JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DANIEL GOURDIN

Inverses d'opérateurs faiblement hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable dans la classe des opérateurs de Volterra

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A17_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

INVERSES D'OPERATEURS FAIBLEMENT HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE DANS LA CLASSE DES OPERATEURS DE VOLTERRA

par D. GOURDIN

I. INTRODUCTION

On se place dans des bandes $X = [T_-, T_+] \times \mathbb{R}^\ell \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$ de largeur $T_+ - T_-$ finie ou non ; le point courant de X est $x = (x_o, x')$ avec $x_o \in [T_-, T_+]$ et $x' \in \mathbb{R}^\ell$.

Les élements du fibré cotangent $T^*X = X \times \mathbb{R}^{\ell+1}$ sont notés (x,ξ) avec $\xi = (\xi_o, \xi')$, $\xi_o \in \mathbb{R}$, $\xi' \in \mathbb{R}^\ell$; $\Xi = \mathbb{R}^{\ell+1} \setminus 0$ et $\Xi' = \mathbb{R}^\ell \setminus 0$. Le champ de covecteurs $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_x)_{x \in X}$ avec $\mathcal{J}_x$ de coordonnées $\xi_o = 1$ et $\xi' = 0$ représentera le champ des directions d'hyperbolicité pour les opérateurs aux dérivées partielles considérés par la suite dans X.

On étudie deux cas d'opérateurs hyperboliques relativement à $\mathcal{J}$, à coefficients réels $C^\infty(X)$ vérifiant des hypothèses de stationnarité à l'infini [2], représentés par une équation du second ordre dans le premier cas et par deux équations du premier ordre dans le second cas.

Hypothèse 1 : Le déterminant caractéristique peut s'écrire sous la forme

$$i^2(\xi_o - \lambda_1(x,\xi'))(\xi_o - \lambda_2(x,\xi'))$$

où $\lambda_j \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(X \times \Xi')$ ($j = 1$ et 2).

En notant

$$\Delta_j(x,\xi) = \xi_o - \lambda_j(x,\xi') \ , \ M_j = \{(x,\xi) \in T^*X \ , \ \Delta_j(x,\xi) = 0\} \ ,$$

on suppose de plus que l'ensemble des points critiques $\mathcal{N} = M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.

Sous cette hypothèse 1, on a une 2ème condition nécessaire d'hyperbolicité donnée par V.Ia. Ivrii et V. M. Petkov [6] :

$$(\hat{x},\hat{\xi}) \in \mathcal{N} \text{ et } \{\Delta_1, \Delta_2\}(\hat{x},\hat{\xi}) = 0 \Longrightarrow \mathcal{K}(\hat{x},\hat{\xi}) = 0$$

où $\mathcal{K}$ est le sous-caractéristique de l'équation ou du système considéré. Petkov [14] a conjecturé la condition suffisante d'hyperbolicité suivante (voisine de la condition nécessaire) :

(L) "il existe un symbole c d'opérateur pseudo-différentiel sur X tel que :

$$\mathcal{K} = c\{\Delta_1, \Delta_2\} \quad \text{sur } \mathcal{N}\text{"}$$

Dans cette formulation générale, cette conjecture n'a jamais été démontrée à ma connaissance ; seuls de nombreux cas particuliers ont été examinés : V. Ia. Ivrii [7] établit la C.N.S. d'hyperbolicité forte :

$$\{\Delta_1,\Delta_2\} \neq 0 \quad \text{sur } \mathcal{N}.$$

V. M. Petkov [13] et Y. Ohya [12] montrent la condition suffisante d'hyperbolicité faible suivante : " $\mathcal{K}$ et $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ nuls sur $\mathcal{N}$" (cas involutif). T. Nishitani [10] améliore cette condition sous la forme :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \{\Delta_1, \Delta_2\} \quad \text{sur } \mathcal{N}.$$

Ces conditions suffisantes d'hyperbolicité faible ont été étendues au cas d'un système de n équations dans [1] sous la forme :

$$\mathcal{K} = \pm\frac{1}{2} \{\Delta_1, \Delta_2\} \quad \text{sur } \mathcal{N}.$$

Après les travaux de L. Hörmander [5] et V.Ia. Ivrii [8] établissant d'autres conditions suffisantes d'hyperbolicité portant sur $\mathcal{K}$, le hessien de P_2 (cf (1)) et utilisant la géométrie symplectique de T^*X, R. Lascar [9] a construit une paramétrix microlocale sous la condition nécessaire d'Ivrii-Petkov citée plus haut et sous la condition

$$\{\Delta_j,\{\Delta_1,\Delta_2\}\}\ (x,\xi) \neq 0 \qquad (j = 1,2)$$

$$\forall (x,\xi) \in \mathcal{P} = \{(x,\xi) \in T^*X \ ;\ \Delta_1(x,\xi) = \Delta_2(x,\xi) = \{\Delta_1,\Delta_2\}\ (x,\xi) = 0\}$$

dans une situation où les formes normales du hessien aux points caractéristiques doubles ne sont pas d'un type constant.

Nous allons examiner un autre cas particulier de (L) lorsque

$$\{\Delta_j,\{\Delta_1,\Delta_2\}\}(x,\xi) = 0 \quad \text{sur } \mathcal{P}$$

Ce travail a été résumé dans une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences [3] et doit paraître au Bulletin des Sciences Mathématiques [4] .

II. CAS D'UNE EQUATION DU SECOND ORDRE

§ 1. Hypothèses et résultats

On note :

$$D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\ ,\ D' = (D_1,\dots,D_\ell),\ D = (D_o,D').$$

(1) $P(x,D) = P_2(x,D) + P_1(x,D) + P_o(x,D)$ est la décomposition de P en opérateurs différentiels à symboles homogènes en ξ de degré successifs 2, 1, 0.

$$P_2(x,\xi) = i^2\,\Delta_2\,\Delta_1 \quad \text{avec} \quad \Delta_j(x,\xi) = \xi_o - \lambda_j(x,\xi') \qquad (j = 1,2).$$

$$\mathcal{K}(x,\xi) = P_1'(x;\xi) = P_1(x,\xi) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial\xi_\alpha\cdot\partial x_\alpha} P_2(x,\xi)$$

Hypothèse 2

(L') Il existe α constante réelle et $\delta \in S_o'(X \times \Xi')$ (espace de symboles d'ordre 0 en x' [2]) tels que :

$$(\mathcal{K} + \frac{1-2\alpha}{2}\{\Delta_1\ ,\ \Delta_2\})(x\ ;\ \xi_o = \lambda_1,\xi') = \delta(x,\xi')(\lambda_1 - \lambda_2)(x,\xi')\ .$$

On montre que cette hypothèse est équivalente à l'hypothèse de décomposition de P en opérateurs différentiels en x_o et pseudo-différentiel en x' suivante :

Lemme 1 [3]

(L') $\Longleftrightarrow$ il existe α constante réelle et des opérateurs $\partial_j = i(D_o - \Lambda_j(x,D'))$ où $\Lambda_j(x,D')$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal $\lambda_j(x,\xi')$ tels que

(2) $$P = \partial_2\,\partial_1 + \alpha\,[\partial_1, \partial_2] + r \quad \text{dans } X$$

où r est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre O en x' .

Hypothèse 3

(C) $\begin{cases} \text{Lorsque } \alpha \geqslant 0, \text{ il existe } \beta \text{ et } \gamma \text{ constantes réelles telles que } \beta^2 + 4\gamma \geqslant 0 \\ \text{et } \{\{\Delta_2, \Delta_1\}, \Delta_1\} = \beta\{\Delta_2, \Delta_1\} + \gamma(\Delta_2 - \Delta_1) \end{cases}$

ou

(C') $\begin{cases} \text{Lorsque } \alpha \leqslant 1, \text{ il existe } \beta \text{ et } \gamma \text{ constantes réelles telles que } \beta^2 + 4\gamma \geqslant 0 \\ \text{et } \{\{\Delta_1, \Delta_2\}, \Delta_2\} = \beta\{\Delta_1, \Delta_2\} + \gamma(\Delta_1 - \Delta_2)). \end{cases}$

On considère les espaces de Sobolev suivants :

$$\mathcal{H}_{s,o}([T_-,T_+]\times \mathbb{R}^\ell) = \{u \in L^2(]-\infty,T_+] \;,\; H_s(\mathbb{R}^\ell)) \;;\; \operatorname{supp} u \subset [T_-,+\infty[\times \mathbb{R}^\ell\} ,$$

$$\mathcal{H}_{s,o}(]-\infty,T_+]\times \mathbb{R}^\ell) = \bigcup_{t<T_+} \mathcal{H}_{s,o}([t,T_+]\times \mathbb{R}^\ell) ,$$

$$\mathcal{H}_{s,o}([T_-,+\infty[\times \mathbb{R}^\ell) = \{u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, H_s(\mathbb{R}^\ell)) \;;\; \operatorname{supp} u \subset [T_-,+\infty[\times \mathbb{R}^\ell\} ,$$

$$\mathcal{H}_{s,k}(X) = \{u \;;\; D_o^j u \in \mathcal{H}_{s-j,o}(X) \quad \text{pour } j = 0,\dots,k\} .$$

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 1 [3] : Sous les hypothèses 1,2,3 le problème de Cauchy à "données nulles"

(3) $$Py = f \qquad (f \in \mathcal{H}_{t,p}(X))$$

possède une solution et une seule $y \in \mathcal{H}_{t-[\rho],p+1-[\rho]}(X)$ avec $\rho = \alpha$ si (C) est vérifiée et $\rho = 1 - \alpha$ si (C') est vérifiée. ($[\rho]$ = partie entière de ρ).

§ 2. Démonstration du théorème 1

L'idée est basée sur le lemme suivant, dont la démonstration est évidente par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ et on utilise une méthode voisine de celle d'Ivrii [7].

Lemme 2 [7]

(i) Soit $Q = \partial_2 \ \partial_1 + n [\partial_1, \partial_2]$ $(n \in \mathbb{N})$ tel que

(ii) $[\partial_j, [\partial_1, \partial_2]] = 0$ $(j = 1,2)$,

(iii) alors $\partial_1^{-n} Q \ \partial_1^n = \partial_2 \ \partial_1$.

On va généraliser le lemme 2 pour qu'il s'applique à la décomposition (2) en utilisant l'hypothèse 3 qui est plus faible que (ii) . On obtiendra une égalité analogue à (iii) qui permettra de résoudre le problème (3) en calculant les inverses à droite et à gauche de P. Pour cela, définissons ∂_1^{α} avec α constante réelle .

ⓐ Définition de ∂_1^{α} [7] .

Elle s'inspire de la représentation de Riemann-Liouville des opérateurs de dérivation :

$$D_o^n \, u(x_o) = \frac{1}{(m-n)!} \int_o^{+\infty} t^{m-n-1} (D_o^m u)(x_o - t)\,dt \quad \forall \, m \text{ et } n \in \mathbb{N} \text{ et } m > n .$$

On en déduit la représentation suivante de ∂_1^{α} $(\alpha \in R)$.

$$\partial_1^{\alpha} = \Gamma^{-1}(m-\alpha) \int_o^{+\infty} t^{m-\alpha-1} \, U_1(t) \, \partial_1^m \, dt \tag{4}$$

$\forall \, m \in \mathbb{N}$ tel que $m > \alpha$ avec $U_1(t)$ semi-groupe de générateur $- \partial_1$ [15] .

Existence de (4) : On utilise les classes suivantes d'opérateurs de Volterra

$$\mathcal{L}_{t,m}(X) = \bigcap_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ k=m_+, m_++1, \dots}} \mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,k}(X), \mathcal{H}_{s-t,k-m}(X))$$

($t \in \mathbb{R}$ est l'ordre global en x et $m \in \mathbb{Z}$ l'ordre partiel en x_o; $m_+ = \sup(m,0)$), avec

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,k}(X),\ \mathcal{H}_{s-t,k-m}(X)) = \{a \text{ opérateurs linéaires continus tels que } \operatorname{supp} u \subset [T,+\infty[\times\mathbb{R}^{\ell} \Rightarrow \operatorname{supp} a\,u \subset [T,+\infty[\times\mathbb{R}^{\ell}\}$$

sur lequel on met une topologie d'espace de Fréchet (de Banach quand X est de largeur finie) définie par les semi-normes

$$\| a\|_{X',s,k} = \| \gamma_{X'X}a\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{s,k}(X'),\ \mathcal{H}_{s-t,k-m}(X'))}$$

où X' est de largeur finie et $X' \subset X$ et $\gamma_{X'X}\,a$ désigne la restriction de a à X'.

$$\mathcal{L}^{o}_{t,m}(X) = \{a \in \mathcal{L}_{t,m}(X)\ ;\ \| a\|_{X',s,k} \xrightarrow[T'_+-T'_-\to 0]{} 0 \quad ,\ \forall X' = [T'_-,T'_+]\times\mathbb{R}^{\ell}\subset X,\ \forall s \in R,\ \forall k = m_+,\dots\}$$

Propriété 1

* $\mathcal{L}^{o}_{t,m}\,\mathcal{L}_{t',m'} \subset \mathcal{L}^{o}_{t+t',m+m'}$

* $L_{t,m}(X) = \{$opérateurs pseudodifférentiels d'ordre t en x et m en x_o de symboles dans $S_{t,m}(X\times\Xi)$ prolongeables en fonctions analytiques de ξ_o dans $\mathbb{C}_- \setminus \mathbb{R}\ \} \subset \mathcal{L}_{t,m}(X)$ où $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$.

* Les opérateurs du type $I + A$ avec $A \in \mathcal{L}^{o}_{o,o}(X)$ sont inversibles sous la forme $I + B$ avec $B \in \mathcal{L}^{o}_{o,o}(X)$.

* $U_1(t) \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} C^{p}([0,+\infty[\ ,\ \mathcal{L}_{p,p}(X))$

* $\gamma_{X'X}\,U_1(t) = 0$ si $t > T'_+ - T'_- =$ largeur de X', $\forall\, X' \subset X$.

Alors ∂_1^{α} a un sens comme élément de $\mathcal{L}_{([\alpha]+1)_+,\ ([\alpha]+1)_+}(X)$ car c'est l'intégrale d'une fonction continue sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathcal{L}_{([\alpha]+1)_+,([\alpha]+1)_+}(X)$ convergente en 0 $(m - \alpha - 1 > 1)$ et à l'infini d'après les propriétés de $U_1(t)$.

Propriété 2

* ∂_1^{α} est indépendant de $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > \alpha$ et $\partial_1^{\alpha} \in \mathcal{L}_{([\alpha]+1)_+,\ [\alpha]+1}(X)$

* ∂_1^{α} est un élément d'une classe $L_{s,k,\varepsilon}(U_1,X)$ formée par les opérateurs intégro pseudodifférentiels de la forme

$$A(x,D) = \int_0^{+\infty} a(t,x,D)\,U_1(t)\,dt \tag{5}$$

où $a(t,x,D) \in L_{s,k}(X)$ vérifie : $t^{1-\varepsilon+q}(\frac{d}{dt})^q a(t,x,D) \in L_\infty(]0,T],L_{s,k}(X))$

pour $\forall\, T > 0$ et $\forall\, q \in \mathbb{N}$.

$\partial_1^\alpha \in L_{[\alpha]+1,[\alpha]+1,\varepsilon}(U_1,X)$ $(\forall\, \varepsilon\ ,\ 0 < \varepsilon < [\alpha]+1-\alpha)$ si $\alpha \geqslant 0$ et

$\partial_1^\alpha \in L_{o,o,\varepsilon}(U_1,X)$ si $\alpha < 0$.

* $L_{s,k}(X) \subset L_{s+1,k+1,\varepsilon}(U_1,X)$ et $L_{s,k,\varepsilon}(U_1,X) \subset \mathcal{L}^o_{s,k}(X)$

* L'ensemble des opérateurs intégro-pseudo-différentiels attachés au même semi groupe U_1 forme une algèbre de composition.

(b) Réductions sur P

On a d'abord un lemme généralisant le lemme 2

Lemme 3 [4]

Sous les hypothèses 1) 2) 3) on a :

(6) $P' = \partial_1^{-\alpha} P\, \partial_1^\alpha = \partial_2\, \partial_1 + r + R_1 + R_2$

(resp. $P'' = \partial_2^{-(1-\alpha)} P\, \partial_2^{1-\alpha} = \partial_1\, \partial_2 + r' + R_1' + R_2'$) avec

r et $r' \in L_{o,o}(X)$, $R_1 \in L_{1,O,1}(U_1,X)$, $R_2 \in L_{o,o,1}(U_1,X)$, $R_1' \in L_{1,O,1}(U_2,X)$ et $R_2' \in L_{o,o,1}(U_2,X)$.

Ce lemme est long à démontrer ; le commutateur disparaît de (2) mais il vient à sa place dans P' et P" un terme intégro pseudo différentiel d'ordre global 1 en x et d'ordre partiel O en x_o (les autres termes sont négligeables) ; on va le faire disparaître en utilisant un deuxième lemme de réduction.

Lemme 4 [4]

Sous l'hypothèse 3 (c), $\exists\, b$ et $\bar{b} \in L_{o,o,1}(U_1,X)$ dont les noyaux pseudo différentiels admettent le même symbole principal $b_o(t)$ indépendant de x et ξ tels que

(7) $(I+b)(\partial_2\, \partial_1 + r + R_1 + R_2) = (\partial_2\, \partial_1 + \partial_2\sigma + s + S)(I+\bar{b})$

avec σ et S dans $L_{o,o,1}(U_1,X)$ et $s \in L_{o,o}(X)$.

Sous l'hypothèse 3(C') on a un résultat analogue.

(c) Calcul des inverses de P

Proposition 1 [4]

Sous les hypothèses 1) 2) 3) il existe des inverses à gauche $\mathcal{R}_g$ et à droite $\mathcal{R}_d$ de P , de classe $\mathcal{L}^o_{[\rho],\,[\rho]-1}(X)$ avec $\rho = \alpha$ (resp $\rho = 1-\alpha$) si (C) (resp (C') est vérifiée.

Preuve (prenons par exemple $\alpha \geqslant 0$)

D'après (6) et (7) on a :

$$(8) \qquad (I+b)\,\partial_1^{-\alpha}\; P\; \partial_1^{\alpha}\,(I+\bar{b})^{-1} = \partial_2(\partial_1+\sigma) + s + S = P''' \;.$$

Soit

$$(9) \qquad \begin{cases} \mathcal{R}_j = \int_o^{+\infty} U_j(t) \quad dt \in L_{o,o,1}(U_j, X) \;;\ \text{alors} \\ \partial_j\,\mathcal{R}_j = \mathcal{R}_j\,\partial_j = I \qquad (j=1,2). \end{cases}$$

D'après (8), (9) et la propriété 1 ,

$\mathcal{R}'_d = \mathcal{R}_1(I + \sigma\mathcal{R}_1)^{-1}\,\mathcal{R}_2(I+(s+S)\mathcal{R}_1(I+\sigma\mathcal{R}_1)^{-1}\mathcal{R}_2)^{-1}$ existe et représente un inverse à droite de P''' dans X .

Donc $\mathcal{R}_d = \partial_1^{\alpha}(I+\bar{b})^{-1}\,\mathcal{R}'_d(I+b)\,\partial_1^{-\alpha}$ est un inverse à droite de P dans X ; on a de même un inverse à gauche $\mathcal{R}_g$ de P. D'où l'existence de la solution $y = \mathcal{R}_d f$ de (3) et son unicité.

III. CAS D'UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS DU PREMIER ORDRE

Soit

$$h(x,D) = h_1(x,D) + h_o(x,D)$$

l'opérateur de ce système décomposé en opérateurs à symboles homogènes en ξ de degrés successifs 1 et O .

On note

$$(10)\quad \begin{cases} h_1(x,\xi) = iH(x,\xi) = i\begin{pmatrix} H_1^1 & H_2^1 \\ H_1^2 & H_2^2 \end{pmatrix} \text{ la matrice caractéristique et} \\ A(x,\xi) = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} \text{ la matrice des cofacteurs de } H . \\ \det H = i^2 \ \Delta_2 \ \Delta_1 \quad \text{avec} \quad \Delta_j(x,\xi) = \xi_o - \lambda_j(x,\xi') \quad (j = 1,2) , \\ \mathcal{K} \text{ le polynome sous caractéristique associé à } h \ [1] . \end{cases}$$

<u>Hypothèse 4</u>

$$\text{Inf } \{ |A_1^1 (x; \lambda_j(x,\xi'), \xi')| \ ; x \in X \ , \ |\xi'| = 1, \ j = 1 \text{ et } 2\} > 0$$

<u>Théorème 2</u> [3]

Sous les hypothèses 1), 2), 3), 4) le problème de Cauchy

(11) $\quad hy = f \quad$ dans X avec $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, $f_j \in \mathcal{H}_{t,p}(x)$, possède une solution et une seule $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ avec

$$y_j \in \mathcal{H}_{t-1-[\rho],p-[\rho]}(X) \quad \text{et} \quad \rho = \alpha \quad (\text{resp } 1-\alpha) \text{ si (C) (resp (C')) est}$$
vérifiée.

<u>Preuve</u> : (on prend le cas $\alpha \geqslant 0$, le cas $\alpha \leqslant 1$ est analogue).

L'hypothèse 2 équivaut à l'existence de $a = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$ et $a' = \begin{pmatrix} a'^1_1 & a'^1_2 \\ a'^2_1 & a'^2_2 \end{pmatrix}$ différentiels en x_o et pseudo différentiels en x' d'ordre 1 (de symbole principal commun A) et des opérateurs $\partial_j = i(D_o - \Lambda_j(x,D'))$ tels que

$$(12) \qquad k = h\,a = (\partial_2 \partial_1 + \alpha[\partial_1,\partial_2]) I + r$$

$$(13) \qquad k' = a'h = (\partial_2 \partial_1 + \alpha[\partial_1 , \partial_2]) I + r'$$

avec r et r' matrices d'opérateurs de $L_{o,o}(X)$.

Comme dans II, on calcule un inverse à droite $\mathcal{R}'_d$ de k et un inverse à gauche $\mathcal{R}'_g$ de k' ; d'où les inverses $\mathcal{R}_d = a\,\mathcal{R}'_d$ et $\mathcal{R}_g = \mathcal{R}'_g a'$ de h et l'existence et l'unicité de la solution $y = \mathcal{R}_d f$ de (11).

BIBLIOGRAPHIE

D. GOURDIN

[1] Comm. in Partial Diff. Equations 4 (5) p. 447-507 (1979).

[2] Séminaire sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques et holomorphes de M. J. Vaillant (Paris VI). Exposé de Janvier 1981.

[3] C. R. Acad. Sc. Paris, t. 292 (mai 1981) Série I, p.789-791.

[4] Problème de Cauchy faiblement hyperbolique. A paraître dans Bull.Sc. Math. (1982)

L. HÖRMANDER

[5] Journal d'Analyse Mathématiques, Vol. 32 (1977) p.118-196.

V. Ia. IVRII et V. M. PETKOV

[6] Uspehi Math. Nayk, 29, 5 (1974) p.3-70.

V. Ia IVRII

[7] Transl. Moscow Math. Soc. 1978, Issue 1, p. 1-65.

[8] Travaux de Soc. Math. Moscou (1976) p. 169-170.

R. LASCAR

[9] C. R. Acad. Sc. Paris, t. 287 (Octobre 1978) p.523-525.

T. NISHITANI

[10] Comm. in Partial Differential Equations (3) 4 p. 319 -333 (1978).

[11] Comm. in Partial Diff. Equations (5) 12 p. 1273-1296 (1980).

T. OHYA

[12] Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa, IV, 4, 1977, p. 757-807.

V. M. PETKOV

[13] Journal Bulgare de Mathématiques T1, 1975, p. 372-380.

[14] Publications de l'Université de Paris VI et CNRS-Laboratoire associé 189 n° 75012 (1975).

H. KUMANO-GO

[15] Comm. in Partial Diff Equations 1 (1), 1-44 (1976).