

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN-MARIE TREPEAU

## Sur la résolubilité microlocale des opérateurs de type principal

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1982), p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1982\\_\\_\\_\\_A22\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A22_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA RESOLUBILITE MICROLOCALE DES OPERATEURS DE TYPE PRINCIPAL

par J.M. TREPRAU

Soit  $P$  un opérateur microdifférentiel analytique défini au voisinage de  $x^*$ ,  $x^* \in (T^*\mathbb{R}^n) \setminus \mathbb{R}^n$ , de symbole principal  $p$ , et de type principal en  $x^*$  :

$$(H.0) \quad dp \text{ et } \omega = \sum_{j=1}^n \xi_j dx_j \text{ sont linéairement indépendantes en } x^* .$$

Rappelons l'énoncé de la condition  $(\Psi)$  sur un voisinage  $V$  de  $x^*$  :

$(\Psi)$  Il existe  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $d(\operatorname{Re} zp)$  et  $\omega$  sont indépendantes sur  $V$  et que  $\operatorname{Im}(zp)|_V$  ne change pas de signe de  $-$  à  $+$  le long des bicaractéristiques nulles de  $\operatorname{Re} zp$  dans  $V$ .

La condition  $(\Psi)$  est l'extension microlocale naturelle de la condition  $(P)$  qui caractérise la résolubilité locale des opérateurs de type principal (L. Nirenberg et F. Trèves, R. Beals et C. Feffermann). P. Popivanov m'a indiqué que Yu. Egorov avait récemment publié (Mat. Sbornik déc. 1981) une démonstration complète de la suffisance de la condition  $(\Psi)$  (globale) pour la résolubilité locale  $\mathcal{C}^\infty$  d'un o.p.d. de  $\mathcal{C}^\infty$  de type principal.

Notons  $(\Psi^-)$  la condition obtenue lorsqu'on échange les signes  $+$  et  $-$  dans  $(\Psi)$ . Soit  $\mathcal{C}_{x^*}$  l'espace des germes de microfonctions en  $x^*$ . Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 1 : Si  $P$  vérifie (H.0),  $P$  est résoluble dans les germes en  $x^*$  -autrement dit,  $P : \mathcal{C}_{x^*} \longrightarrow \mathcal{C}_{x^*}$  est surjectif- si et seulement s'il vérifie la condition  $(\Psi)$  dans un voisinage de  $x^*$  .

Remarque 1 : La condition  $(\Psi)$  est stable au sens suivant (L. Nirenberg, F. Trèves) : si  $P$  vérifie  $(\Psi)$  et si  $a$  est un symbole elliptique homogène dans  $V$ ,  $\operatorname{Im}(ap)$  ne change pas de signe de  $-$  à  $+$  le long des bicaractéristiques nulles de  $\operatorname{Re}(ap)$  dans  $V$  .

Remarque 2 : La nécessité de  $(\Psi)$  est classique : si elle n'est pas vérifiée, il existe une suite  $x_n^* \rightarrow x^*$  telle que P en  $x_n^*$  soit micro-localement équivalent à  $\frac{\partial}{\partial x_1} + ix_1^{2r+1} \frac{\partial}{\partial x_n}$  en  $(0; 0, \dots, 0, 1)$  (M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara).

La non résolubilité de P en  $x_n^*$  est alors facile à prouver - par exemple par les techniques ci-dessous - et si  $f_n \in \mathcal{C}_{x_n^*}$  n'est pas dans l'image de P, la flaccidité du faisceau  $\mathcal{C}$  permet de construire une  $f \in \mathcal{C}_{x^*}$  qui "vaut"  $f_n$  en  $x_n^*$  : il est clair que  $Pu = f$  n'a pas de solutions dans  $\mathcal{C}_{x^*}$ .

Notons :

$(\Psi_{x^*}^-)$  :  $\begin{cases} \text{Imp ne change pas de signe de } + \text{ à } - \text{ le long de la bicaractéris-} \\ \text{tique (supposée nulle) de Rep issue de } x^* . \end{cases}$

### I. ANALYSE MICROLOCALE A LA FRONTIERE D'UN OUVERT STRICTEMENT PSEUDOCONVEXE

Soit  $z_0 \in \mathbb{C}^n$ , f une fonction analytique réelle près de  $z_0$ , telle que :

$$f(z_0, \bar{z}_0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial z} (z_0, \bar{z}_0) \neq 0$$

et

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} (z_0, \bar{z}_0) \omega_j = 0 \implies \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (z_0, \bar{z}_0) \omega_j \bar{\omega}_k \geq C |\omega|^2$$

L'ouvert  $\Omega : f(z, \bar{z}) < 0$  est près de  $z_0 \in \partial \Omega$  un ouvert strictement pseudoconvexe à frontière analytique, notée S. On munit S du faisceau  $\mathcal{O}^+$  défini par :

$$\mathcal{O}_z^+ = \varinjlim_{U \ni z} \mathcal{O}(U \cap \Omega) / \mathcal{O}(U)$$

où U parcourt un système fondamental de voisinages de z ; c'est le "faisceau des fonctions holomorphes près de z dans  $\Omega$  modulo celles qui traversent". Soit

$$\Sigma^+ = \{(z, \zeta) \in T^* \mathbb{C}^n, f(z, \bar{z}) = 0 \text{ et } \zeta = k \frac{\partial f}{\partial z} (z, \bar{z}), k > 0\}$$

le fibré conormal extérieur à S dans  $\mathbb{C}^n$ , muni du faisceau

$\tilde{\mathcal{C}} = \pi^{-1} \mathcal{O}^+$ , où  $\pi : T^* \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est la projection canonique.  $\Sigma^+$  est une sous-variété de  $T^* \mathbb{C}^n$ , lagrangienne pour  $\text{Re } d\omega_{\mathbb{C}}$ , symplectique pour  $\text{Im } d\omega_{\mathbb{C}}$  ( $\omega_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^n \zeta_j dz_j$ ), de complexifiée  $T^* \mathbb{C}^n$  au voisinage de  $(z_0, \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, \bar{z}_0))$ .

Si l'on munit  $\Sigma^+$  de la structure symplectique induite par  $\text{Im } d\omega_{\mathbb{C}}$ , on peut parler de la condition  $(\Psi)$  pour une fonction  $p$  analytique homogène sur  $\Sigma^+$ .

Théorème 2 : Soit  $z_0^* = (z_0, \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, \bar{z}_0))$ . Pour que  $\frac{\partial}{\partial z_1} : \mathcal{O}_{z_0}^+ \rightarrow \mathcal{O}_{z_0}^+$  soit surjectif, il faut et il suffit que  $\zeta_1|_{\Sigma^+}$  vérifie la condition  $(\Psi^-)$ .

Remarque : On peut dans l'énoncé remplacer  $\frac{\partial}{\partial z_1}$  par un opérateur différentiel de type principal en  $z_0^*$ ,  $P$ , la condition devant être vérifiée par  $\sigma(P)|_{\Sigma^+}$ .

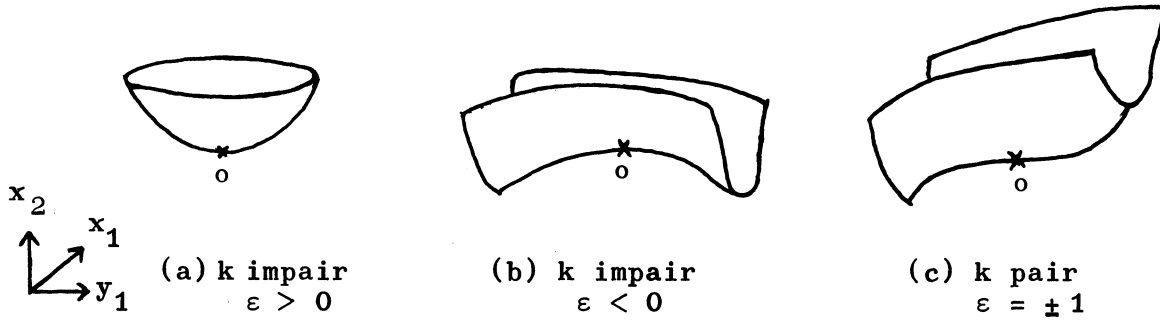
Démonstration du théorème 1 : Notons d'abord que le faisceau  $\mathcal{C}$  de M. Sato vit sur  $T^*_{\mathbb{R}^n} \mathbb{C}^n$ , muni de  $\text{Im } d\omega_{\mathbb{C}}$ . Quand on passe de  $T^*_{\mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n$  à  $T^*_{\mathbb{R}^n} \mathbb{C}^n$ , par  $i : (x, \zeta) \mapsto (x, i\zeta)$ , on doit remplacer  $(\Psi)$  par  $(\Psi^-)$ . Si  $P$  vérifie (H.0), on peut construire une transformation canonique complexe quantifiée  $(\varphi, \mathfrak{F})$ , une fonction analytique  $f$  comme ci-dessus et deux opérateurs elliptiques  $A$  et  $B$  tels que  $\varphi(x^*) = z_0^*$ ,  $\varphi(T^*_{\mathbb{R}^n} \mathbb{C}^n) = \Sigma^+$  et  $\mathfrak{F}(APB) = \frac{\partial}{\partial z_1}$  (tout cela étant local). D'après le résultat fondamental de M. Kashiwara et T. Kawai [2], il existe une quantification  $\tilde{\mathfrak{F}} : \mathcal{C} \rightarrow \varphi^{-1} \tilde{\mathcal{C}}$ , telle que  $\tilde{\mathfrak{F}}(APBu) = \frac{\partial}{\partial z_1} \tilde{\mathfrak{F}}(u)$ . Le théorème 1 résulte donc du théorème 2. ■

## II. UN EXEMPLE DE CALCUL SUR $\Sigma^+$

Si  $f, g$  sont analytiques sur  $\Sigma^+$  le crochet de  $f$  et  $g$  est égal à  $\frac{1}{i} \{F, G\}|_{\Sigma^+}$ , où  $F, G$  sont des prolongements holomorphes de  $f, g$ .

Pour illustrer les résultats de la section III, considérons l'exemple très simple suivant, où  $n = 2$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $k \geq 2$  :

$$\Omega : x_2 > x_1^2 + \varepsilon \frac{2}{(k+1)!} y_1^{k+1}$$



Considérons près de 0,  $0^* = (0, -\frac{1}{2})$ . Il est facile de voir que  $\frac{\partial}{\partial z_1} : \mathcal{O}_0^+ \rightarrow \mathcal{O}_0^+$  est résoluble dans les cas (a) et (c) mais pas dans le cas (b). On a :

$$\Sigma^+ : x_2 = x_1^2 + \frac{2\varepsilon}{(k+1)!} y_1^{k+1}, \quad \zeta_2 = -\frac{1}{2} \ell, \quad \zeta_1 = (x_1 - i \frac{\varepsilon}{k!} y_1^k) \ell, \quad \ell > 0.$$

D'où :

$$\zeta_1|_{\Sigma^+} = p_1 + ip_2, \quad p_1 = x_1 \ell, \quad p_2 = -\varepsilon \frac{y_1^k}{k!} \ell$$

sur  $\Sigma^+$ , on a :

$$u \stackrel{\text{déf}}{=} i \left( \frac{\zeta_1}{\ell} - z_1 \right) = y_1 + \varepsilon y_1^k / k!$$

d'où les extensions holomorphes de  $p_1, p_2$  :

$$P_1 = \zeta_1 + o(u^k), \quad P_2 = -\varepsilon \frac{i^k}{k!} \left( \frac{\zeta_1}{\ell} - z_1 \right)^k \ell + o(u^k) \quad (\ell = -2\zeta_2)$$

on en déduit :

$$H_{p_1}^j p_2(0^*) = 0, \quad j \leq k-1; \quad H_{p_1}^k p_2(0^*) = (-1)^{k+1} \varepsilon$$

Ainsi, la condition  $(\Psi_{0^*}^-)$  est vérifiée dans les cas (a) et (c) mais pas dans le cas (b).

### III TRADUCTION DE LA CONDITION $(\Psi^-)$

Notons  $p = \zeta_1|_{\Sigma^+} = p_1 + ip_2$ ,  $p_I = H_{p_{i_1}} \dots H_{p_{i_{j-1}}} p_{i_j}$  pour

$I = (i_1, \dots, i_j)$  de longueur  $|I| = j$ . Pour  $y^* \in \Sigma^+$ , on définit  $k(y^*)$  par :

$P_I(y^*) = 0$  si  $|I| \leq k(y^*)$ , et il existe  $I$ ,  $|I| = k(y^*) + 1$  tel que  $p_I(y^*) \neq 0$ . On note  $s(y^*)$  l'inf de  $k(y^*)$  et du plus petit entier  $s$  tel que l'espace engendré dans  $T_{y^*} \Sigma^+$  par le champ radial  $\frac{\partial}{\partial \lambda}$  et les vecteurs  $H_{p_I}(y^*)$ , pour  $|I| \leq s + 1$ , soit de dimension  $\geq 3$ .

Supposons  $\Omega$  mis sous la forme

$$(3.1) \quad \Omega : x_n > H(x_1, y_1, z_2, \dots, \bar{z}_{n-1}, y_n)^2 + F(y_1, z_2, \dots, \bar{z}_{n-1}, y_n)$$

avec :  $H(0) = F(0) = 0$   $\frac{\partial H}{\partial x_1}(0) \neq 0$ ,  $dF(0) = 0$ .

Notons  $0^* = (0; 0, \dots, 0, -\frac{1}{2})$  la normale extérieure à  $S = \partial\Omega$  en  $0$ .

(a) traduction de  $\{p_1, p_2\} \leq 0$ .

Supposons d'abord  $\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}(0) = c \neq 0$ . On montre que la condition

$\{p_1, p_2\}(0^*) \leq 0$  entraîne que  $c$  est positif. On a donc un minimum local analytique  $G(z_2, \dots, \bar{z}_{n-1}, y_n)$  analytique. La condition (plus faible que  $(\Psi^-)$ ) :

$$p(y^*) = 0 \implies \{p_1, p_2\}(y^*) \leq 0$$

entraîne que l'ouvert  $x_n > G(z_2, \dots, y_n)$  est pseudoconvexe près de  $0$ .

(b) traduction de  $(\Psi^-)$

Supposons  $\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}(0) = 0$ . Un changement de variable en  $(z_2, \dots, z_n)$  permet de se ramener au cas où :

$$F(y_1, z_2, \dots, \bar{z}_{n-1}, y_n) = F_0(y_1) + \sum_{j=2}^{n-1} F_j(y_1) z_j + \overline{F_j(y_1)} \bar{z}_j + z\bar{z} + o(|z|^2 + |y_n|)$$

On prouve les résultats suivants :

(i)  $k(0^*) = s(0^*) = +\infty \iff F_0(y_1) \equiv F_j(y_1) \equiv 0, j = 2, \dots, n-1$ .

(ii)  $k(0^*) \leq 2s(0^*) \iff F_0$  s'annule à l'ordre  $g$  exactement et les  $F_j$ ,  $j = 2, \dots, n-1$ , à un ordre  $> g/2$ .

Dans ce cas  $F_0(y_1) \sim F_0 y_1^\delta$  et  $(\Psi_{0^*}^-)$  est vérifiée sauf si  $\delta$  est pair et  $F_0 < 0$  (comparer avec le II).

(iii)  $k(0^*) = 2s(0^*) + 1$  et  $(\Psi_{0^*}^-)$  est vérifiée  $\iff F(y_1) \sim F_0 y_1^g$  ( $F_0 \neq 0$ ,  $g$  pair),  $F_j(y_1) = F_j y_1^{g/2} + o(y_1^{g/2})$ , les  $F_j$  non tous nuls, et  $F_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n-1} |F_j|^2 > 0$ .

(iv)  $k(0^*) > 2s(0^*) + 1 \iff$  on a les mêmes ordres d'annulation que ci-dessus, mais  $F_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n-1} |F_j|^2 = 0$

(v)  $k(0^*) = 2s(0^*) + 1$  et  $(\Psi_{0^*}^-)$  n'est pas vérifiée, dans tous les autres cas.

On déduit aisément de cette étude la proposition suivante :

**Proposition 3** : Soit  $\Omega$  défini par (3.1). La condition  $(\Psi^-)$  est vérifiée au voisinage de  $0^*$  si et seulement si (au voisinage de 0) :

(a)  $F$  n'admet pas de maximum local strict lorsque  $y_1$  varie

(b) Si  $F$  admet lorsque  $y_1$  varie un minimum local strict pour  $y_1 = y_1(z_2, \dots, y_n)$ , fonction analytique de  $(z_2, \dots, y_n)$ ,  $G(z', \bar{z}') = -x_n + F(y_1(z_2, \dots, y_n), z_2, \dots, y_n)$  vérifie :

$$\sum_{j=2}^n \frac{\partial G}{\partial z_j} (z', \bar{z}') \omega_j = 0 \implies \sum_{j,k=2}^n \frac{\partial^2 G}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (z', \bar{z}') \omega_j \bar{\omega}_k \geq 0$$

Si  $(\Psi^-)$  n'est pas vérifiée, on montre qu'elle n'est pas vérifiée en un point du type (a), ou du type (b;ii)).

L'étape essentielle de la démonstration du théorème 2 est de prouver le théorème suivant :

**Théorème 4** : On suppose que  $\Sigma^+$  vérifie  $(\Psi^-)$  près de  $0^*$  ; soit  $\tilde{\pi} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$  la projection  $(z_1, z')$   $\longrightarrow$   $z'$ . Il existe un système fondamental de voisinages de 0,  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tels que :

(a) les feuilles intégrales de  $\frac{\partial}{\partial z_1}$  dans  $U_n$  sont connexes.

(b)  $\tilde{\pi}(\Omega \cap U_n)$  est pseudoconvexe.

Démonstration du Théorème 2 : Soit  $f \in \mathcal{O}(\Omega \cap U_n)$ . On recouvre  $\Omega \cap U_n$  par une famille d'ouverts  $(T_i)$ ,  $T_i$  étant l'intersection avec  $\Omega \cap U_n$  d'un "tube" de feuilles intégrales de  $\frac{\partial}{\partial z_1}$  de la forme  $\mathbb{C}_{z_1} \times t_i$ ,  $t_i$  une boule par exemple, tel qu'une section au moins  $\{z_1^{(i)}\} \times t_i$  soit contenue dans  $\Omega \cap U_n$ .

La connexité des feuilles (la simple connexité, qui est automatique, n'est pas utile) permet de résoudre

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = f|_{T_i}, \quad u_i \in \mathcal{O}(T_i)$$

si  $u_{jk} = (u_j - u_k)|_{T_{jk}}$ , où  $T_{jk} = T_j \cap T_k$ ,  $\frac{\partial u_{jk}}{\partial z_1} = 0$  et  $u_{jk}$  est de la forme  $u_{jk} = v_{jk}(z')$  avec  $v_{jk} \in \mathcal{O}(t_{jk})$ ,  $t_{jk} = \tilde{\pi}(T_{jk})$

Bien sûr,  $u_{jk} + u_{kl} + u_{lj} = 0$ , et,  $\tilde{\pi}(\Omega \cap U_n)$  étant pseudoconvexe, on peut résoudre le problème de Cousin

$$v_{jk} = v_j - v_k, \quad v_j \in \mathcal{O}(t_j), \quad v_k \in \mathcal{O}(t_k)$$

Les fonctions  $\tilde{u}_j(z_1, z') = u_j(z_1, z') - v_j(z') \in \mathcal{O}(T_j)$  se recollent en une solution globale de  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z_1} = f$  dans  $\Omega \cap U_n$ . ■

#### IV. DEMONSTRATION DU THEOREME 4. PREMIERE ETAPE.

On choisit pour  $U_n$  des pavés du type :

$$|x_1| < r_1, \quad |y_1| < \varepsilon \quad |(z_2, \dots, z_{n-1}, y_n)| < r \quad |x_n| < r_n.$$

La connexité des caractéristiques résulte simplement du a) de la Proposition 3 dès que  $r_1$  est assez grand par rapport aux autres dimensions. La pseudoconvexité de la projection se traite immédiatement dans les deux cas suivants :

+ Si  $\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}(0) \neq 0$  ( $\iff S(0^*) = 0$ ), elle résulte du III a).

+ Si  $F(y_1, 0) \neq 0$  ( $\iff k(0^*)$  est pair et  $\leq 2s(0^*)$ ) ; alors



$\tilde{\pi}(U_n \cap \Omega) = \tilde{\pi}(U_n)$  pour  $U_n$  assez petit.

Supposons  $F(y_1, 0) \equiv 0$  ( $\iff k(0^*) = s(0^*) = +\infty$ ). La projection s'écrit, après minimisation en  $x_1$  :

$$\omega : x_n > \min_{|y_1| \leq \varepsilon} F(y_1, z_2, \dots, \bar{z}_{n-1}, y_n)$$

Compte tenu du fait que  $F$  n'a pas de maximum local strict lorsque  $y_1$  varie, le minimum dans le second membre est atteint soit en un point unique de  $]-\varepsilon, +\varepsilon[$  (type I), soit en  $\pm \varepsilon$  avec un minimum effectif (type II) (i.e. c'est un minimum même sur  $]-\varepsilon', +\varepsilon'[$  avec  $\varepsilon' > \varepsilon$ ), soit en  $\pm \varepsilon$  sans minimum effectif (type III), soit identiquement sur  $[-\varepsilon, +\varepsilon]$  (type IV). On veut montrer que la projection  $\omega$  est d'holomorphie, ce qui se prouve en chaque point de  $\partial\omega$  (le cas des points provenant de  $\partial U_n$  n'est pas difficile à régler). Aux quatre types précédents correspondent quatre types de points sur  $\partial\omega$ . Les points du type I seront traités dans le V. L'étude des points du type II est ramené à celle du type I (pour la construction d'une fonction holomorphe qui ne se prolonge pas) si l'on remarque que  $\omega \subset \omega' : x_n > \min_{|y_1| \leq \varepsilon'} F(y_1, z_2, \dots, y_n)$

( $\varepsilon' > \varepsilon$ ) au voisinage d'un tel point. Au voisinage d'un point du type III (avec par exemple  $+\varepsilon$ )  $\omega$  est une section  $x_n > F(\varepsilon, z_2, \dots, y_n)$ , donc est strictement pseudoconvexe. Enfin, on peut, au voisinage d'un point du type IV, construire une hypersurface complexe posant par ce point et extérieur à  $\omega$ . Ces indications rapides montrent qu'on peut se limiter à étudier le cas où ou bien  $k(0^*)$  ou bien  $s(0^*)$  est fini.

#### V DEMONSTRATION DU THEOREME 4. DEUXIEME ETAPE.

Nous sommes ramenés à étudier la situation suivante. Soit

$$\Omega : x_n > F(y_1, z_2, \dots, y_n)$$

un ouvert à frontière analytique de  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}$  vérifiant les conditions suivantes :

(i) les sections  $\Omega_{y_1}$  ( $y_1$  fixé), considérées comme ouverts de  $\mathbb{C}^{n-1}$ , sont strictement pseudoconvexes.

(ii)  $F$  vérifie les (a) et (b) de la proposition 3 .

(iii)  $F(y_1, 0)$  admet en  $y_1 = 0, 0$  pour minimum local strict.

Les points (ii) et (iii) entraînent que  $F$  est minimale, lorsque  $y_1$  varie, en  $y_1 = t(z_2, \dots, y_n)$ , fonction continue de  $(z_2, \dots, y_n)$  : la projection  $\omega$  de  $\Omega$  est "déterminée localement". On a :

$$\omega : -x_n + H(z_2, \dots, y_n) = G(z_2, \dots, y_n) < 0$$

$$\text{avec } H(z_2, \dots, y_n) = \min_{y_1} F(y_1, z_2, \dots, y_n) = F(t(z_2, \dots, y_n), z_2, \dots, y_n) .$$

Nous dirons que  $\partial\omega$  est pseudoconvexe au voisinage d'un point si au voisinage de ce point  $G$  est régulière et :

$$G = \sum_{j=2}^n \frac{\partial G}{\partial z_j} \omega_j = 0 \implies \sum_{j,k=2}^n \frac{\partial^2 G}{\partial z_j \partial z_k} \omega_j \bar{\omega}_k \geq 0 .$$

Lemme 1 :  $\partial\omega$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , et il existe un ouvert dense de  $\partial\omega$  qui est analytique et pseudoconvexe.

Soit  $\delta(y_1, \theta)$  ( $\theta \in \mathbb{C}^{n-1}$ ) la distance de  $\theta$  à  $\partial\Omega_{y_1}$  (on peut supposer  $U_n$  contenu dans un "bon" voisinage tubulaire de  $\partial\Omega$  si  $(y_1, \theta) \in \Omega$ , moins cette distance dans le cas contraire.

Lemme 2 :  $\delta(y_1, \theta)$  n'a pas de minimum local strict lorsque  $y_1$  varie et a un maximum local strict, lorsque  $y_1$  varie, en  $y_1 = t(\theta)$  fonction continue de  $\theta$ .  $\delta(\theta) = \max_{y_1} \delta(y_1, \theta)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et est la distance de  $\theta$  à  $\partial\omega$ .

Lemme 3 : Il existe un ouvert dense  $\hat{\omega}$  de  $\omega$ , tel que les points de  $\hat{\omega}$  se projettent sur  $\partial\omega$  en des points au voisinage desquels  $\partial\omega$  est analytique et pseudoconvexe, et tel que  $\theta \longrightarrow \delta(\theta)$  est analytique sur  $\hat{\omega}$ .

Il résulte du lemme 3 (cf. la démonstration du Théorème 2.6.12 de L. Hörmander [1]) que :

Lemme 4 : La fonction  $\theta \longmapsto -\text{Log } \delta(\theta)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\omega$ , analytique et plurisousharmonique sur un ouvert dense  $\hat{\omega}$  de  $\omega$ .

Le lemme 4 est insuffisant pour montrer que  $\theta \longmapsto -\text{Log } \delta(\theta)$  est plurisousharmonique sur  $\omega$ , ce qui est notre objectif. Le lemme suivant est

donc important.

Lemme 5 : La fonction  $\delta(\theta)$  est analytique en dehors d'un ensemble analytique réel de codimension 1.

Démonstration : On a  $\delta(\theta) = \delta(t(\theta), \theta)$ ,  $t(\theta)$  étant le point où  $t \mapsto \delta'_t(t, \theta)$  change de signe de + à -. On sait d'autre part que  $t \mapsto \delta'_t(t, \theta)$  ne change pas de signe de - à +. On peut écrire :

$$\delta'_t(t, \theta) = p(t, \theta)^m q(t, \theta) H(t, \theta)$$

où  $p$  et  $q$  sont sous forme de Weierstraß par rapport à  $t$ , premiers entre eux, où  $p$  est irréductible, tel que  $p(t, 0)^m$  change de signe de + à -, et où  $H$  est positive. Il est facile de voir que les hypothèses de changement de signes au-dessus entraîne que  $q(t, \theta)H(t, \theta)$  est partout  $\geq 0$ . On en déduit que les singularités de  $\delta(\theta)$  sont contenues dans la projection de :

$$p(t, \theta) = \frac{\partial p}{\partial t}(t, \theta) = 0$$

mais  $p$  et  $\frac{\partial p}{\partial t}$  étant premiers entre eux, cette projection est contenue dans un ensemble analytique  $h(\theta) = 0$  ( $h \neq 0$ ). ■

Notre objectif est donc atteint avec le

Lemme 6 : Une fonction de classe  $C^1$ , analytique et plurisousharmonique en dehors d'un ensemble analytique réel de codimension 1, est plurisousharmonique.

- [1] L. Hörmander, Several complex variables.
- [2] M. Kashiwara, T. Kawai, some applications of boundary value problems for elliptic systems of linear differential equations in Ann. of Math. Studies n°93 (1980).

