Journées Équations aux dérivées partielles

Chaojiang Xu

Hypoellipticité d'équations aux dérivées partielles non linéaires

Journées Équations aux dérivées partielles, n° 1 (1985), p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1985____1_A7_0>

HYPOELLIPTICITE D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES

par XU Chao-Jiang

INTRODUCTION

Depuis le travail fondamental de Bony [1], on dispose d'un calcul paradifférentiel qui permet d'obtenir, dans le cas d'équations non linéaires générales, une analyse de la propagation des singularités des solutions. On s'intéresse ici au problème d'hypoellipticité pour des équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre.

1. RESULTATS ET NOTATIONS

On considère l'équation suivante :

$$F(x,u,\nabla u,\nabla^2 u) = 0 . \tag{1}$$

Sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, où F est une fonction réelle de classe C^∞. Etant donnée une fonction réelle $u \in C^\rho_{loc}(\Omega)$ avec $\rho \geqslant 4$, on pose

$$\begin{aligned}
&a_{kj}(x) = \frac{\partial}{\partial u_{kj}} F(x,u(x),\nabla u(x),\nabla^2 u(x)) \\
&k,j = 1,\dots,n \\
&b_\ell(x) = \frac{\partial}{\partial u_\ell} F(x,u(x),\nabla u(x),\nabla^2 u(x)) \\
&\ell = 1,\dots,n .
\end{aligned} \tag{2}$$

Ce sont des fonctions réelles de classe $C^{\rho-2}_{loc}(\Omega)$.

Comme dans [7], on définit le système de fonctions suivant :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} g_j(x,\xi) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(x)(i\,\xi_k)\,, & j=1,\dots,n \\ g_{n+\ell}(x,\xi) = |\xi|^{-1} \sum_{kj=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\ell} a_{kj}(x)(i\,\xi_k)(i\,\xi_j)\,, & \ell=1,\dots,n \\ g_0(x,\xi) = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell(x)(i\,\xi_\ell) - \sum_{\alpha\beta=1}^{n} \partial_{x_\alpha} a_{\beta\alpha}(x)(i\xi_\beta) & \end{array}\right.$$

les fonctions $g_j(x,\xi)$, $j=0,\dots,2n$, sont des fonctions homogènes de degré 1, de classe C^∞ en $\xi \neq 0$ et $C^{\rho-3}_{loc}$ en x. Etant donné un multi-indice $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ avec $0 \leqslant \alpha_j \leqslant 2n$, $|\alpha|=k$, on définit $g_\alpha(x,\xi)=(-i)^{k-1}$ $\{g_{\alpha_1},\dots,\{g_{\alpha_{k-1}},g_{\alpha_k}\}\dots\}$, où $\{\cdot,\cdot\}$ désigne le crochet de Poisson. Pour ρ assez grand, les fonctions g_α sont définies homogènes de degré 1 de classe C^∞ en $\xi \neq 0$ $C^{\rho-k-2}_{loc}(\Omega)$ en x. On dit que les $g_j(x,\xi)$ satisfont la condition de Oleinik-Radkev à l'ordre r, si $\rho \geqslant r+3$, et si pour tout compact K de Ω, il existe une constan $C>0$ telle que

$$(4)\qquad |\xi|^2 \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant r} |g_\alpha(x,\xi)|^2$$

pour tout $(x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geqslant R > 0$. On a le résultat suivant :

THEOREME 1. - Soit u une solution réelle de (1) de classe $C^\rho_{loc}(\Omega)$ avec $\rho \geqslant \max\{4, r+3\}$. Si $\sum_{kj=1}^{n} \tilde{\mathcal{a}}_{kj}(x)\xi_k\,\xi_j \geqslant 0$, pour $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ et si la condition de Oleinik-Radkevič est satisfaite à l'ordre r, on a alors u appartient à $C^\infty(\Omega)$.

<u>Remarque</u>. - Dans le cas où (1) est de la forme

$$(5)\qquad \sum_{j=1}^{m} X_j^2 u + X_0 u + f(x,u) = 0$$

avec $X_j = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{a}_{kj}(x,u(x))\partial_k$, $j=0,\dots,m$. La condition **(4)** signifie que la condition de Hörmander est vérifiée à l'ordre r pour le système $X_j(x,\xi) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{a}_{kj}(x,u(x$ $(i\,\xi_k)$, $j=0,\dots,m$. On a la même conclusion sous l'hypothèse $u \in C^\rho_{loc}(\Omega)$ avec $\rho > \max\{2,r\}$.

On peut supposer $\rho \geqslant \max\{3, r+2\}$ dans le cas où (1) est quasi-linéaire, et $\rho \geqslant \{2,r+1\}$ dans le cas où (1) est semi-linéaire.

On considère aussi la fonctionnelle suivante :

$$(6) \qquad I(u) = \int_\Omega f(x,u(x)\,,\nabla u(x))\,dx$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$, et $f(x,z,p) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{n+1})$. On dit qu'une fonction réelle u de classe $C^3_{loc}(\Omega)$, est un minimum "très strict", si $I(u) < +\infty$, et si pour tout $x \in \Omega$, il existe un voisinage K de x dans Ω, deux constantes $C > 0$, $\varepsilon > 0$, tels que

$$(7) \qquad C\|\varphi\|^2_\varepsilon + I(u) \leqslant I(u+\varphi)$$

pour toute φ réelle de $C^\infty_0(K)$. On a le résultat suivant.

THEOREME 2. - Soit u une fonction réelle de classe $C^3(\Omega)$. Si u est un minimum "très strict" de la fonctionnelle (6), on a alors que u est nécessairement C^∞.

En effet, il résulte de (7) que u est une solution de l'équation

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^n \partial_j f_{p_j}(x,u,\nabla u) - f_z(x,u,\nabla u) = 0$$

avec $\sum_{\alpha\beta=1}^n f_{p_\alpha p_\beta}(x,u(x)\,,\nabla u(x))\xi_\alpha\,\xi_\beta \geqslant 0$, pour tout $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$. De plus, pour tout K compact de Ω, il existe deux constantes $C > 0$, $\delta > 0$ telles que l'opérateur linéarisé $\tilde{P}$ de l'équation (8) satisfait

$$(9) \qquad \|\varphi\|^2_\delta \leqslant C\left\{ \|\tilde{P}\varphi\|^2_0 + \|\varphi\|^2_0 \right\}$$

pour tout $\varphi \in C^\infty_0(K)$.

On a donc obtenu un corollaire du théorème 2.

Corollaire.

Soit u un minimum "très strict" de (6) de classe $C^3(\Omega)$. *On a alors pour tout K compact de* Ω, *il existe* $C > 0$, $\delta > 0$, *tels que :*

$$B_E(x,\rho) \subset B_{\tilde{P}}(x, C\rho^{\delta}) \tag{10}$$

pour $x \in K$, $0 < \rho \leq 1$, *où la boule* $B_{\tilde{P}}$ *définie comme dans* [11].

En effet, il résulte du théorème 2 que u est C^{∞}, les coefficients de l'opérateur $\tilde{P}$ sont donc C^{∞} réelle, mais le théorème de Fefferman et Phong [11] dit que (9) et (10) sont équivalentes.

2. Equation paradifférentielle.

Nous faisons ici un minimum de rappels sur les opérateurs paradifférentiels de Bony, pour les détails, nous renvoyons à [1]

Soit $\ell(x,\xi)$ une fonction homogène de degré m en ξ, C^∞ en $\xi \neq 0$, à support compact en x et de classe C^ρ en x, $\rho > 0$, on définit l'opérateur T_ℓ de la manière suivante :

$$\widehat{T_\ell u}(\xi) = (2\Pi)^{-n} \int \chi(\xi-\eta,\eta)\ \hat{\ell}(\xi-\eta,\eta)\ s(\eta)\ \hat{u}(\eta)d\eta \tag{11}$$

où $\chi(\theta,\eta)$ est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, homogène de degré 0 et vérifiant pour $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ assez petit

$$\begin{cases} \chi(\theta,\eta) = 1 & \text{pour } |\theta| \leqslant \varepsilon_1 |\eta| \\ \chi(\theta,\eta) = 0 & \text{pour } |\theta| \geqslant \varepsilon_2 |\eta| \end{cases}$$

$s \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ réelle, $s(x) = 0$ au voisinage de 0, $s(x) = 1$ en dehors d'un compact. $\hat{\ell}(\xi,\eta)$ est la transformée de Fourier de $\ell(x,\xi)$ par rapport à x. T_ℓ applique alors continûment H^s dans H^{s-m} et une modification du choix de χ et s pour T_ℓ ne modifie cet opérateur que par addition d'un opérateur $(\rho-m)$-régularisant.

DEFINITION 1_1 - Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, nous noterons $\Sigma^m_\rho(\Omega)$, pour $m \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$ non entier, l'ensemble des fonctions $\ell(x,\xi)$ définies sur $\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et de la forme suivante

$$\ell(x,\xi) = \ell_m(x,\xi) + \ldots + \ell_{m-[\rho]}(x,\xi) \tag{12}$$

où $\ell_{m-k}(x,\xi)$ est homogène de degré $(m-k)$ en ξ de classe C^∞ en $\xi \neq 0$, et $C^{\rho-k}_{loc}(\Omega)$ en x.

Il est clair que si $\ell(x,\xi)$ est à support compact en x, on peut alors définir $T_\ell = \sum_{j=m}^{m-[\rho]} T_{\ell_j}$. C'est aussi un opérateur continu de H^s dans H^{s-m}.

DEFINITION 2 - *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et L une application linéaire de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans lui-même à support propre. On dit que L est un opérateur paradifférentiel d'ordre m et de classe C^ρ dans Ω et que l'on notera $L \in Op(\Sigma^m_\rho)(\Omega)$. S'il existe $\ell \in \Sigma^m_\rho(\Omega)$ tel que, pour tout compact $K \subset \Omega$, pour tout $\chi \in C^\infty_0(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de K, l'opérateur $L - \chi T_{\chi\ell}$ applique continûment $H^s_{comp}(K)$ dans $H^{s-m+\rho}(\Omega)$.*

Il est évident que si $L \in Op(\Sigma^m_\rho)(\Omega)$, L applique alors $H^s_{loc}(\Omega)$ dans $H^{s-m}_{loc}(\Omega)$. On notera $\sigma(L) = \ell$, le symbole de L, $\sigma_m(L) = \ell_m$ le symbole principal de L. Le symbole de L est unique. On a de plus que l'application de symbole

$$\sigma : Op(\Sigma^m_\rho)(\Omega) \longrightarrow \Sigma^m_\rho(\Omega)$$

est surjective, son noyau est les opérateurs de $(\rho-m)$-régularisant. Tout le calcul pseudo-différentiel classique peut s'étendre à ces opérateurs (produit, adjoint, commutateur, ...), le calcul symbolique étant fini, les restes étant ρ-régularisant et non infiniment régularisants, des opérateurs pseudo-différentiels sont paradifférentiels.

Pour une fonction $\ell \in \Sigma^m_\rho(\Omega)$, on peut également définir un opérateur pseudo-différentiel. Entre ces deux classes d'opérateurs, on a :

LEMME 1 *Soit $\ell(x,\xi)$ homogène en ξ de degré m, de classe C^∞ en $\xi \neq 0$, et C^ρ en x, à support compact en x, avec $\rho \geq m$, alors l'opérateur $L(x,D) - T_\ell$ applique continûment H^σ dans L^2,* pour $\sigma > 0$

Le lien fondamental entre opérateurs para-différentiels et équations aux dérivées partielles non-linéaires vient des résultats suivants. Soit

$$
\begin{aligned}
&F(x,u,\ldots,\partial^\beta u,\ldots)_{|\beta|\leq m} \\
(13) \qquad &= \sum_{k_0<k\leq m} \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(x,u,\ldots,\partial^\beta u,\ldots)_{|\beta|\leq p(k)}\, \partial^\alpha u \\
&+ A_{k_0}(x,u,\ldots,\partial^\beta u,\ldots)_{|\beta|\leq k_0} = 0
\end{aligned}
$$

une équation non-linéaire d'ordre m, où F est réelle et de classe C^∞, où on peut supposer $p(k) < k$, en convenant que $p(k) = -\infty$ lorsque les A_α correspondants ne dépendent que de x. On pose alors :

$$d = \max\left(k_0 , \frac{k+p(k)}{2} \right).$$

LEMME 2 - *Soit u une fonction réelle de $C^\rho_{loc}(\Omega)$, avec $\rho > max(K_0, p(K))$, posons :*

$$(14) \qquad p(x,\xi) = \sum_{|\beta|>2d-\rho} \frac{\partial F}{\partial u_\beta}(x,u(x),\ldots)(i\xi)^\beta ,$$

on a alors $p \in \Sigma^m_{\rho+m-2d}(\Omega)$.

Maintenant, on peut associer à l'équation non linéaire (1) une équation paradifférentielle linéaire. C'est le point de départ de la démonstration des théorèmes 1. et 2. parce que nous obtenons une équation linéaire équivalente, on a :

THEOREME 3. - *Soit u une fonction réelle appartenant à $C^\rho_{loc}(\Omega) \cap H^s_{loc}(\Omega)$ avec $\rho > max(k_0, p(k))$, $s > 0$. Soit P l'opérateur paradifférentiel de symbole $\sigma(P) = p(x,\xi)$ défini par (14). Si $\rho > d$, et u une solution de (1) on a $Pu \in C^{2\rho-2d}_{loc}(\Omega) \cap H^{s+\rho-2d}_{loc}(\Omega)$.*

On peut maintenant considérer les problèmes pour l'équation (1) : $d = 2$ Soi u une fonction réelle de C^ρ_{loc}, $\rho \geq 4$ On a comme dans le lemme 2

$$p(x,\xi) = p_2(x,\xi) + p_1(x,\xi) + p_0(x) \tag{15}$$

où

$$p_2(x,\xi) = \sum_{kj=1}^{n} a_{kj}(x)(i\,\xi_k)(i\,\xi_j) \quad , \quad p_1(x,\xi) = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell(x)(i\,\xi_\ell)$$

$$p_0(x) = \frac{\partial F}{\partial z}(x,u(x),\nabla u(x),\nabla^2 u(x))$$

Soit P l'opérateur paradifférentiel associé à $p(x,\xi)$. P s'écrit alors en

$$\begin{aligned} P &= \sum_{kj=1}^{n} \partial_k A_{kj}\,\partial_j + \sum_{\ell=1}^{n} B_\ell\,\partial_\ell + P_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \partial_k Q_k + Q_0 + P_0 \end{aligned} \tag{16}$$

où Q_k, $k = 0,\dots,n$ sont les opérateurs paradifférentiels de symboles $g_k(x,\xi)$, définis par (3) . En vertu du théorème 3 ., si u est une solution réelle de (1) de classe $C^\rho_{loc} = C^\rho_{loc} \cap H^3_{loc}$, on a alors

$$Pu = g \in H^\rho_{loc}(\Omega) \cap C^\rho_{loc}(\Omega) \tag{17}$$

Pour l'opérateur linéaire (16), en utilisant $\sum_{kj=1}^{n} a_{kj}(x)\xi_k\,\xi_j \geq 0$ et le lemme 1, on a ;

<u>PROPOSITION 1</u> *(estimation d'énergie)*

Soit P l'opérateur (16) avec $\rho \geq 4$, supposons $\sum_{kj=1}^{n} \tilde{a}_{kj}(x)\xi_k\,\xi_j \geq 0$ pour $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$. On a alors pour tous $K \subset\subset \Omega$, $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C(K,s)$ telle que :

$$\sum_{j=1}^{2n} \| Q_j v \|_s^2 + \| Q_0 v \|_{s-1/2}^2 \leq C(\| Pv \|_s^2 + \| v \|_s^2)$$

pour tout $v \in C_0^\infty(K)$.

PROPOSITION 2 *(estimation de commutateur).*

Soit P *l'opérateur paradifférentiel (16) avec* $\rho \geq 4$, $\sum_{k,j=1}^{n} \tilde{a}_{kj}(x)\xi_k \xi_j \geq 0$, *pour* $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$, *et* $\{Q_0,\dots,Q_{2n}\}$ *les systèmes des opérateurs paradifférentiels de symbole* $g_j(x,\xi)$ *définis dans (3). On a alors pour tout compact* $K \subset \Omega$, *entier* $\ell \leq [\rho - \ ]$, *il existe deux constantes* $C(K,\ell)$ *et* $\varepsilon(\ell) > 0$ *telles que*

$$\sum_{|I| \leq \ell} \| Q_I v \|^2_{\varepsilon-1} \leq C \left\{ \| Pv \|^2_0 + \| v \|^2_0 \right\}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(K)$ *où* $I = \{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$, $|I| = k$, $Q_I = [Q_{\alpha_1},\dots,[Q_{\alpha_{k-1}},Q_{\alpha_k}]\dots]$ *le commutateur des opérateurs paradifférentiels.*

Démonstration : On raisonne par induction pour $|I| = 1$, c'est la proposition 1 avec $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$.

Supposons que ce soit vrai pour $|I| = k$ avec $0 < \varepsilon_k \leq \frac{1}{2}$. On montre que c'est aussi vrai pour $|I| = k+1 \leq \ell$ avec un autre $\varepsilon_{k+1} > 0$. On pose alors $Q_I = [Q,Q_{I'}]$ où $|I'| = k$. On a : a) Cas $Q = Q_j$, $j = 1,\dots,2n$.

Comme $k+1 \leq \ell \leq [\rho-3]$, on a $\rho - 3 - k > 1$. On a donc

$$\begin{aligned} \| Q_I v \|^2_{\varepsilon-1} &\leq |(Q_{I'} v, Q^* T^{2\varepsilon-1} v)| + |(Qv, Q_{I'}^* T^{2\varepsilon-1} v)| \\ &\leq C \left\{ \| Q_{I'} v \|^2_{\varepsilon_k-1} + \| Qv \|_{-\varepsilon_k+2\varepsilon} + \| v \|_{-\varepsilon_k+2\varepsilon} \right\}. \end{aligned}$$

On prend $0 < \varepsilon_{k+1} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_k$, on utilise l'hypothèse pour $|I| = k$, et la proposition 1. on a alors

$$\| Q_I v \|^2_{\varepsilon_{k+1}-1} \leq C \left\{ \| Pv \|^2_0 + \| v \|^2_0 \right\}.$$

b) Cas $Q = Q_0$. C'est analogue au a) en utilisant

$$Q_0 = -P^* + \sum_{kj=1}^{n} \partial_k A_{kj} \partial_j + P_0^*$$

3. Démonstration des théorèmes 1

PROPOSITION 3. - Sous les hypothèses du théorème 1.. soit P l'opérateur (16), et supposons compact $K \subset \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, il existe alors $C(K,t) > 0$, $\varepsilon(K) > 0$, telles que

$$\|v\|^2_{t+\varepsilon} \leqslant C\left\{ \|Pv\|^2_t + \|v\|_t \right\}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(K)$.

Démonstration : D'après l'hypothèse du théorème 1. il existe $0 < \ell \leqslant [\rho-3]$, tel que

$$\sum_{|I|\leqslant \ell} |G_I^1(x,\xi)|^2 \geqslant C\,|\xi|^2 \tag{18}$$

pour $(x,\xi) \in K \times S_\xi^{n-1}$ et $G_I^1(x,\xi) \in \Sigma_\sigma^1(\Omega)$.

$\sigma \geqslant \rho - 3 - \ell + 1 \geqslant 1$. On peut utiliser l'inégalité de Gårding pour l'opérateur pseudo-différentiel $\sum_{|I|\leqslant \ell} G_I^{1*} G_I^1(x,D)$, c'est-à-dire pour $0 < \varepsilon \leqslant 1$, il existe $\ell > 0$ telle que :

$$\|v\|^2_\varepsilon \leqslant C\left\{ \sum_{|I|\leqslant \ell} \|G_I^1(x,D)\, v\|^2_{\varepsilon-1} + \|v\|^2_0 \right\}$$

pour $v \in C_0^\infty(K)$.

Soit Q_I^1 l'opérateur paradifférentiel associé au symbole $G_I^1(x,\xi)$, on a $Q_I = Q_I^1 + Q_I^0$, où $Q_I^0 \in Op(\Sigma_{\sigma-1}^0)(\Omega)$. Il résulte du lemme 1

$$\|v\|^2_\varepsilon \leqslant C\left\{ \|Pv\|^2_0 + \|v\|^2_0 \right\}$$

où C dépend de K.

Soit E_t un opérateur paradifférentiel associé au symbole $(1+|\xi|)^t$. Comme E^t est propre, on a encore $E_t v \in C_0^\infty(K')$ pour $v \in C_0^\infty(K)$, K' compact de Ω On a donc

$$\|v\|^2_{t+\varepsilon} \leqslant C\left\{\|PE_t v\|^2_0 + \|v\|^2_t\right\}$$

$$\leqslant C\left\{\|Pv\|^2_t + \sum_{j=1}^{2n} \|Q_j v\|^2_t + \|v\|^2_t\right\}$$

$$\leqslant C\left\{\|Pv\|^2_t + \|v\|^2_t\right\}$$

pour $v \in C_0^\infty(K)$.

Remarque : Dans les propositions 3 on peut prendre $v \in H^{t+2}_{comp}(K)$ parce-que les opérateurs P et L sont continus de $H^{t+2}(\Omega)$ dans $H^t(\Omega)$ et $C_0^\infty(K)$ danse dans $H^t_{comp}(K)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Maintenant, on peut montrer le théorème suivant :

THEOREME 4 – Sous les hypothèses du théorème 1. soit P l'opérateur (16) $u \in C^s_{loc}(\Omega)$ la solution de (.1). Supposons $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi = K$, il existe alors $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$, $C(K,s) > 0$, $\varepsilon(K) > 0$, tels que

$$\|\varphi u\|_{s+\varepsilon} \leqslant C\left\{\|\varphi_1 Pu\|_s + \|\varphi_2 u\|_s + \|f\|_s\right\} \tag{19}$$

où $f \in H^s_{comp}(\Omega)$.

Ce théorème induit le théorème 1. parce que $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ est quelconque, on a donc obtenu $u \in C^s(K) \cap H^{s+\varepsilon}(K)$ où $\varepsilon > 0$ est indépendant de s. Par récurrence on a $u \in C^\infty(K)$. C'est la conclusion du théorème 1.

Démonstration : Comme $u \in C^s_{loc} \cap H^3_{loc}$, d'après (17) on a

$$Pu = g \in C^s_{loc} \cap H^s_{loc}(\Omega).$$

Soit $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_1 = 1$ sur K, on pose, pour $0 < \delta \leqslant 1$,

$$u_\delta(x) = T_\delta u(x) = \varphi_1(x)(1 - \delta\Delta)^{-1} \varphi(x) u(x)$$

On a alors $u_\delta \to \varphi u$ dans $\mathcal{D}'$ quand $\delta \to 0$ et

$$\| T_\delta u \|_s \leqslant C \|\varphi u\|_s$$

C indépendant de δ , on utilise la remarque précédente, on a alors

$$\begin{aligned} \| u_\delta \|^2_{s+\varepsilon} &\leqslant C\left\{ \| P T_\delta u \|^2_s + \| T_\delta u \|^2_s \right\} \\ &\leqslant C\left\{ \| T_\delta P u \|^2_s + \| [P,T_\delta] u \|^2_s + \| T_\delta u \|^2_s \right\} \\ &\leqslant C\left\{ \| \varphi P u \|^2_s + \| \varphi u \|^2_s + \| [P,T_\delta] u \|^2_s \right\} . \end{aligned}$$

Comme T_δ est uniformément borné dans L^2, on peut donc estimer $\| [P,T_\delta] u \|^2_s$ par la droite de (19).

4. <u>Démonstration du théorème 2.</u>

Il est évident que la fonction u du théorème 2 satisfait l'équation suivante :

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \partial_\alpha f_{p_\alpha}(x,u,\nabla u) - f_2(x,u,\nabla u) = 0$$

avec $\displaystyle\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} f_{p_\alpha p_\beta}(x,u(x),\nabla u(x))\xi_\alpha \xi_\beta > 0$, $\forall (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$.

Maintenant, on construit une estimation a priori pour l'opérateur linaire suivant

$$(20) \qquad L = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial_\alpha \, a_{\alpha\beta} \, \partial_\beta + b$$

où $a_{\alpha\beta}(x) = f_{p_\alpha p_\beta}(x,u(x), \nabla u(x)) \in C^2(\Omega)$.

$$b(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} f_{p_\alpha z}(x,u(x), \nabla u(x)) - f_{zz}(x,u(x), \nabla u(x)) \in C^1(\Omega) .$$

On a l'estimation suivante :

<u>*PROPOSITION 4*</u> *- Soit u une fonction réelle satisfaisant les hypothèses du théorème 2 . L est l'opérateur (20), on a alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C(K) > 0$, $\varepsilon(K) > 0$ tels que*

$$(21) \qquad \|v\|_\varepsilon^2 \leqslant C\left\{ \|Lv\|_0^2 + \|v\|_0^2 \right\}, \ \forall v \in C_0^\infty(K) .$$

Pour terminer la démonstration du théorème 2 on associe, comme dans la section I, à l'équation (8) un opérateur paradifférentiel

$$(22) \qquad P = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial_\alpha \, A_{\alpha\beta} \, \partial_\beta + B$$

où $A_{\alpha\beta}$ associé au symbole $a_{\alpha\beta}(x) = \dfrac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} f(x,u(x), \nabla u(x)) \in C^2(\Omega)$ et B associé au symbole $b(x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} f_{p_\alpha p_\beta z} \, \partial^2_{\alpha\beta} u(x) + \sum_{\alpha=1}^{n} f_{p_\alpha zz} \partial_\alpha u + \sum_{\alpha=1}^{n} f_{p_\alpha z x_\alpha} - f_{zz} \in C^1(\Omega)$.

En modifiant le lemme 1. , on peut démontrer que $(P-L)$ applique continûment $H^{\frac{\varepsilon}{2}}$ dans L^2. En effet, en utilisant la décomposition « en couronnes dyadiques » , pour $a \in C_0^2(\Omega)$, $b \in H^{-2+\frac{\varepsilon}{2}}$, $ab - T_a b \in H^{\frac{\varepsilon}{2}-\delta} \subset L^2$ on a donc

$$\|v\|_\varepsilon^2 \leqslant C\left\{ \|Pv\|_0^2 + C'\|v\|_{\frac{\varepsilon}{2}}^2 + \|v\|_0^2 \right\}$$

mais $\|v\|^2_{\frac{\varepsilon}{2}} \leqslant \delta\|u\|^2_\varepsilon + C(\delta)\|v\|^2_0$, pour δ suffisamment petit. Avec une autre constante C, on a donc obtenu

(23) $$\|v\|^2_\varepsilon \leqslant C\left\{\|Pv\|^2_0 + \|v\|^2_0\right\}, \quad \forall v \in C_0^\infty(K)$$

où K est un compact de Ω.

En utilisant la proposition et le inégalité (23) , on peut obtenir une estimation a priori sur la chaine des espaces de Sobolev.

<u>*PROPOSITION*</u> 5 . - *Soit P l'opérateur* , $\forall K \subset \Omega$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *il existe alors* $\varepsilon(K) > 0$, $C(K,t) > 0$, *tels que*

(24) $$\|v\|^2_{t+\varepsilon} \leqslant C\left\{\|Pv\|^2_t + \|v\|^2_t\right\}, \quad \forall v \in C_0^\infty(K).$$

En fait, l'inégalité est aussi vraie pour tout $v \in H^{t+2}_{comp}(K)$.

Si u est une fonction réelle dans le théorème 2 , il résulte du théorème 3 que

(25) $$Pu = g \in C^3(\Omega) \cap H^3_{loc}(\Omega) .$$

Nous faisons maintenant tout à fait comme dans le théorème 4 . On peut déduire $u \in C^3(K) \cap H^{3+\varepsilon}(K)$, par récurrence il résulte enfin que $u \in C^\infty(K)$, ce qui termine la démonstration du théorème 2

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. BONY :
Calcul symbolique et propagations des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires ,
Ann. Scient. Ec. Sup. 4ème (1981), 209-246.

[2] J.M. BONY :
Cours au Colloque de Saint Jean-de Monts ,
(Juin 1984).

[2] C.B. MORREY :
Multiple integrals in the calculs of variations ,
Springer Verlag, Berlin 1966.

[4] L. HÖRMANDER :
Hypoelliptic second order differential equations ,
Acta. Math., 119 (1967), 147-171.

[5] J.J. KOHN :
Pseudo-differential operators and hypoellipticity ,
C.I.M.E., Stresa 1968.

[6] J. NOURRIGAT :
Réduction microlocale des systèmes d'opérateurs pseudo-différentiels ,
(manuscrit).

[7] O.A. OLEINIK et E.D. RADKEVIC :
Second order equations non negative characteristic form ,
Amer. Math. Soc. Providence (1973).

[8] Y. MEYER :
Régularités des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires ,
Séminaire Bourbaki, 1979-1980, n° 560.

[9] K. YAMAMOTO :
Hypoelliptic second order differential operators with complex coefficients
Studies in anal. Adv. Math. supplementary studies, 4 (1979), 123-133.

[10] S. ALINHAC :

Paracomposition et application aux équations non linéaires ,

Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer 1984-1985, exposé n° 11.

[11] C. FEFFERMAN ET D.H. PHONG :

Subelliptic eigenvalue problems ,

Conf. in Honor of A. Zygmund, Wadsworth Math. Series, 1981, p. 590-606.

[12] XU CHAO-JIANG :

Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non-linéaires ,

Thèse de 3ème cycle, Orsay.

[13] XU CHAO-JIANG :

Régualrité des solutions pour les équations aux dérivées partielles quasi-linéaires non-elliptiques du second ordre ,

C.R. Acad. Sc. Paris, t. 300, 1985, p. 267-270.

[14] XU CHAO-JIANG :

Hypoellipticité pour les équations aux dérivées partielles non linéaires associées à un système de champs de vecteurs ,

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 300, 1985, p. 235-237.

[15] C. ZUILY :

Régularité locale des solutions non strictement convexes de l'équation de Monge-Ampère ,

Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer, 1984-1985, Mai.