \rho = 1$ et $\delta = 0$, la classe $S^m_{1,0,1}$ est équivalente à la classe pseudo-analytique donnée par F. Treves [4].

Soit $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta,\sigma}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ alors l'opérateur pseudo-diiférentiel associé à $a(x,\xi)$ est défini par la formule

$$(2) \qquad a(x,D)\, u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n_{\xi}} e^{i<x,\xi>}\, a(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi \quad ,$$

où $u(x) \in C^{\infty}_{o}(\Omega)$, et

$$u(\xi) = \int e^{-i<x,\xi>}\, u(x)\, dx \quad .$$

On sait bien que $a(x,D)$ agit comme un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ et cet opérateur est C^{∞}-pseudolocal.
Pour un symbole $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta,\sigma}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, nous allons étudier les propriétés de l'opérateur $a(x,D)$ et son noyau distribution qui est défini par l'intégrale oscillatoire :

$$(3) \qquad K(x,y) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{i<x-y,\xi>}\, a(x,\xi)\, d\xi \quad .$$

<u>Théorème 1</u> : Soit $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta,\sigma}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Alors on a

(i) $K(x,y) \in G^{\theta}(\Omega \times \Omega \setminus \Delta)$, $\theta = \dfrac{\sigma}{\rho-\delta}$, $\Delta = \{(x,x)\,;\, x \in \Omega\}$.

(ii) $a(x,D)$ est pseudolocal Gevrey d'ordre θ, i.e. pour $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ quelconque $a(x,D)u$ est une fonction Gevrey d'ordre θ dans tout ouvert où c'est vrai de $u(x)$.

Pour démontrer (i), on doit estimer l'intégrale oscillatoire

$$D_x^\alpha\, D_y^\beta\, k(x,y) = (2\pi)^n \sum_{\gamma \le \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int e^{i<x-y,\xi>} (-\xi)^\beta\, \xi^\gamma\, a_{(\alpha-\gamma)}(x,\xi)\, d\xi \quad .$$

Cela est fait à partir de l'hypothèse (1).

Le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel est souvent donné comme une série formelle :

$$(4) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,\xi) \quad , \quad a_j(x,\xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n) \quad , \quad j = 0,1,\ldots \quad .$$

Dans ce cas nous posons l'hypothèse suivante :

(H_1) Pour tout compact K de Ω, il existe trois constantes positives C_o, C_1 et B telles que

$$(5) \quad \sup_{x \in K} |a_{j(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)| \le C_o\, C_1^{|\alpha+\beta|+1} (|\beta|+j)!^\sigma\, \alpha!\, (1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta| - (\rho-\delta)j}$$

pour $|\xi| \ge B(j + |\alpha|)^\theta$, $\theta = \frac{\sigma}{\rho - \delta}$.

Alors on peut construire le vrai symbole Gevrey-pseudo-analytique de la série formelle (4) comme dans le cas analytique de F. Treves.

On utilise une série de fonctions $\varphi_j(\xi) \in C^\infty(R^n)$, $j = 0,1,\ldots$, vérifiant

$$(6) \qquad 0 \le \varphi_j(\xi) \le 1 \text{ pour tout } \xi \text{ et } \varphi_j(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| < 2R \sup(j^\theta,1)$$

$$\text{et } \varphi_j(\xi) = 1 \text{ si } |\xi| > 3R \sup(j^\theta,1) \ ;$$

$$(7) \qquad |D^\alpha \varphi_j| \le \left(\frac{C}{R\, j^{\theta-1}}\right)^{|\alpha|} \quad \text{si} \quad |\alpha| \le 2j \quad .$$

Prenons $R > 2^{\theta-1} B$, où B est un nombre donné dans (5) et posons

$$(8) \qquad a(x,\xi) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(j)\, a_j(x,\xi) \quad .$$

Alors on a $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta,\sigma}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

Ça c'est démontré par le procédé de F. Trèves.

Ensuite, nous considérons la composition des deux opérateurs.

Soient $a(x,\xi) \in S^{m'}_{\rho',\delta',\sigma'}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ et $b(x,\xi) \in S^{m''}_{\rho'',\delta'',\sigma''}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ avec $\delta' < \rho''$. Soit Ω' relativement compact dans Ω et prenons $h \in C_o^\infty(\Omega)$ avec $k \equiv 1$ sur un voisinage de $\overline{\Omega'}$. Alors le symbole de l'opérateur de composition $r(x,D) = a(x,D)hb(x,D)$ est donné par

(9) $$r(x,\xi) = a(x,D+\xi)\ h(x)\ b(x,\xi) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\Omega} e^{i\langle x-y,\eta\rangle} a(x,\xi+\eta)\, h(y)\, b(y,\xi)\ dy\ d\eta \quad .$$

Posons $\delta = \max(\delta',\delta'')$, $\rho = \min(\rho',\rho'')$, $\sigma = \max(\sigma',\sigma'')$ et $m = m' + m''$. Par le théorème 1, l'opérateur $r(x,D) = a(x,D)hb(x,D)$ est θ-pseudolocal dans Ω' avec $\theta = \dfrac{\sigma}{\rho - \delta}$. De plus si l'on pose

$$r_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} a^{(\alpha)}(x,\xi)\ D_x^\alpha\ b(x,\xi) \quad , \quad j = 0,1,2\ \ldots,$$

on voit aisément que la série $\{r_j(x,\xi)\}_{j=0}^{\infty}$ vérifie la condition (H_1) dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Nous prenons une série de fonctions $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ comme ci-dessus et posons

(10) $$\tilde{r}(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\xi)\ r_j(x,\xi) \quad .$$

On a $\tilde{r}(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta,\sigma}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ et on sait bien que $r(x,\xi) - \tilde{r}(x,\xi) \in S^{-\infty}(\Omega')$.

<u>Théorème 2</u> : On a

(11) $$r(x,D) = \tilde{r}(x,D) + F \quad \text{dans } \Omega' \quad ,$$

où F est un opérateur intégral à noyau $F(x,z) \in G^\theta(\Omega' \times \Omega')$.

Ensuite nous allons chercher le symbole de l'opérateur adjoint ${}^t a(x,D)$ de $a(x,D) \in S^m_{\rho,\delta,\sigma}$. Pour $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta,\sigma}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, posons

$$r_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=j} (-D_x)^\alpha\ a^{(\alpha)}(x,-\xi) \quad , \quad j = 0,1,\ldots \quad .$$

Alors $\{r_j(x,\xi)\}_{j=0}^{\infty}$ satisfait à l'hypothèse (H_1) et on peut construire un symbole

$$r(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\xi)\ r_j(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta,\sigma}(\Omega = \mathbb{R}^n) \quad ,$$

avec $\{\varphi_j(\xi)\}_{j=0}^{\infty}$ donnée plus haut.

<u>Théorème 3</u> : Soit $a \in S^m_{\rho,\delta,\sigma}$. Alors pour tout ouvert Ω' relativement compact de Ω on a

$${}^t a(x,D) = r(x,D) + F \quad \text{dans } \Omega' \quad ,$$

où F est un opérateur intégral à noyau $F(x,z) \in G^{\theta}(\Omega' \times \Omega')$ avec $\theta = \frac{\sigma}{\rho - \sigma}$.

Finalement nous allons considérer l'existence des paramétrix favorables.

Théorème 4 : Soit $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta,\sigma}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. On pose des hypothèses :

(H_2) pour tout compact K de Ω il existe des constantes C_o, C_1 et B telles que

(12) $$|a^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)| \le C_o\, C_1^{|\alpha+\beta|}\, \alpha!\, \beta!^{\sigma}\, |a(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|}$$

pour $x \in K$ et $|\xi| \ge B\, |\alpha|^{\theta}$, $\theta = \frac{\sigma}{\rho - \delta}$;

(H_3) Il existe deux constantes c et m' telles que

(13) $$|a(x,\xi)| \ge c\, |\xi|^{m'} \quad , \quad x \in K \quad , \quad |\xi| \ge B \ .$$

Alors pour tout ouvert Ω' relativement compact de Ω, il existe un opérateur $b(x,D) \in S^{-m'}_{\rho,\delta}(\Omega) \cap S^{-m'}_{\rho,\delta,\sigma}(\Omega')$ paramétrix à droite de $a(x,D)$ dans Ω' tel que

(a) $a(x,D)\, b(x,D) = I + F$ dans Ω' ,

(b) F est opérateur intégral à noyau

$$F(x,z) \in G^{\theta}(\Omega' \times \Omega') \quad , \quad \theta = \frac{\sigma}{\rho - \delta} \ ,$$

(c) $b(x,D)$ est θ-pesudolocal dans Ω' ,

(d) le noyau $k(x,y)$ de $b(x,D)$ est une fonction appartenant à $G^{\theta}(\Omega' \times \Omega' \setminus \Delta)$, où Δ est un ensemble diagonal.

Corollaire : Sous les hypothèses (H_2) et (H_3), l'opérateur $a(x,D)$ est hypoelliptique Gevrey d'ordre $\theta = \frac{\sigma}{\rho - \delta}$, i.e. si $a(x,D)u \in G^{\sigma'}(\Omega')$, $\Omega' \subset \Omega$, $\sigma' \ge 1$ et $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, alors $u \in G^{\gamma}(\Omega')$, où $\gamma = \max\{\sigma', \theta\}$.

Exemple simple : Considérons une équation ordinaire

$$pu = x^{\ell} \frac{d}{dx} u(x) - u(x) = 0 \qquad \text{dans } -\infty < x < \infty \ ,$$

où ℓ est un entier ≥ 2. Alors $p(x,\xi) = ix^{\ell}\xi - 1$ satisfait aux conditions (H_2) et (H_3) avec $\sigma = \rho = 1$, $\delta = 1/\ell$ et donc $\theta = \ell / \ell - 1 > 1$.

D'autre part, une solution de $Pu = 0$ est donnée par

$$u(x) = \begin{cases} \exp\{\frac{1}{1-\ell} x^{1-\ell}\} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} .$$

On sait que $u(x) \in G^{\ell/\ell-1}(R)$, ce qui montre que le résultat du corollaire est optimal.

\# Nous remarquons qu'un résultat identique du corollaire a été obtenu tout récemment par Bolley, Camus et Métivier [1] dans le cas où $a(x,D)$ est un opérateur différentiel par une autre méthode.

\# Finalement nous remarquons que tous les résultats peuvent être considérés au point de vue microlocal : i.e. microlocalisation.

\# Le détail de la démonstration paraîtra ailleurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Bolley, J. Camus, G. Métivier : à paraître.

[2] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations, Proc. Symposium on Singular Integrals, Amer. Math. Soc. 10 (1967), 138-183.

[3] G. Métivier : Analytic hypoellipticity for operators with multiple characteristics, Comm. in Partial Differential Equations, 6 (1), (1981), 1-90.

[4] F. Treves : Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators, Vol. 1, Plenum Press (1981).

[5] P. Krée, L. Boutet de Monvel : Pseudo-differential operators and Gevrey classes, Ann. Inst. Fourier 17 (1), (1967), 295-323.

[6] L.R. Volevič : Pseudodifferential operators with holomorphic symbols and Gevrey classes, Trans. of the Moscow Mathematical Society, Vol. 24 (1971), 43-68.

***