JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CESARE PARENTI

Propagation des singularités C^{∞} pour des opérateurs fuchsiens

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A5_0>

PROPAGATION DES SINGULARITES C^∞ POUR DES OPERATEURS FUCHSIENS

par C. PARENTI

On se propose de donner dans cet exposé certains résultats, contenus dans l'article [2] et concernant la propagation des singularités C^∞ pour des O.P.D. à caractéristiques multiples non-involutives qui généralisent des résultats précédents de Ivriĭ [4] et Hanges [3] .

1. O.P.D. A CARACTERISTIQUES MULTIPLES NON-INVOLUTIVES

On se donne un O.P.D. classique $P \in L^m(Y)$ (Y variété C^∞ n-dimensionnelle) avec symbole $p(y,\eta) \sim p_m(y,\eta) + p_{m-1}(y,\eta) + \ldots$ Supposons que sur $T^*Y \setminus 0$ (ou sur un ouvert conique) on ait la factorisation

$$p_m = q_1^{k_1} q_2^{k_2} e \qquad (k_1,\ k_2 \text{ entiers positifs}),$$

où les $q_j(y,\eta)$, $j = 1,2$, sont réelles et homogènes de degré 1 en η , avec $e \neq 0$ sur $T^*Y \setminus 0$. Posons $\Sigma_j = q_j^{-1}(0)$, et supposons $\Sigma_j \neq \emptyset$ et que le champ H_{q_j} , $\sum_1^n \eta_k\, \partial/\partial\eta_k$ soient indépendants sur Σ_j , $j = 1,2$.

Si $k_j > 1$ on suppose en plus que P vérifie la condition de Levi par rapport à q_j (i.e. microlocalement près de Σ_j on peut écrire

$$P = \sum_{\nu=0}^{k_j} B_{\nu,j}\, Q_j^{\nu} \quad \text{avec } B_{\nu,j} \in L^{m-k_j}(Y) \quad \text{et} \quad Q_j = q_j(y,D_y)).$$

Etant donnée une distribution $u \in \mathcal{D}'(Y)$, on s'intéresse à l'étude de $WF(u) \setminus WF(Pu) \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ($WF(.)$ est le spectre singulier C^∞) . Le cas $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ étant bien connu, on considère ici le cas suivant :

$$\underline{\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \{q_1,q_2\} \neq 0 \text{ sur } \Sigma}$$

Dans le cadre C^∞ et pour $k_1 = k_2 = 1$, ce cas a été étudié par Ivrii [4], Alinhac [1] et Hanges [3].

On rappelle que dans le cadre analytique on a des résultats assez généraux établis par Miwa [6] et plus récemment par Ôaku [7] pour k_1, k_2 quelconques (et même sans conditions de Lévi sur les termes d'ordre inférieur).

Pour chaque $\rho_o \in \Sigma$ on va noter par $\gamma_j(\rho_o) \subset \Sigma_j$, $j = 1,2$ la bicaractéristique nulle du facteur q_j qui passe par ρ_o. Dans le cas $k_1 = k_2 = 1$, on sait déjà que si $\rho_o \in WF(u) \setminus WF(Pu)$ alors, localement, on a $\gamma_j(\rho_o) \subset WF(u) \setminus WF(Pu)$ pour au moins un j. On montrera que la même chose se passe dans le cas k_1, k_2 quelconques si les conditions de Levi sont vérifiées. Sans condition de Levi ce résultat est faux (il suffit de considérer dans $\mathbb{R}^n_{(t,x)}$ l'exemple $P = t^2 \partial_t - 1$ et de prendre $u(t,x) = Y(t)e^{-1/t} \otimes \varphi(x)$ avec $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x)$). On va supposer que $\{q_1, q_2\} < 0$ sur Σ (le cas $\{q_1, q_2\} > 0$ se traite d'une façon analogue); En utilisant un argument géométrique assez classique on peut se réduire à considérer le cas où $Y = \mathbb{R}^1_t \times \mathbb{R}^{n-1}_x$ (on note alors par $(t,x;\tau,\xi)$ les points de T^*Y) et la variété Σ_1 (resp. Σ_2) est donnée par l'équation $t = 0$ (resp. $\tau = 0$).

Dans cette situation, en utilisant les hypothèses faites, on prouve qu'on peut se réduire à étudier les deux cas suivants :

<u>Cas $k_1 \geq k_2$</u> :

$$P = \sum_{o}^{k_2} B_j\, t^{k_1-k_2+j}\, \partial_t^j + \sum_{1}^{k_1-k_2} A_j\, t^{k_1-k_2-j},$$

avec $B_j \in L^{m-k_2}(\mathbb{R}^n)$, B_{k_2} elliptique près de Σ, et $A_j' \in L^{m-k_2-j}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Cas $k_1 < k_2$</u>

$$P = \sum_{o}^{k_1} B_j\, t^j\, \partial_t^{k_2-k_1+j} + \sum_{o}^{k_2-k_1-1}{}_j\, A_j\, \partial_t^j$$

avec $B_j, A_j \in L^{m-k_2}(\mathbb{R}^n)$, B_{k_1} elliptique près de Σ.

Ensuite, on montre que l'équation $Pu = f$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, peut se traduire dans un système fuchsien :

(1) $$\mathcal{P}\vec{v} = (t\partial_t I_N - \mathcal{A}(t,x,D_t,D_x))\vec{v} = \vec{g}, \quad N = \max(k_1,k_2),$$

où $\mathcal{A}$ est une matrice $N \times N$ d'o.p.d. d'ordre 0, avec $WF(\vec{v}) = \bigcup_{j=1}^{N} WF(v_j) = WF(u)$ et $WF(\vec{g}) = WF(f)$ près de Σ. On va donner seulement deux exemples et on renvoit à [2] pour le cas général.

<u>Exemple 1</u> :

$$Pu = (t^2 \partial_t + Bt + A)u = f \quad , \quad B \in L^0, \quad A \in L^{-1} .$$

On pose $v_1 = u$, $v_2 = \Lambda\, tu$ où $\Lambda = (1 + |D_x|^2)^{1/2}$; alors

$$t\partial_t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \partial_t\, \Lambda^{-1} \\ -\,[\Lambda,B]t \;-\; \Lambda A & I - B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda f \end{pmatrix}$$

<u>Exemple 2</u> :

$$Pu = t\partial_t^2 + B\,\partial_t + A \quad , \qquad B, A \in L^0 .$$

On pose $v_1 = u$, $v_2 = \partial_t u$ et l'on trouve que

$$t\partial_t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -A & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Dans le cas général, si $\mathcal{a}$ denote le symbole principal de $\mathcal{A}$, on montre que pour chaque $\rho = (0,x;0,\xi) \in \Sigma$, $|\xi| = 1$, on a

$$\det(ZI_N - \mathcal{a}(\rho)) = \begin{cases} (Z+1)^{k_1-k_2} \displaystyle\sum_{0}^{k_2} \frac{b_j(\rho)}{b_{k_2}(\rho)}\, \zeta(\zeta-1)\ldots(\zeta-(j-1))\Big|_{\zeta = Z-(k_1-k_2)} , & N = k_1 \\ Z^{k_2-k_1} \displaystyle\sum_{0}^{k_1}{}_j \frac{b_j(\rho)}{b_{k_1}(\rho)}\, z(z-1)\ldots(z-(j-1)) , & N = k_2 \end{cases}$$

Il convient de remarquer que sauf dans le cas $k_1 = k_2$, la matrice $\mathcal{a}(\rho)$ a toujours la valeur propre $z = -1$, si $k_1 > k_2$, ou bien $z = 0$, si $k_1 < k_2$.

2. SYSTEMES FUCHSIENS

Les considérations faites dans le § 1 donnent une bonne motivation pour étudier des systèmes du type suivant

$$\mathcal{P}\vec{v} = (t\partial_t I_N - \mathcal{A}(t,x,D_t,D_x))\vec{v} = \vec{f}\ , \tag{2}$$

où $\mathcal{A}$ est une matrice $N \times N$ d'o.p.d. d'ordre 0 dont on va noter par $\mathfrak{a}(t,x;\tau,\xi)$ le symbole principal.

Ce qui nous intéresse ici c'est le $WF(\vec{v}) \setminus WF(\vec{f})$ au voisinage des points $\rho \in \Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, où Σ_1 (resp. Σ_2) est donnée par l'équation $t = 0$ (resp. $\tau = 0$) dans $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$.

On associe à $\mathcal{P}$ le polynôme indiciel :

$$I_{\mathcal{P}}(\rho;\zeta) = \det(\zeta I_N - \mathfrak{a}(\rho)), \quad \zeta \in \mathbb{C}\ , \ \rho = (0,x;0,\xi) \in \Sigma, \quad |\xi| = 1\ . \tag{3}$$

On a le théorème suivant :

Théorème 1 : On suppose que l'opérateur $\mathcal{A}$ ne dépend pas de t et D_t dans un voisinage conique d'un point $\rho_0 \in \Sigma \setminus WF(\vec{f})$, $\rho_0 = (0,x_0;0,\xi^{(0)})$.

Posons :

$$\begin{cases} \gamma_{1,k}(\rho_0) = \{(0,x_0;\tau,\xi^{(0)}) \mid (-1)^k\tau > 0\} \\ \gamma_{2,k}(\rho_0) = \{(t,x_0;0,\xi^{(0)}) \mid (-1)^k t > 0\} \end{cases}, \quad k = 1,2$$

Alors :

i) Si pour chaque $j \in \{1,2\}$ il existe $k \in \{1,2\}$ tel que

$$\gamma_{j,k}(\rho_0) \cap WF(\vec{v}) = \emptyset\ , \text{ on a } \rho_0 \notin WF(\vec{v})\ .$$

ii) Si $I_{\mathcal{P}}(\rho_0;\zeta) \neq 0$ pour $\zeta \in \{0,1,2,\dots\}$ et si

$$(\gamma_1(\rho_0) \setminus \{\rho_0\}) \cap WF(\vec{v}) \neq \emptyset\ , \text{ on a } \rho_0 \notin WF(\vec{v})$$

Si $I_{\mathcal{P}}(\rho_0;\zeta) \neq 0$ pour $\zeta \in \{k+1, k+2,\dots\}$, pour un $k \geq 0$,

et si $(\gamma_1(\rho_0)\setminus\{\rho_0\}) \cap WF(\vec{v}) = \emptyset$, il existe des distributions :

$$\vec{v}_j(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}_x)^N \quad , \; j = 0,1,\ldots,k \; ,$$

telles que $\qquad \rho_o \notin WF(\vec{v} - \sum_o^k {}_j \; t^j \otimes \vec{v}_j(x))$.

iii) Si $I_{\mathcal{P}}(\rho_o;\zeta) \neq 0$ pour $\zeta \in \{-1, -2,\ldots\}$ et si

$(\gamma_2(\rho_o) \setminus \{\rho_o\}) \cap WF(\vec{v}) = \emptyset$, on a $\rho_o \notin WF(\vec{v})$.

Si $I_{\mathcal{P}}(\rho_o;\zeta) \neq 0$ pour $\zeta \in \{-h-1,-h-2,\ldots\}$, pour un $h \geq 1$, et si $(\gamma_2(\rho_o) \setminus \{\rho_o\}) \cap WF(\vec{v}) = \emptyset$, il existe des distributions $\vec{w}_j(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}_x)^N$, $j = 0,\ldots,h-1$, telles que

$$\rho_o \notin WF(\vec{v} - \sum_o^{h-1} \partial_t^j \, \delta_t \otimes \vec{w}_j(x)) \; .$$

Le théorème est bien connu dans le cas scalaire $N = 1$ (voir [3] ,[4]); le cas vectoriel se traite en adaptant au cas des systèmes les constructions explicites de microparamétrices faites par Hanges dans [3] . On renvoit à [2] pour plus de détails.

Il faut remarquer que l'hypothèse que l'opérateur $\mathcal{A}$ ne dépend pas de t et D_t est essentielle (même dans le cas scalaire) pour pouvoir construire de paramétrices.

Le résultat crucial de [2] est le suivant :

Théorème 2 : Les conclusions i), ii), iii) du théorème 1 restent valables pour n'importe quel système (2).

L'idée naturelle pour démontrer le théorème 2 est de voir s'il existe une matrice $(N \times N)$ $Q(t,x,D_t,D_x)$ d'o.p.d. d'ordre o, qui soit elliptique au voisinage de ρ_o et telle que l'on ait :

$$(4) \qquad (t\partial_t I_N - \mathcal{A}(t,x,D_t,D_x))Q \equiv Q(t\partial_t I_N - \tilde{\mathcal{A}}(x,D)),$$

près de ρ_o, avec $\tilde{a}(\rho_o) = a(\rho_o)$.

On voit immédiatement que dans le cas $N > 1$ il y a une obstruction non-triviale pour que ça marche. En effet, en imposant que (4) soit vérifiée on trouve en particulier que l'on doit choisir le symbole principal $q_o(t,x;\tau,\xi)$ de Q de telle façon que :

$$(5) \qquad (t\partial_t - \tau\partial_\tau) q_o(t,x;\tau,\xi) -$$

$$- (\mathcal{A}(t,x;\tau,\xi) q_o(t,x;\tau,\xi) - q_o(t,x;\tau,\xi)\tilde{\mathcal{A}}(x,\xi) = 0$$

Ecrivant formellement $q_o(t,x;\tau,\xi) \sim \Sigma_{j,k}\, t^j\, \tau^k q_{j,k}(x,\xi)$ et $\mathcal{A}(t,x;\tau,\xi) \sim \Sigma_{j,k}\, t^j \tau^k \mathcal{A}_{j,k}(x,\xi)$ $\quad (\mathcal{A}_{o,o} = \tilde{\mathcal{A}})$, on obtient alors une suite d'équations matricielles :

$$(6) \quad \begin{cases} q_{j,k}(x,\xi)((j-k)I_N + \mathcal{A}(0,x;o,\xi)) - \mathcal{A}(0,x;0,\xi) q_{j,k}(x,\xi) \\ = \text{matrice qui dépend des } \mathcal{A}_{j',k'} \text{ et des } q_{j',k'} \text{ pour } j' < j \text{ , } k' < k \end{cases}$$

C'est bien connu qu'une telle équation est univoquement résoluble, pour $j \neq k$, si les deux matrices $(j-k)I_N + \mathcal{A}(0,x;0,\xi)$ et $\mathcal{A}(0,x;0,\xi)$ n'ont pas de valeurs propres communes. On est alors conduit à formuler la condition suivante :

(7) <u>Le système</u> (2) <u>satisfait la condition de Fuchs au point</u> $\rho_o \in \Sigma$ <u>si les racines</u> $\zeta_1,\dots,\zeta_N$ <u>de l'équation</u> $I_{\mathcal{P}}(\rho_o;\zeta) = 0$ <u>sont telles que</u> $\zeta_i - \zeta_j \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ <u>pour chaque</u> $i,j,i \neq j$.

Si la condition de Fuchs est vérifiée au point ρ_o (ce qui est toujours le cas quand $N = 1$), on peut montrer que la conjecture qu'on a fait est vraie, c'est à dire qu'on peut transformer, en utilisant un o.p.d. elliptique Q, le système $t\partial_t\, I_N - \mathcal{A}(t,x,D_t,D_x)$ dans un système $t\partial_t I_N - \tilde{\mathcal{A}}(x,D_x)$ avec $\mathcal{A}(\rho_o) = \tilde{\mathcal{A}}(\rho_o)$ (tout ça est vrai dans un voisinage de ρ_o). Pour ce qui concerne la construction de Q on renvoit à [2] et on se limite ici à dire qu'elle se fait en deux étapes : avant tout on détermine le $q_{j,k}$ dans un (même) voisinage de (x_o,ξ^o) en utilisant le fait que pour $j \neq k$ les équations (6) sont résolubles au point ρ_o . En utilisant le lemme de Borel on se ramène alors à résoudre une équation $(t\partial_t - \tau\partial_\tau)\hat{q} - (\mathcal{A}\hat{q} - \hat{q}\tilde{\mathcal{A}})$ = fonction plate sur $t = 0$, $\tau = 0$, ce qui se fait à la main.

Le cas où la condition de Fuchs n'est pas vérifiée est beaucoup plus délicat et pour surmonter la difficulté on s'est inspiré d'une idée de Kashiwara-Oshima [5] , Th. 3.2.

Afin d'expliquer un peu la méthode suivie on va considérer la situation simple (mais typique !) suivante.

Lemme : Supposons que $\mathcal{A}(\rho_o)$ soit de la forme :

$$(8) \qquad \mathcal{A}(\rho_o) = \begin{array}{c} \\ N_1\{ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\mathcal{A}_1(\rho_o)}^{N_1} & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{\mathcal{A}_2(\rho_o)}_{N_2} \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ \}N_2 \end{array}$$

avec $\mathcal{A}_1(\rho_o) = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}_2(\rho_o) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

On peut alors transformer le système $t\partial_t I_N - \mathcal{A}$ dans le système $t\partial_t I_N - C(t,x,D_t,D_x)$, avec $C(\rho_o) = \mathcal{A}(\rho_o)$, et avec C de la forme :

$$(9 \qquad C(t,x,D_t,D_x) = \begin{array}{c} \\ N_1\{ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{C_1(x,D_x)}^{N_1} & E(x,D_x)t \\ \hline F(x,D_x)\partial_t & \underbrace{C_2(x,D_x)}_{N_2} \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ \}N_2 \end{array}$$

où F est d'ordre -1. De plus, si $\mathcal{A}$ est triangulaire inférieure par blocs on peut choisir $E = 0$.

La démonstration de ce lemme repose sur le fait que quand l'on veut résoudre les équations de transport (6) on a des problèmes si $j-k = \pm 1$ et que les extra-termes $E(x,D_x)t$ et $F(x,D_x)\partial_t$ sont introduits pour éliminer cette difficulté. Pour les détails on renvoit à [2].

Maintenant, si on est dans les conditions du lemme et si $(t\partial_t I_N - C)\vec{v} = \vec{f}$, on pose $\vec{v} = (\vec{v}_1,\vec{v}_2)$, $\vec{v}_j \in (\mathcal{D}')^{N_j}$ et l'on définit $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$, $\vec{w}_2 = t\vec{v}_2$, $\vec{w}_3 = \vec{v}_2$. On trouve alors que

$$t\partial_t \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vec{w}_3 \end{pmatrix} = \mathcal{D}(t,x,D_t,D_x) \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vec{w}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ t\vec{f}_2 \\ \vec{f}_2 \end{pmatrix} ,$$

avec

$$(10) \qquad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} C_1 & E & 0 \\ tF\partial_t & C_2+I & 0 \\ F\partial_t & 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

On est maintenant dans le cas où $\mathcal{B}(t,x,D_t,D_x)$ est triangulaire inférieure par blocs et par une nouvelle application du Lemme on passe du système $t\partial_t - \mathcal{B}$ à un nouveau système $t\partial_t I_{N+N_2} - G$ avec :

$$(11) \qquad G(t,x,D_t,D_x) = \begin{array}{c} \\ N\,\{ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{G_1(x,D_x)}^{N} & 0 \\ \hline F(x,D_x)\,\partial_t & \underbrace{G_2(x,D_x)}_{N_2} \end{array}\right) \}N_2$$

où F est d'ordre -1 .

Finalement, si $(t\partial_t I - G)\vec{u} = \vec{g}$, écrivant $\vec{u} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ et en posant $\vec{\varphi}_1 = \vec{u}_1$, $\vec{\varphi}_2 = \partial_t\vec{u}_1$, $\vec{\varphi}_3 = \vec{u}_2$, on trouve que $\vec{\varphi} = (\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_2, \vec{\varphi}_3)$ satisfait le système $t\partial_t\vec{\varphi} - \tilde{\mathcal{A}}(x,D_x)\vec{\varphi} = \vec{h}$, avec

$$(12) \qquad \tilde{\mathcal{A}}(x,D_x) = \begin{pmatrix} G_1(x,D_x) & 0 & 0 \\ 0 & G_1(x,D_x) - I & 0 \\ 0 & F(x,D_x) & G_2(x,D_x) \end{pmatrix} , \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \partial_t\,\vec{g}_2 \\ \vec{g}_2 \end{pmatrix}$$

A ce moment-là il suffit de noter que le polynôme indiciel du système $t\partial_t I_{2N+N_2} - \tilde{\mathcal{A}}$, au point ρ_o, a les mêmes racines λ et $\lambda - 1$ du polynôme indiciel original et que $WF(\vec{\varphi}) = WF(\vec{v})$ et $WF(\vec{f}) = WF(\vec{h})$ près de ρ_o. On peut alors appliquer le Théorème 1 au système $t\,\partial_t - \tilde{\mathcal{A}}$ et en déduire les propriétés pour $WF(\vec{v})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Alinhac : Parametrix et propagation des singularités pour un problème de Cauchy à multiplicité variable, Astérisque, 34-37 (1976), 3-26.

[2] A. Bove, J. E. Lewis, C. Parenti : Article à paraître.

[3] N. Hanges : Parametrices and propagation of singularities for operators with non-involutive characteristics, Indiana Univ. Math. J., 28 (1979), 86-97.

[4] V. Ya. Ivriĭ : Wave fronts of solutions of certain pseudo differential equations, Trans. Moscow Math. Soc., 1 (1981), 49-86.

[5] M. Kashiwara, T. Oshima : Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems, Annals of Math., 106 (1977), 195-200.

[6] T. Miwa : Propagation of microanalyticity for solutions of pseudodifferential equations, I, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 10 (1975), 521-533.

[7] T. Ôaku : A canonical form for a system of microdifferential equations with non-involutory characteristic and branching of singularities, Invent. Math., 65 (3) (1982), 491-525.

***