

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LAURENT GUILLOPÉ

## Sur le spectre des longueurs des surfaces de Riemann

*Journées Équations aux dérivées partielles*, n° 1 (1985), p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1985\\_\\_1\\_A9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1985__1_A9_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LE SPECTRE DES LONGUEURS  
DES SURFACES DE RIEMANN

Exposé de Laurent GUILLOPE

---

A toute variété riemannienne  $M^n$  compacte, sans bord et orientable ( $\dim M^n = n$ ) sont associés deux spectres : le spectre discret  $\{\lambda_j\}$  de son laplacien  $\Delta_M$  sur les fonctions et le spectre  $\{\ell_j\}$  des longueurs de ses géodésiques orientées. On sait que génériquement l'un de ces spectres détermine l'autre ([2]).

Leurs propriétés asymptotiques sont étudiées via des fonctions de comptage :

$$N_M(\lambda) = \#\{\lambda_j \leq \lambda\}$$

$$v_M(\ell) = \#\{\ell_j \leq \ell\}.$$

Pour le spectre des valeurs propres, on a la formule de Weyl

$$N_M(\lambda) \sim (2\pi)^{-n} \omega_n \operatorname{vol}(M) \lambda^{n/2},$$

(où  $\omega_n$  est le volume de la boule unité dans  $\mathbb{R}^n$ ). Mais pour le spectre des longueurs, on n'a pas de résultat universel : le type de croissance de la fonction de comptage est liée à la topologie de la variété via son groupe fondamental ([8]). Citons par exemple le cas des tores  $T^n$  (avec métrique canonique) pour lesquels  $v_M(\ell) \sim \omega_n \ell^n / \operatorname{vol}(T^n)$  (on a considéré les géodésiques à homotopie près) et le cas des quotients compacts d'espace symétriques de rang 1 à courbure négative ([4]) pour lesquels

$$v_M(\ell) \sim e^{2|\rho|\ell} / 2|\rho|\ell$$

( $|\rho|$  est la norme de Killing de la moitié de la somme des racines positives de l'espace symétrique).

Dans le cas de variétés non compactes complètes, la nature du spectre du laplacien change en général considérablement, du spectre continu apparaissant. Qu'en est-il du spectre des longueurs ?

On répond à cette question dans le cas de certaines surfaces de Riemann parmi celles à courbure constante  $-1$  et à groupe fondamental de type fini ( $M$  dite de type de  $\mathfrak{F}_{-1}$ )

Une telle surface peut-être décomposée ([9]) en la somme connexe

$$(1) \quad M^2 = D \coprod_{i=1}^M \coprod_{j=1}^N P_i \coprod_{j=1}^N V_j$$

avec

-  $D$  partie compacte de frontière  $\partial D = \coprod_{i=1}^M L_i \coprod_{j=1}^N C_j$   
 -  $M$  pointes  $\{P_i\}$  de bord  $\{L_i\}$ , isométriques à  $\{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})_x \times [a_1, \infty[ _y\}$  avec métrique  $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$  ( $P_i$  est de volume fini).

-  $N$  vasques hyperboliques  $V_j$  de bord géodésique  $C_j$ , isométriques à  $V(\ell_j) = (\mathbb{R}/\ell_j \mathbb{Z}) \cup \mathbb{R}_\tau^+$  avec la métrique  $ds^2 = \text{ch}^2 \tau d\cup^2 + d\tau^2$  ( $V_j$  est de volume infini,  $\ell_j$  est la longueur de la géodésique  $C_j$ ).

Nous démontrons le théorème suivant :

**THEOREME.** Soit  $M^2$  surface à courbure  $-1$ , à groupe fondamental de type fini, de volume infini et sans pointes. Si le bas du spectre du laplacien, soit  $\lambda_0$ , est strictement inférieur à  $1/4$ , alors

$$v_{M^2}(\ell) \sim e^{\delta \ell} / \delta \ell$$

où  $\delta$  est la solution entre  $\frac{1}{2}$  et  $1$  de  $\delta(1-\delta) = \lambda_0$ .

Remarques.

1. Si  $M$  est de type  $\mathfrak{F}_{-1}$ , on a toujours  $\lambda_0 \leq 1/4$ .
2. Si  $M$  est d'aire finie (i.e.  $N = 0$ .  $M^2$  a un compactifié  $\bar{M}$  avec des singularités isolées coniques), on a  $\lambda_0 = 0$ . Le théorème est vrai (avec  $\delta = 1$ !) ([6]. Le résultat vaut aussi pour  $M$  compacte avec des singularités isolées correspondant à des ramifications).
3. Si  $M > 0$ , on a toujours  $\lambda_0 < 1/4$ .
4.  $\lambda_0 = 1/4$  est possible par exemple pour le cylindre hyperbolique  $V(1) \amalg V(1)$ .

1. - PRELIMINAIRES.

La surface  $M$  étant à courbure constante  $-1$ , elle est le quotient du plan hyperbolique (dont on prendra comme modèle le demi-plan de Poincaré  $H = \{z = x+iy/x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$  avec métrique  $dg^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ ) par un groupe  $\Gamma$ , sous-groupe (discret et opérant sur  $H$  sans point fixe) du groupe des isométries ( $\simeq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ ) de  $H$  ( $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  opère sur  $H$  suivant  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ ).  $\Gamma$  est évidemment isomorphe au groupe fondamental de  $M$ .

Rappelons qu'au groupe  $\Gamma$  est associé un exposant de Poincaré  $\delta(\Gamma)$  défini de la manière suivante : l'abscisse de convergence de la série  $\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-d(z, \gamma z)}$  ( $d$  distance hyperbolique sur  $H$ ) ne dépend pas de  $z$ , c'est l'exposant de Poincaré. On a toujours  $\delta(\Gamma)$  dans  $[0, 1]$  ; si  $\lambda_0(M) < 1/4$ ,  $\delta(\Gamma)$  coïncide avec la solution (dans  $[\frac{1}{2}, 1)$ ) de  $\delta(1-\delta) = \lambda_0(M)$  et  $\lambda_0(M)$  est une valeur propre (isolée dans le spectre) du laplacien  $\Delta_M$  ([11]).

Si  $\delta$  est dans  $[0, \frac{1}{2}]$  (d'après ce qui précède on a  $M = 0$ ,  $N > 0$ ),  $\text{Sup} (\nu_M(\ell) e^{-\delta \ell}) < +\infty$  ([11]) et  $\Delta_M$  n'a aucune valeur propre ([10]) (Si  $N = 0$  et  $M > 0$ , il y a un nombre fini non nul de

valeurs propres, isolées dans le spectre de  $\Delta_M$ , un spectre continu  $[1/4, \infty[$  et éventuellement une infinité de valeurs propres immergées dans le spectre continu). L'obtention d'un asymptotique pour  $\chi_M$  passe ainsi par l'étude des résonances de  $\Delta_M$  (cf. (7)).

Il existe un polygone géodésique  $\mathcal{N}_\ell$  (avec la décomposition  $\mathcal{N}_\ell = \mathcal{D} \coprod_{i=1}^M \mathcal{P}_i \coprod_{j=1}^N \mathcal{V}_j$  correspondante à la décomposition (1)), domaine fondamental de  $H$  pour  $\Gamma$ . Si  $C$  est une géodésique fermée (simple resp.) de  $M$  alors il lui est associé de manière biunivoque la classe de conjugaison  $[\gamma]$  d'un élément hyperbolique (primitif resp.  $\gamma$  est dit primitif dans  $\Gamma$  si tout élément dont il est une puissance est soit  $\gamma$  soit  $\gamma^{-1}$ ) de  $\Gamma$ , l'axe  $\mathcal{G}$  de  $\gamma$  (et il existe un élément dans  $[\gamma]$  dont l'axe rencontre  $\mathcal{N}_\ell$ ) se projetant sur  $C$  (par la projection  $\pi : H \rightarrow H/\Gamma$ ).

## 2. - SCHEMA DE LA PREUVE DU THEOREME.

On établit des formules de trace à la Selberg portant sur des fonctions du laplacien convenablement choisies : d'abord pour l'opérateur de la chaleur, puis pour les résolvantes. Un théorème taubérien permet de conclure.

La suite explicite rapidement ces différentes étapes, les détails se trouvant dans un article à paraître [5].

La laplacien sur  $H$  est donné en coordonnées locales par  $\Delta = -y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ , ce qui, via l'isométrie locale de projection  $H \rightarrow H/\Gamma = M$ , induit le laplacien  $\Delta$  sur  $M$ . Soit  $\Delta_M$  le laplacien sur  $L^2(M)$  (unique extension auto-adjointe de  $(\Delta, C_0^\infty(M))$ ). Soit  $\Delta_{M-\partial D}$  (resp.  $\Delta_D, \Delta_{M-D}$ ) le laplacien sur  $M-\partial D$  (resp.  $D, M-D$ ) avec conditions de Dirichlet sur le bord  $\partial D$ .

A. OPERATEURS DE LA CHALEUR

PROPOSITION 1. L'opérateur  $\tilde{E}(t) = e^{-t\Delta_M} - e^{-t\Delta_{M-D}}$  est  
à trace et on a la formule de trace

$$(2) \quad \text{Tr } \tilde{E}(t) = \text{vol}(D)P(t) + \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}} \left\{ \sum_{j=1}^N \ell_j \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-(k\ell_j)^2/4t} e^{k\ell_j/2}}{\text{sh } k\ell_j} \right\} \right. \\ \left. + \text{vol}(\partial D)/2 + \sum_{\{C\}_0} \ell(C) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-(k\ell(C))^2/4t}}{\text{sh}(k\ell(C)/2)} \right\}$$

où  $P(t) = \frac{e^{-t/4}}{(4\pi t)^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{b}{\text{sh}(b/2)} e^{-b^2/4t} db$  et la dernière somme  
porte sur les géodésiques simples fermées de M distinctes de  $C_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ).

Preuve. On suppose, dans le cadre de cette esquisse de démonstration,  $N = 1$ . Soit  $\varphi$  fonction régulière valant 1 au voisinage de  $D$  et à support compact. On écrit

$$(3) \quad \tilde{E}(2t) = \varphi \tilde{E}(2t) + (1-\varphi) \tilde{E}(2t) \varphi \\ + ((1-\varphi) e^{-t\Delta_M} \kappa_0^{-1}) (\kappa_0 [e^{-t\Delta_M} - e^{-t\Delta_V}]) (1-\varphi) \\ + ((1-\varphi) [e^{-t\Delta_M} - e^{-t\Delta_V}]) \kappa_0 (\kappa_0^{-1} e^{-t\Delta_V} (1-\varphi))$$

où  $\kappa_0$  est la fonction définie sur  $M$  par  $\kappa_0(m) = \exp(d(m, \partial D))$ .

Les opérateurs de la chaleur étant régularisants, les deux premiers termes du membre de droite de (3) sont à trace. Pour les autres, il suffit de montrer que chacun des facteurs est Hilbert-Schmidt. Cela découle d'estimations explicites sur les noyaux, obtenues à partir des formules

$$e^{-t\Delta_M}(m, m') = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-t\Delta_H}(z, \gamma z'), \quad m, m' \in M.$$

$$e^{-t\Delta_V}(m, m') = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \{ e^{-t\Delta_H}(z, \gamma_V^k z') - e^{-t\Delta_H}(z, \gamma_V^k \sigma_V z') \}, \quad m, m' \in V$$

où  $z, z'$  sont dans  $\mathcal{H}$  au-dessus de  $m, m'$  ( $\pi : H \rightarrow M$ ),  $\sigma_V$  est la symétrie par rapport à l'axe  $\mathbb{C}$  portant  $\partial D$  et  $\gamma_V$  la transformation hyperbolique d'axe  $\mathbb{C}$  correspondant à la géodésique  $\partial D$ . On a la formule explicite

$$e^{-t\Delta_H}(z, z') = \frac{\sqrt{2} e^{-t/4}}{(4\pi t)^{3/2}} \int_a^\infty \frac{be^{-b^2/4t}}{\sqrt{chb - cha}} db$$

avec  $a = d(z, z')$ .

Remarquons que certaines de ces estimations sont tout à fait générales et démontrées pour des variétés à géométrie bornée ([1]).

Plus précisément, on a le lemme

LEMME 1. Notons  $\| \cdot \|_{tr}$  la norme trace. Il existe des constantes positives  $C_1, C_2, C_3$  telles que

$$(4) \quad \|(1-\varphi) \tilde{E}(t) (1-\varphi)\|_{tr} \leq C_1 e^{C_2 t} e^{-C_3/t}, \quad t > 0.$$

## B. RESOLVANTES

PROPOSITION 2. Soit  $\lambda_0$  un complexe hors du spectre de  $\Delta_D$  et  $T_0$  l'opérateur défini par

$$T_0(\lambda) = (\Delta_M \lambda)^{-1} - \{(\Delta_D - \lambda_0)^{-1} \oplus (\Delta_{M-D} - \lambda)^{-1}\}.$$

Notons  $\lambda = s(1-s)$ . Alors pour  $\lambda$  en dehors du spectre de  $\Delta_M$ , l'opérateur  $T_0(\lambda)$  est à trace et on a la formule de trace

$$(5) \quad \begin{aligned} \text{Tr } T_0(s(1-s)) = & -\frac{\text{vol}(D)}{4\pi} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{1}{2(2s-1)} \left\{ \sum_{j=1}^N 2\ell_j \sum_{k=1}^\infty \frac{e^{-k\ell_j(s-1)}}{\text{sh}(k\ell_j)} + \frac{\text{vol}(\partial D)}{2} \right. \\ & \left. + \sum_{\{C\}_0} \ell(C) \sum_{k=1}^\infty \frac{e^{-k\ell(C)(s-\frac{1}{2})}}{\text{sh}(k\ell(C)/2)} \right\} + \Lambda_0, \quad \text{Res} > 1 \end{aligned}$$

où  $\Lambda_0$  est une constante dépendant de  $\Lambda_0$  et  $\Gamma$  .

Preuve. Avec  $\varphi$  comme précédemment introduite on écrit

$$T_0(\lambda) = \bar{T}(\lambda) + (\Delta_D - \lambda)^{-1} - (\Delta_D - \lambda_0)^{-1}$$

où  $\bar{T}(\lambda) = (\Delta_M - \lambda)^{-1} - (\Delta_{M-\partial D} - \lambda)^{-1}$  puis

$$(6) \quad \bar{T}(\lambda) = \varphi \bar{T}(\lambda) + (1-\varphi) \bar{T}(\lambda) \varphi + (1-\varphi) \bar{T}(\lambda) (1-\varphi) .$$

Les deux premiers termes du membre de droite de (6) sont des opérateurs de Green singuliers d'ordre  $-2$  : ils n'opèrent pas sur des espaces compacts, néanmoins  $\varphi$  est à support compact ce qui permet de s'y ramener et donc d'affirmer que ces termes sont à trace ([4]). Le troisième terme est la transformée de Laplace de  $(1-\varphi) \tilde{E}(t) (1-\varphi)$  : il est donc à trace pour  $\lambda$  vérifiant  $\text{Re } \lambda < -C_2$  d'après l'estimation (4) du lemme 1. On en déduit alors facilement que  $\bar{T}(\lambda)$ , puis  $\bar{T}_0(\lambda)$  est à trace pour tout  $\lambda$  en dehors des spectres de  $\Delta_M$  et  $\Delta_D$ .

La formule de trace (5) découle alors directement de la formule de trace pour les opérateurs de la chaleur (2) en appliquant une transformation de Laplace.

### C. CONCLUSION

En utilisant un domaine fondamental et la croissance exponentielle du volume des boules on obtient le lemme

LEMME 2.

1.  $\text{Sup}_{\ell > 0} v_M(\ell) e^{-\ell} < +\infty$  .
2. La fonction de comptage  $\tilde{v}_M$  associé à l'ensemble des géodésiques simples orientées à même asymptotique que  $v_M$  .

Rappelons le théorème taubérien d'Ikehara :



PROPOSITION 3. Soit  $d\theta$  une mesure positive, telle que sa transformée de Laplace  $L(s) = \int_0^\infty e^{-sy} d\theta(y)$  converge sur  $\{\text{Re } s > \delta\}$  ( $\delta > 0$ ). Si il existe une constante  $A$  non nulle telle que  $L(s) - \frac{A}{s-\delta}$  admet un prolongement continu sur  $\{\text{Re } s \geq \delta\}$ , on a l'asymptotique  $\theta(y) \sim A e^{\delta y/\delta}$ ,  $y \rightarrow +\infty$ .

Introduisons la mesure  $d\tilde{\theta}_M = y d\tilde{\nu}_M$  de transformée de Laplace  $\tilde{L}_M$ . Reprenant (6) et avec le lemme 2 on montre facilement l'écriture

$$(7) \quad \text{Tr } T_0(s(1-s)) = \tilde{L}_M(s)/(2s-1) + H_M(s),$$

où la fonction  $H_M(s)$  est holomorphe sur  $\{\text{Re } s > \delta\}$ .

Le théorème d'Ikehara livre alors l'asymptotique de  $\tilde{\theta}_M$ , dont on déduit facilement celui de  $\nu_M$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. CHENG, P. LI et S. YAU - On the upper estimate of the heat kernel of a complete riemannian manifold. Amer. J. Math. 103 (1981), 1021-1063.
- [2] DUISTERMAT, V. GUILLEMIN - The spectrum of positive elliptic operators and bicharacteristics. Invent. Math. 29 (1975), 39-79.
- [3] R. GANGOLLI - The length spectrum of some compact manifolds of negative curvature. J. Differential Geometry 12 (1977), 403-424.
- [4] G. GRUBB - Singular Green operators and trace class estimates for exterior boundary problems. Duke Math. J. 1984 (51), 447-528.
- [5] L. GUILLOPE
  - a. Sur le spectre des longueurs d'une surface compacte à courbure  $-1$  et à bord totalement géodésique. C.R.A.S. 300 (1985), 355-358.
  - b. Sur la distribution des longueurs des géodésiques fermées d'une surface à bord totalement géodésique. Prép. Institut Fourier, 32 (1985).

- [6] D. HEIJHAL - The Selberg trace formula for  $PSL(2, \mathbb{R})$ , vol. 1 et vol. 2. Lecture notes in math., 548 (1976) et 1001 (1983), Springer.
- [7] S. LANG - Algebraic numbers (1964), Addison-Wesley.
- [8] J. MILNOR - A note on curvature and the fundamental group. J. of differential geometry 2 (1968), 1-7.
- [9] S.J. PATTERSON - The limit set of a fuchsian group. Acta Math. 136 (1976), 241-273.
- [10] S.J. PATTERSON - The Laplacian operator on a Riemann surface. Composito Math. 31 (1975), 83-107.
- [11] D. SULLIVAN - The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. Publ. Math. I.H.E.S. 50 (1979), 419-450.