JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

RONALD COIFMAN
YVES MEYER

Analyse harmonique non linéaire

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A8_0>

ANALYSE HARMONIQUE NON LINEAIRE

par R. COIFMAN et Y. MEYER

Nous nous proposons de décrire un programme d'analyse non linéaire dont le but et les méthodes sont semblables à ceux du calcul pseudo différentiel. Le grand succès du calcul pseudo différentiel est dû surtout à l'introduction de méthodes d'analyse de Fourier (par exemple la microlocalisation) dans des problèmes de calcul différentiel et de géométrie [1].

Or il s'avère que l'analyse de Fourier, en combinaison avec les méthodes de variable réelle, reste un outil puissant même dans l'étude des problèmes non linéaires.

Un problème usuel en E.D.P. est le calcul d'une paramétrix, ou le calcul de la racine d'un opérateur positif. Ceci se fait d'habitude en termes d'une série asymptotique de symboles. Or il est naturel de demander une série exacte permettant l'étude de la dépendance de ces objets par rapport aux coefficients de l'opérateur différentiel en question. La méthode habituelle serait de développer l'objet cherché en série de Taylor, c'est-à-dire nous développerons une fonction F(u) définie dans un voisinage de l'origine d'un espace de Banach B_1 (par exemple espace des coefficients de l'opérateur différentiel) à valeurs dans un espace de Banach B_2 (par exemple un espace d'opérateurs linéaires sur L^2) en série

$$F(u) = \sum_{k=o}^{\infty} \lambda_k(u)$$

où $\lambda_k(u) = \Lambda_k(\underbrace{u,\ldots,u}_{k})$ est un "polynôme" homogène de degré k, c'est-à-dire la restriction à $u_j = u$ de l'opérateur multilinéaire

$$\Lambda_k(u_1,\ldots,u_k) \;:\; B_1^k \longrightarrow B_2$$

Pour assurer la convergence d'une telle série il s'agit de montrer une estimation du type $\|\Lambda_k(u_1,\ldots,u_k)\|_{B_2} \leqslant C^k \prod_{i=1}^{k} \|u_i\|_{B'}$ (ou bien de démontrer que F(u) admet une extension holomorphe à la complexification d'un voisinage de l'origine).

C'est à ce niveau qu'intervient l'analyse de Fourier comme outil permettant la "compréhension" des opérateurs multilinéaires commutant avec les translations (et de leurs perturbations).

Nous allons décrire comment ce programme peut être utilisé pour résoudre partiellement une conjecture proposée par Kato [4].

Soit $A(x) = (a_{j,k}(x))$ $1 \leqslant j, k \leqslant n$ une matrice à coefficients dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe une constante $C > 0$ de sorte que pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$ on ait $\mathrm{Re}(A(x)\xi,\xi) \geqslant C\,|\xi|^2$.

Suivant Kato, il existe alors un opérateur accrétif-maximal $\Delta_A : V \to L^2(\mathbb{R}^n)$ dont le domaine V(*) est un sous-espace vectoriel dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, tel que, pour $u, v \in H'(\mathbb{R}^n)$ (H' est l'espace de Soboleff usuel) on ait

$$\langle \Delta_A u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (A(x)\,\mathrm{grad}\ u).(\mathrm{grad}\ v)\,dx \quad ;$$

on écrit

$$\Delta_A = -\mathrm{div}(A\ \mathrm{grad})$$

Kato définit $\sqrt{\Delta_A}$ comme l'unique opérateur accrétif maximal dont le carré soit Δ_A et conjecture que le domaine de $\sqrt{\Delta_A}$ est $H'(\mathbb{R}^n)$. (Ceci se vérifie facilement lorsque $A(x) = A^*(x)$).

Nous avons, en collaboration avec Dong Gao Deng [3] démontré le résultat partiel suivant.

<u>Théorème</u> : Il existe une constante $\varepsilon > 0$ (dépendant de la dimension) telle que si $\|A(x) - I\|_\infty < \infty$, le domaine de l'opérateur $\sqrt{\Delta_A}$ soit $H'(\mathbb{R}^n)$. En outre $\sqrt{\Delta_A}$ est une fonction analytique en A (dans ce voisinage de la matrice I).

Remarquons d'abord que l'énoncé ci-dessus concernant le domaine de $\sqrt{\Delta_A}$ équivaut formellement à l'analyticité de la racine. Il est donc naturel d'étudier sa série de Taylor ; à cet effet, on écrit :

$$\sqrt{\Delta_A} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (t^2\,\Delta_A + I)^{-1}\,\Delta_A\,dt$$

Soit $\alpha = I-A$; on peut écrire $(I + t^2\Delta_A) = \{I - (t^2 \mathrm{div}\ \alpha\ \mathrm{grad})(I+t^2\Delta)^{-1}\}(I + t^2\Delta)$

(*) On vérifie facilement que le domaine de V dépend de manière non linéaire de V et qu'il se peut que pour deux fonctions A différentes mais voisines, l'intersection des domaines peut être vide.

Ce qui donne

$$\sqrt{\Delta_A} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=o}^{\infty} \int_o^{\infty} \frac{I}{I+t^2\Delta} \left(t^2 \operatorname{div} \alpha \operatorname{grad} \frac{I}{I+t^2\Delta}\right)^k \operatorname{div} A \operatorname{grad} \frac{dt}{t} .$$

Comme l'opérateur A grad prend H' dans L^2 il suffit d'obtenir une estimation $L^2 \to L^2$ pour les termes multilinéaires

$$\lambda_k(\alpha) = \int_o^{\infty} \frac{t \operatorname{div}}{I+t^2\Delta} \left(\alpha \frac{t^2 \operatorname{grad} \operatorname{div}}{I+t^2\Delta}\right)^k \frac{dt}{t}$$

$$= \int_o^{\infty} Q_t (\alpha R_t)^k \frac{dt}{t}$$

Ici α désigne l'opérateur de multiplication par la matrice α et où Q_t, R_t sont définis sur les fonctions F à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ par

$$(Q_t F)^\wedge(\xi) = \frac{t\xi . \hat{F}(\xi)}{1+t^2|\xi|^2}$$

$$(R_t F)^\wedge(\xi) = \frac{t^2 \xi(\xi.\hat{F}(\xi))}{1+t^2|\xi|^2} = \left(1 - \frac{1}{1+t^2|\xi|^2}\right) \frac{\xi(\xi.\hat{F})}{|\xi|^2}$$

$$= ((I - P_t)\mathcal{R})F)^\wedge \quad ;$$

R_t est un opérateur pseudo différentiel classique d'ordre O, dont le noyau $r_t(x-y)$ est majoré par

$$\frac{1}{|x-y|^n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right)$$

où φ est rapidement décroissante dans $L'(\mathbb{R}^n)$.

Ici P_t est une approximation de l'identité et $\mathcal{R}$ un opérateur de Calderon-Zygmund.

Avant d'esquisser la démonstration remarquons que si l'on remplace dans l'expression de λ_1 l'opérateur R_t par l'opérateur $\mathcal{R}$ on obtient un nouvel opérateur qui lui n'est même pas borné dans L^2 .

L'étude de l'opérateur λ_k se fait en deux temps. Premièrement on réduit l'estimation de la norme d'opérateur de λ_k à une estimation quadratique de type Littlewood-Paley-Stein c'est-à-dire à estimer

$$* \qquad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |Q_t(\alpha R_t)^k f|^2 \frac{dxdt}{t} \overset{\text{def}}{\equiv} |||Q_t(\alpha R_t)^k f|||^2$$

Deuxièmement un argument d'induction permet d'obtenir une estimation en C^k.

Si k = O, cette estimation est évidente par le théorèmede Plancherel. Ceci explique aussi la possibilité de réduire l'estimation dans L^2 d'une fonction

$$F = \int_0^\infty Q_t^2(f_t)\frac{dt}{t}$$

à l'aide d'une expression quadratique. En effet soit $g \in L^2$, $\|g\|_2 \leqslant 1$. On estime

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\, F\, dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} Q_t^* g\, Q_t(f_t)\frac{dt}{t}$$

$$\leqslant \Big(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |(Q_t^* g|^2 \frac{dxdt}{t}\Big)^{1/2} \Big(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |Q_t(f_t)|^2 \frac{dxdt}{t}\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant C|||Q_t(f_t)|||$$

(dans notre cas le passage de Q_t à Q_t^2 se fait en utilisant l'identité $Q_t = (t\frac{\partial}{\partial t})^2 Q_t + 8Q_t\, Q_t^*\, Q_t$ et des intégrations par parties).

Pour démontrer * on note que :

$$Q_t(\alpha R_t)^k f = Q_t(\alpha R_t)^{k-1}\alpha\mathcal{R}f - Q_t(\alpha R_t)^{k-1}\alpha P_t\mathcal{R}f \;;$$

or le premier terme se traite par l'hypothèse de récurrence. Le deuxième a la forme

$$Q_t(\alpha R_t)^{k-1}\alpha P_t \tilde{f}$$

Pour comprendre la nature de cet opérateur, observons que $R_t g$ est très semblable à l'intégrale

$$\int_{|x-y|<t} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^{n+2}} f(y)\,dy$$

et que $P_t(f)$ ressemble à $\frac{1}{t^n}\int_{|x-y|<t} f(y)\,dy$; ainsi tout se passe à l'échelle t et heuristiquement $P_t(f)$ est pratiquement une constante à cette échelle. Ainsi nous allons remplacer $Q_t(\alpha R_t \alpha . R \ldots R_t \alpha P_t f)$ par le produit $Q_t(\alpha R_t \ldots \alpha R_t \alpha) . P_t(f)$ et * par

$$\iint \nu(x,t) P_t^2(f) \frac{dx\,dt}{t}$$

avec $\nu(x,t) = |Q_t(\alpha R_t \ldots R_t \alpha)|^2$.

C'est ici que l'on utilise une version d'un lemme fameux de Carleson [5] .

<u>Lemme</u> :

$$\int_0^R \int_{\mathbb{R}^n} \nu(x,t) |P_t(f)|^2 \frac{dx\,dt}{t} \leqslant C \|f\|_2^2 \qquad \forall\, f \in L^2$$

si et seulement si

$$\int_0^R \int_{\mathbb{R}^n} \nu(x,t) |P_R(\chi_R)|^2 \frac{dx\,dt}{t} \leqslant C\, R^n$$

pour toute fonction $\chi_R(y) = \begin{cases} 1 & |y - x_o| < R \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Ainsi nous sommes conduits à estimer

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^R |Q_t(\alpha R_t \ldots R_t \alpha) P_R(\chi_R)|^2 \frac{dx\,dt}{t}$$

que l'on remplace par

$$** \qquad \int_0^R \int_{\mathbb{R}^n} |Q_t((\alpha\, R_t)^{K-1}(\alpha\, P_R(\chi_R))|^2 \frac{dx\,dt}{t}$$

(Ceci se justifie par des lemmes de commutations comme ci-dessus).

Mais (**) correspond exactement à $*$ au cran $k - 1$ relatif à la fonction $f_1 = \alpha P_R(\chi_R)$, ce qui permet de conclure l'induction.

Pour conclure cet exemple mentionnons encore que l'estimation $*$ a été récemment appliquée par Fabes, Jerison et Kenig à l'étude d'opérateurs du type

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Sigma\, a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

pour obtenir des estimations L^2 optimales. L'inégalité $*$ apparaît pour contrôler les termes obtenus dans le développement de l'opérateur solution en terme des coefficients $a_{i,j}$.

Un autre exemple où la série multilinéaire admet une structure semblable apparaît dans l'étude de la conjugaison d'opérateurs pseudo-différentiels par changement de variables lipschitzien. Ici le cas important est celui de la transformation de Hilbert pour lequel on démontre [2] que :

$$H_a = \mathcal{U}_a H \mathcal{U}_a^{-1} \qquad \text{où} \qquad \mathcal{U}_a f = f(x + A(x)), \quad A' = a$$

dépend analytiquement de a. Lorsque $a \in L^\infty$, $\|a\|_\infty < 1$. Ici l'opérateur :

$$H_a f = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)(1+a(y))}{x-y+A(x)-A(y)}\, dy$$

est évidemment borné dans L^2 pour a réelle. Le fait que cet opérateur soit aussi borné si a prend des valeurs complexes est équivalent au résultat que l'intégrale de Cauchy soit bornée sur L^2 pour toute courbe lipschitzienne [2] .

Ce résultat peut être aussi utilisé pour démontrer que la représentation conforme de Riemann qui prend la région au-dessus de la courbe $Z(x) = x + iA(x)$ au demi plan supérieur, dépend analytiquement de a. Ici encore la série de puissance est de même nature que précédemment. Ces résultats se démontrent par des méthodes semblables à celles indiquées mais qui nécessitent un travail plus subtil permettant d'obtenir le rayon de convergence exact des séries qui apparaissent. Nous ne savons toujours pas comment calculer le rayon de convergence précis pour la conjecture de Kato (en dimension $\geqslant 2$) .

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. R. Coifman, Y. Meyer : Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque 57, 2ème ed. S.M.F. 1978.

[2] R. R. Coifman, A. Mc Intosh, Y. Meyer : L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes (à paraître Annals of Math.).

[3] R. R. Coifman, D. G. Deng, Y. Meyer : Sur un problème de Kato, à paraître.

[4] T. Kato : Perturbation theory for linear operators. Springer Verlag, New York (1966).

[5] E. M. Stein : Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970.

***